JUAN J. DURÁN-LORIGA

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE PER RETTE ISOBARICHE

ESTRATTO DAL PERIODICO "LE MATEMATICHE PURE ED APPLICATE„ TOMO II, NUM. 6-7.

Città di Castello, S. Lapi Tipografo-Editore
Paris, Gauthier-Villars impr.-libraire, 55, Quai des Grands Augustins

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE PER RETTE ISOBARICHE *

Nota di **Juan J. Durán-Loriga**

I. Se consideriamo la retta la cui equazione baricentrica è

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0 \tag{1}$$

e le sue due isobariche

$$\begin{aligned} m\alpha + n\beta + l\gamma &= 0 \\ n\alpha + l\beta + m\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

queste ultime si segano nel punto

$$\alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - nl : n^2 - lm \tag{3}$$

così data la retta (1) è determinato il punto (3) e reciprocamente dato il punto

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 \tag{4}$$

si ha la retta corrispondente

$$(\alpha_1^2 - \beta_1\gamma_1)\alpha + (\beta_1^2 - \gamma_1\alpha_1)\beta + (\gamma_1^2 - \alpha_1\beta_1)\gamma = 0$$

perchè se applichiamo a quest'ultima la prima trasformazione risulta il punto (4).

Abbiamo così definita una trasformazione che diremo *per rette isobariche*.

Ai lati del triangolo fondamentale corrispondono i vertici opposti e reciprocamente.

Se una retta passa pel baricentro le corrisponde questo stesso punto, giacchè le sue isobariche passan pure per esso. Poichè la retta all' infinito coincide con le sue isobariche i punti corrispondenti sono all' infinito.

II. La precedente trasformazione può interpretarsi altrimenti. Osserviamo in fatti che data una retta $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ vi sono in essa soltanto due punti isobarici l'uno dell'altro (un punto e il suo primo isobarico). Le coordinate dei quali si ottengono risolvendo le due equazioni

$$\begin{aligned} l\alpha + m\beta + n\gamma &= 0 \\ n\alpha + l\beta + m\gamma &= 0 \end{aligned}$$

* Estratto dal Periodico mensile *Le Matematiche pure ed applicate* diretto dal *Prof. Cristoforo Alasia* (Tomo II, Num. 6-7 - Luglio-Agosto 1902). — Città di Castello, S. Lapi tipografo-editore.

ottenendosi per questi punti

$$(M) \qquad \alpha : \beta : \gamma = m^2 - ln : n^2 - ml : l^2 - nm$$
$$(M_1) \qquad \alpha : \beta : \gamma = n^2 - lm : l^2 - mn : m^2 - nl.$$

Nella trasformazione considerata si fa corrispondere alla retta data $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ il secondo isobarico di M cioè

$$(M_2) \qquad \alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - nl : n^2 - lm.$$

Inversamente dato un punto $M_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ passano per esso solo due rette isobariche una dell'altra (una retta e la sua prima isobarica) le equazioni delle quali si hanno risolvendo il sistema

$$\alpha_2 l + \beta_2 m + \gamma_2 n = 0$$
$$\gamma_2 l + \alpha_2 m + \beta_2 n = 0$$

ottenendosi le rette

$$(L) \qquad (\beta^2_2 - \gamma_2\alpha_2)\alpha + (\gamma^2_2 - \alpha_2\beta_2)\beta + (\alpha^2_2 - \beta_2\gamma_2)\gamma = 0$$
$$(L_1) \qquad (\gamma^2_2 - \alpha_2\beta_2)\alpha + (\alpha^2_2 - \beta_2\gamma_2)\beta + (\beta^2_2 - \gamma_2\alpha_2)\gamma = 0.$$

Nella trasformazione ora considerata facciamo corrispondere al punto (M_2) la seconda isobarica di (L) vale a dire

$$(L_2) \qquad (\alpha^2_2 - \beta_2\gamma_2)\alpha + (\beta^2_2 - \gamma_2\alpha_2)\beta + (\gamma^2_2 - \alpha_2\beta_2)\gamma = 0.$$

III. Supposto che la retta (1) passi per un punto fisso $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ cerchiamo il luogo del punto corrispondente. Abbiamo:

$$(5) \qquad l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = 0$$

ed eliminando l, m, n fra questa e le (2) si trova

$$(6) \qquad \alpha_1\alpha^2 + \beta_1\beta^2 + \gamma_1\gamma^2 - \alpha_1\beta\gamma - \beta_1\gamma\alpha + \gamma_1\alpha\beta = 0$$

che rappresenta un'ellisse perchè

$$\Delta_1 = -\frac{3}{4}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)^2 < 0,$$

e degenera in due rette imaginarie coniugate passanti pel baricentro quando il punto fisso coincide con quel punto.

Se il punto fisso è all'infinito il luogo corrispondente si spezza in una retta passante pel baricentro e nella retta all'infinito.

Le coniche della rete (6) passano pel baricentro ed hanno i centri sulla retta che unisce M_1 col suo complementare. In oltre gli assi delle coniche ottenute col variare di M_1 son paralleli, giacchè il punto del cerchio circoscritto, che si ottiene seguendo il metodo dato dal sig. Lemoine (*Nouv. Ann.*, septembre 1901) per la determimazione degli assi, è il punto di Steiner.

La polare di M_1 rispetto alla conica è la retta corrispondente al punto nella trasformazione considerata.

IV. Se in particolare M_1 è il punto di Lemoine, l'ellisse corrispondente ha per asse maggiore il segmento GH_2, essendo la tangente in G la trasversale reciproca dell'asse di omologia di ABC e del secondo triangolo di Brocard $A_2B_2C_2$ e perciò parallela alla retta di Longchamps. L'asse minore ha per equazione

$$[3(a^4-b^2c^2)+q^4-n^4]\alpha+[3(b^4-c^2a^2)+q^4-n^4]\beta+[3(c^4-a^2b^2)+q^4-n^4]\gamma=0$$

dove q ed n hanno il significato abituale.

La polare di K rispetto alla conica è la trasversale reciproca di ABC e del primo triangolo di Brocard $A_1B_1C_1$.

Quando M_1 è il piede di una mediana, se per esempio $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=0:1:1$, il luogo geometrico corrispondente risulta

$$\beta^2+\gamma^2-\alpha(\beta+\gamma)=0$$

che è l'ellisse di Steiner inscritta nel triangolo formato dalle intermediane $A'C'$, $A'B'$ e dalla parallela a BC condotta per A.

Finalmente se M_1 cade nel vertice A risulta $\alpha^2-\beta\gamma=0$ che è la equazione dell'ellisse di Steiner circoscritta al triangolo BCA_1 simmetrico del proposto rispetto al punto medio di BC.

La equazione (6) rappresenta un circolo soltanto nel caso del triangolo equilatero.

V. Abbiamo trovato per la ellisse corrispondente al punto fisso M_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ la equazione

$$\alpha_1\alpha^2+\beta_1\beta^2+\gamma_1\gamma^2-\alpha_1\beta\gamma-\beta_1\gamma\alpha-\gamma_1\alpha\beta=0\ldots(6)$$

Ora se $L_1=0$ è la retta corrispondente a M_1 e $L_2=0$, $L_3=0$ sono le sue due isobariche, possiamo dare alla (6) la forma

$$L_1^2-L_2L_3=0$$

dalla quale risulta che la conica (6) ha col triangolo formato da M_1 e i suoi due isobarici, la stessa relazione che la conica $\alpha^2-\beta\gamma=0$ ha col triangolo fondamentale. Questo fatto che poteva prevedersi, permette di determinare geometricamente gli elementi della conica (6).

Possiamo fare altre osservazioni. Abbiamo fatto corrispondere alla retta

$$(L_1)\ldots\quad l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

il punto

$$\alpha:\beta:\gamma=l^2-mn:m^2-nl:n^2-lm;$$

sappiamo pure che si può associare a detta retta il suo polo trilatero

$$(M')\qquad\qquad \alpha:\beta:\gamma=l:m:n$$

che viene ad essere il polo di L_1 rispetto all'ellisse imaginaria $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ col centro nel baricentro del triangolo; si vede pure immediatamente che i punti M_1, M', G sono in linea retta, ciò che permette di determinare facilmente M_1 osservando che M' è il reciproco del punto armonicamente associato alla retta.*

* Il mio amico prof. V. Retali mi ha fatto osservare che i punti M' e M_1 si corrispondono in una inversione di Hirst avente per conica dei punti uniti l'ellisse di Steiner circoscritta, e che perciò la trasformazione studiata si riduce a una polarità rispetto all'ellisse imaginaria di centro G seguita da una inversione di Hirst rispetto all'ellisse di Steiner circoscritta.

VI. Supponiamo ora inversamente che M_1 percorra una retta

$$(1) \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0;$$

la retta corrispondente inviluppera una certa curva che *a priori* si vede essere una conica. Infatti quando M_1 descrive la retta (1) il punto M_1 che ha per coordinate

$$\alpha : \beta : \gamma = (\alpha_1^2 - \beta_1\gamma_1) : (\beta_1^2 - \gamma_1\alpha_1) : (\gamma_1^2 - \alpha_1\beta_1)$$

descrive la conica $\Sigma l\alpha^2 - \Sigma l\beta\gamma = 0$ e per conseguenza la retta $\Sigma(\alpha_1^2 - \beta_1\gamma_1)\alpha = 0$, polare di M' rispetto ad $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, invilupperà un'altra conica. Troviamone l'equazione: basterà eliminare i parametri $\dfrac{\alpha_1}{\gamma_1}$ e $\dfrac{\beta_1}{\gamma_1}$, che denoteremo con a e b fra le equazioni

$$(2) \qquad f = (a^2 - b)\alpha + (b^2 - a)\beta + (1 - ab)\gamma = 0$$

$$(3) \qquad \varphi = la + mb + n = 0$$

e la equazione

$$(4) \qquad \frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b}$$

e si ottiene facilmente

$$(5) \qquad (\alpha_1^2 - \beta_1\gamma_1)\alpha + (\beta_1^2 - \gamma_1\alpha_1)\beta + (\gamma_1^2 - \alpha_1\beta_1)\gamma = 0$$

avendo posto

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -lm\,\alpha + (m^2 - 2\,ln)\beta - mn\gamma \\ \beta_1 &= (l^2 - 2\,mn)\alpha - lm\,\beta - nl\gamma \\ \gamma_1 &= 2\,m^2\alpha + 2\,l^2\beta + 2\,lm\gamma. \end{aligned}$$

La (5) è di terzo grado ma si vede facilmente che si decompone nelle seguenti

$$m^2 a + l^2\beta + lm\,\gamma = 0$$

$$\begin{aligned} (4\,mn - l^2)\alpha^2 + (4\,nl - m^2)\beta^2 + (4\,lm - n^2)\gamma^2 + 2\,(2\,l^2 + mn)\beta\gamma \\ + 2\,(2\,m^2 + nl)\gamma\alpha + 2\,(2\,n^2 + lm)\alpha\beta = 0 \end{aligned}$$

la seconda delle quali rappresenta una parabola e può scriversi

$$(6) \qquad (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 - 4\,(m\alpha + n\beta + l\gamma)(n\alpha + l\beta + m\gamma) = 0$$

oppure $L_1^2 - 4\,L_2\,L_3 = 0$, denotando con L_1 la retta data e con $L_2\,L_3$ le sue isobariche. La (6) mostra che la parabola tocca le rette $L_2\,L_3$ sulla L_1. Le coordinate dei punti di contatto sono

$$(L_1\,L_2) \qquad \alpha : \beta : \gamma = n^2 - lm : l^2 - mn : m^2 - ln$$

$$(L_1\,L_3) \qquad \alpha : \beta : \gamma = m^2 - ln : n^2 - lm : l^2 - mn$$

laonde questi punti sono isobarici di quello corrispondente a L_1.

Risulta dunque che (6) è una parabola di Artz del triangolo formato da L_1 e le sue isobariche, triangolo che è triplamente omologico al proposto ed ha lo stesso baricentro: se indichiamo con $A_1\,B_1\,C_1$ il triangolo indicato è chiaro che la parabola (5) tocca la retta che unisce i punti medî b_1 e c_1 di

$A_1 C_1$, e $A_1 B_1$, che la direzione coniugata a $B_1 C_1$ è la mediana $A_1 a_1$, questa è dunque la direzione dell'asse. Il fuoco è la intersezione della retta $A_1 K_1$ (essendo K_1 il punto di LEMOINE del nuovo triangolo) col cerchio circoscritto al triangolo $A_1 b_1 c_1$.

Quanto alla espressione analitica degli elementi della parabola si trova:

asse:

$$\begin{aligned}&[(P-Q)(2m^2+nl)+(R-P)(2n^2+ml)+(Q-R)(4mn-l^2)]\alpha+\\&[(Q-R)(2n^2+lm)+(P-Q)(2l^2+nm)+(R-P)(4nl-m^2)]\beta+\\&[(R-P)(2l^2+mn)+(Q-R)(2m^2+ln)+(P-Q)(4lm-n^2)]\gamma=0\end{aligned}$$

direttrice:

$$(mc^2+nb^2-lbc\cos A)\alpha+(na^2+lc^2-mca\cos B)\beta+(lb^2+ma^2-nab\cos C)\gamma=0.$$

Coordinate del *fuoco*:

$$\alpha:\beta:\gamma=2lP-nQ-mR:2mQ-lR-nP:2nR-mP-lQ$$

nelle quali formule si è posto

$$\begin{aligned}P&=mc^2+nb^2-lbc\cos A\\Q&=na^2+lc^2-mca\cos B\\R&=lb^2+ma^2-nab\cos C.\end{aligned}$$

VII. Consideriamo ora il caso particolare in cui $m=n=0$, nel quale la retta descritta da $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ è il lato BC del triangolo fondamentale: allora si ottiene la parabola di ARTZ $\alpha^2-4\beta\gamma=0$ e analogamente per gli altri due lati, $\beta^2-4\gamma\alpha=0$, $\gamma^2-4\alpha\beta=0$. Possiam dunque dire che *se un triangolo inscritto in quello di referenza ha per vertici tre punti isobarici, lo inviluppo dei lati di questo triangolo è formato da tre parabole di ARTZ del primo gruppo.*

Se dal punto M_1 mobile sul lato BC conduciamo le tangenti $M_1 t_1$ e $M_1 t_2$ alle parabole $\gamma^2-4\alpha\beta=0$, $\beta^2-4\gamma\alpha$ (essendo t_1 e t_2 i punti di contatto) si riconosce che le rette Ct_1 e Bt_2 si segano sopra l'ellisse di STEINER (circoscritta) del triangolo simmetrico del proposto rispetto al punto di mezzo di BC.

VIII. Se consideriamo una retta $L=l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ e le sue isobariche L' e L'' poichè l'equazione di una conica circoscritta al trilatero $LL'L''$ è $p\,LL'+q\,LL''+r\,L'L''=0$ risulta per la ellisse di STEINER circoscritta al detto triangolo

$$(7)\qquad \Sigma\, lm\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\Sigma\, l^2+\Sigma\, lm)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=0.$$

Se $lm+mn+nl=0$, cioè se il polo baricentrico di L è sull'ellisse di STEINER circoscritta al triangolo fondamentale la (7) si riduce a

$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=0$$

ossia la ellisse di STEINER circoscritta al trilatero delle isobariche $LL'L''$ coincide con quella di STEINER del triangolo fondamentale. Possiam dunque dire che *quando il polo baricentrico di una retta cade sull'ellisse di* STEINER *circoscritta, il triangolo formato da quella retta e dalle sue isobariche rimane inscritto in tale ellisse.*

Ora si vede pur facilmente che se il polo baricentrico di una retta descrive l'ellisse di STEINER circoscritta, l'inviluppo di detta retta è l'ellisse di STEINER inscritta; risulta poi che se una retta tocca l'ellisse di STEINER inscritta il triangolo formato da detta retta colle sue isobariche rimane inscritto in quella di STEINER circoscritta. È d'altra parte evidente che se una retta tocca l'ellisse di STEINER inscritta, anche le sue isobariche la toccano, perchè i poli baricentrici sono punti isobarici e se uno è sull'ellisse di STEINER circoscritta vi son pure gli altri. Si hanno così ∞^1 triangoli circoscritti a una delle ellissi e inscritti nell'altra.

IX. Consideriamo ora in generale una curva di equazione baricentrica $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$; la condizione perchè la retta $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ le sia tangente, ossia la equazione tangenziale della curva, è della forma $\varphi(l, m, n) = 0$. Il punto corrispondente alla retta è

$$\alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - nl : n^2 - lm$$

ed eliminando l, m, n fra queste ultime e la $\varphi(l, m, n) = 0$ avremo il luogo dei punti corrispondenti alle tangenti di $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$: per eseguire questa eliminazione osserviamo che essendo l, m, n proporzionali a $\alpha^2 - \beta\gamma, \beta^2 - \gamma\alpha, \gamma^2 - \alpha\beta$, basta sostituire questi valori nella $\varphi = 0$ e la equazione ottenuta

$$\varphi(\alpha^2 - \beta\gamma, \beta^2 - \gamma\alpha, \gamma^2 - \alpha\beta) = 0$$

darà la curva corrispondente alla $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Se la curva data è della classe n risulterà come equazione di grado $2n$, però potrà questo talora abbassarsi, così per esempio se la curva tocca la retta all'infinito, siccome a questa retta corrispondono punti all'infinito, la equazione della trasformata conterrà il fattore $\alpha + \beta + \gamma$, analogamente possono comparire come fattori le tangenti imaginarie, se esistono, uscenti dal baricentro.

X. Possiamo procedere inversamente, cioè invece di ottenere la curva trasformata come luogo di punti, trovarla come inviluppo di rette.

Sia al solito $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ la equazione della curva data, la retta corrispondente al punto (α, β, γ) ha per coordinate tangenziali

$$l : m : n = \alpha^2 - \beta\gamma : \beta^2 - \gamma\alpha : \gamma^2 - \alpha\beta$$

ed eliminando α, β, γ avremo la equazione dell'inviluppo. Per eseguire la eliminazione basta osservare che α, β, γ son proporzionali a $l^2 - mn, m^2 - nl, n^2 - lm$ e sostituire questi valori nella $f = 0$, la equazione ottenuta

$$f(l^2 - mn, m^2 - nl, n^2 - lm) = 0$$

sarà in coordinate tangenziali la trasformata di $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

XI. Sia per esempio la parabola di ARTZ $\alpha^2 - 4\beta\gamma = 0$, la cui equazione tangenziale è $u^2 - vw = 0$, sostituendo in questa ad u, v, w respettivamente i binomi $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \gamma\alpha$, $\gamma^2 - \alpha\beta$ risulta per la curva corrispondente la equazione

$$\alpha^2 (\alpha^2 - 3\beta\gamma) + \alpha(\alpha^3 + \beta^3) = 0$$

che si scinde nelle tre seguenti $\alpha = 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ e

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = 0$$

le due ultime rappresentano la retta all'infinito e il paio di tangenti imaginarie condotte alla parabola data dal baricentro; la prima $\alpha = 0$ cioè il lato CB del triangolo è il luogo cercato, come si era già visto.

Sia ora l'ellisse $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$, che per quanto dicemmo sopra è l'ellisse di Steiner circoscritta al triangolo BCA_1, simmetrico del proposto rispetto al punto medio di BC. La sua equazione tangenziale è $u^2 - 4vw = 0$ e la curva corrispondente

$$\alpha^2 (\alpha^2 - 6\beta\gamma) + 4\alpha(\beta^3 + \gamma^3) - 3\beta^2\gamma^2 = 0, \tag{1}$$

questa essendo unicursale possono esprimersi le coordinate dei suoi punti in funzione razionale di un parametro.

Osserviamo per far ciò, che se nella equazione tangenziale poniamo $u = m$, $v = n$ risulta $w = \dfrac{m^2}{4n}$; abbiam dunque $u = 4mn$, $v = 4n^2$, $w = m^2$. Le rette cui corrispondono i punti della curva (1) son dunque

$$4mn\alpha + 4n^2\beta + m^2\gamma = 0$$

e tali punti hanno per coordinate

$$\alpha : \beta : \gamma = 12m^2n^2 : 16n^4 - 4m^3n : m^4 - 16mn^3$$

e ponendo $m : n = p$ si trova

$$\alpha : \beta : \gamma = 12p^2 : 16 - 4p^3 : p^4 - 16p$$

o più semplicemente ponendo p per $2p$

$$\alpha : \beta : \gamma = 3p^2 : 1 - 2p^3 : p^4 - 2p.$$

Più generalmente alle coniche $\alpha^2 - k\beta\gamma = 0$ corrispondono le curve

$$\alpha^2 (k\alpha^2 - 2(k+2)\beta\gamma) + 4\alpha(\beta^3 + \gamma^3) + (k - 4)\beta^2\gamma^2 = 0$$

ottenute come sopra mediante la equazione tangenziale $ku^2 - 4vw = 0$.

La equazione parametrica è

$$\alpha : \beta : \gamma = p^2(4 - k) : 1 - 2kp^3 : k^2p^4 - 2p.$$

XII. Determiniamo ora lo inviluppo delle rette corrispondenti ai punti della retta $\beta + \gamma = 0$, parallela a BC condotta per A. Ponendo in luogo di β e γ respettivamente $v^2 - uw$ e $w^2 - uv$, per l'equazione tangenziale dello inviluppo si ha

$$v^2 + w^2 - uw - uv = 0$$

o in coordinate locali

$$4\alpha(\alpha + \beta + \gamma) - (\beta - \gamma)^2 = 0$$

che rappresenta evidentemente una parabola tangente al lato BC nel piede della mediana. Alla mediana $\beta - \gamma = 0$ corrisponde lo inviluppo degenere della seconda classe formato dal baricentro G e dal punto all'infinito della retta BC.

Se il punto descrive una conica $\beta\gamma + m\,\gamma\alpha + n\,\alpha\beta = 0$ circoscritta al triangolo fondamentale la curva corrispondente avrà per equazione tangenziale

$$F(u, v, w) = \Sigma\, l v^2 w^2 - \Sigma\, l u\,(v^3 + w^3) + u\,v\,.\,w\,\Sigma\, l u = 0$$

evidentemente inscritta nel triangolo di referenza. Ne avremo la equazione puntuale eliminando u, v, w fra le equazioni

$$F'_u : F'_v : F'_w = \alpha : \beta : \gamma$$

e la $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$. In particolare per la ellisse di STEINER circoscritta si trova la ellisse di STEINER inscritta.

XIII. Abbiam visto che se dai singoli punti della ellisse di STEINER circoscritta si conducono le tangenti alla inscritta queste rette sono isobariche, però data una conica qualunque non havvi in generale che un numero limitato di punti che godono di questa proprietà.

Determiniamo per esempio i punti tali che le tangenti condotte da essi al cerchio circoscritto siano rette isobariche (una retta e la sua isobarica). La equazione di tal circolo è

$$(1) \qquad a^2\,\beta\gamma + b^2\,\gamma\alpha + c^2\,\alpha\beta = 0$$

Sieno M il punto cercato e $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $M_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ i punti di contatto; le tangenti in M_1 e M_2 sono

$$(2) \qquad T_1 = (b^2\gamma_1 + c^2\beta_1)\,\alpha + (c^2\alpha_1 + a^2\gamma_1)\,\beta + (a^2\beta_1 + b^2\alpha_1)\,\gamma = 0$$

$$(3) \qquad T_2 = (b^2\gamma_2 + c^2\beta_2)\,\alpha + (c^2\alpha_2 + a^2\gamma_2)\,\beta + (a^2\beta_2 + b^2\alpha_2)\,\gamma = 0$$

con le condizioni

$$(4) \qquad \Sigma\, a^2\beta_1\gamma_1 = 0$$

$$(5) \qquad \Sigma\, a^2\beta_2\gamma_2 = 0.$$

La isobarica di T_1 è

$$T_2 = (c^2\alpha_1 + a^2\gamma_1)\,\alpha + (a^2\beta_1 + b^2\alpha_1)\,\beta + (b^2\gamma_1 + c^2\beta_1)\,\gamma = 0$$

si dovrà dunque verificare

$$\frac{a^2\gamma_1 + c^2\alpha_1}{b^2\gamma_2 + c^2\beta_2} = \frac{b^2\alpha_1 + a^2\beta_1}{c^2\alpha_2 + a^2\gamma_2} = \frac{c^2\beta_1 + b^2\gamma_1}{a^2\beta_2 + b^2\alpha_2};$$

dalle (4) e (5) si deduce

$$a^2\gamma_1 + c^2\alpha_1 = -\frac{b^2\alpha_1\gamma_1}{\beta_1}, \quad b^2\gamma_1 + c^2\beta_1 = -\frac{a^2\beta_1\gamma_1}{\alpha_1}, \quad a^2\beta_1 + b^2\alpha_1 = -\frac{c^2\alpha_1\beta_1}{\gamma_1}$$

$$b^2\gamma_2 + c^2\beta_2 = -\frac{a^2\beta_2\gamma_2}{\alpha_2}, \quad a^2\beta_2 + b_2\alpha^2 = -\frac{c^2\alpha_2\beta_2}{\gamma_2}, \quad a^2\gamma_2 + c^2\alpha_2 = -\frac{b^2\alpha_2\gamma_2}{\beta_2}$$

e si hanno facilmente le condizioni

$$a^2 \beta_1 \gamma_2 = bc\, \alpha_1 \alpha_2 \qquad b^2 \gamma_1 \alpha_2 = ca\, \beta_1 \beta_2$$

le quali insieme alle (4) e (5) dànno per le coordinate di M_1 e M_2

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \frac{a}{b^2 - ca} : \frac{b}{c^2 - ab} : \frac{c}{a^2 - bc}$$

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{c}{c^2 - ab} : \frac{b}{a^2 - bc} : \frac{c}{b^2 - ca} ;$$

l'equazione della retta $M_1 M_2$ è

$$\frac{\alpha}{a^2 - bc} + \frac{\beta}{b^2 - ca} + \frac{\gamma}{c^2 - ab} = 0$$

questa retta è armonicamente associata al punto

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 - bc : b^2 - ca : c^2 - ab$$

intersezione della retta che unisce G al centro del cerchio inscritto con quella che unisce il punto di LEMOINE col reciproco di detto centro.

Le equazioni di T_1 e T_2 si hanno sostituendo in (2) e (3) i valori delle coordinate di M_1 e M_2 e sono

$$T_1 = (b^2 - ca)^2 \alpha + (c^2 - ab)^2 \beta + (a^2 - bc)^2 \gamma = 0$$
$$T_2 = (c^2 - ab)^2 \alpha + (a^2 - bc)^2 \gamma + (b^2 - ca)^2 \alpha = 0.$$

Finalmente per avere le coordinate di M cioè del punto che gode della proprietà indicata basta trovare l'intersezione di T_1 e T_2 e si ha

$$\frac{\alpha}{(a^2 - bc)^4 - (b^2 - ca)^2 (c^2 - ab)^2} = \frac{\beta}{(b^2 - ca)^4 - (c^2 - ab)^2 (a^2 - bc)^2}$$
$$= \frac{\gamma}{(c^2 - ab)^4 - (a^2 - bc)^2 (b^2 - ca)^2} .$$

LE MATEMATICHE PURE ED APPLICATE

Norme e condizioni.

Il periodico pubblica *Note e Memorie di Matematica*, sì elementare che superiore sì pura che applicata alle scienze affini.

Tutte le *Note*, *Memorie*, *Soluzioni di questioni*, *Recensioni*, ecc. devono essere firmate: gli autori assumono essi soli la responsabilità scientifica dei loro scritti. *I manoscritti non pubblicati non si restituiscono.*

Le memorie provenienti dall'estero potranno essere pubblicate in Francese, *qualora gli autori ne facciano esplicita domanda nell'inviare il manoscritto.*

Una parte del periodico è riservata alle questioni proposte e relative soluzioni Queste, se si desidera che siano inserite subito, devono giungere alla redazione al più tardi dopo pubblicato il numero che sussegue a quello che contiene la questione.

Accanto alla precedente rubrica continua ad essere aperta l'altra che abbiamo trovata utilissima: quella dei *soggetti di ricerche*. Preghiamo i lettori di profittarne per temi di studi che escono dall'ordinario, o che sono nuovi.

Preghiamo vivamente d'inviare insieme ad ogni questione, la relativa risoluzione, o un riassunto di essa.

Delle opere inviate alla direzione in doppio esemplare, o di quelle di certa mole inviate in unico esemplare, sarà fatta larga recensione.

Delle opere inviate in semplice esemplare sarà dato il sommario od un giudizio complessivo. Tutte le *memorie* o *estratti* ricevuti saranno annunciati nella seconda e terza facciata della copertina del numero più prossimo che sarà pubblicato.

Il periodico si pubblica a fascicoli di 24 pagine con copertina. Ad essi possono unirsi supplementi o estratti da altre riviste, concessi dagli autori.

Il prezzo d'associazione per il volume di 12 numeri è di Lire 10 per l'Italia, Franchi 12 per l'Estero. Esso deve essere inviato anticipato all'Editore S. LAPI in *Città di Castello*. Gli abbonati esteri che lo trovino conveniente possono inviare la somma predetta per mezzo dell'Editore GAUTHIER-VILLARS di *Parigi*.

Le *lettere, comunicazioni, domande di schiarimenti, pubblicazioni* ecc., devono essere inviate al Prof. CRISTOFORO ALASIA in *Tempio* (Sardegna). Le *note, memorie, recensioni, questioni* e relative risoluzioni tanto al suddetto come al Dott. V. RETALI, via Fieno, 5, in *Milano*.

Gli autori di *note* o *memorie* che desiderano estratti dei loro scritti, devono avvisarne la Redazione al tempo stesso che spediscono il manoscritto. Essi potranno averli ai prezzi seguenti, che invieranno all'Editore:

per 20 esemplari di un foglio di stampa o frazione di foglio, carta e copertina uguale a quella del periodico, col nome dell'autore e titolo della memoria, L. 2,50;
per 50 esemplari, L. 4;
per 100 esemplari, L. 6,50;
per ogni 50 esemplari successivi, L. 2,50;
per ogni foglio o frazione di foglio dopo il primo: per ogni 50 esempl. L. 2,50.

Gli autori di *risoluzioni di questioni*, e gli autori di opere delle quali è fatta recensione, che volessero estratti delle soluzioni o della recensione, possono averle senza copertina, ai prezzi seguenti:

per 25 esemplari, L. 1; per ogni 25 esemplari successivi, L. 0,75. Con copertina i prezzi aumentano di L. 1 ogni 25 esemplari.