M. Juan J. DURAN-LORIGA

Commandant d'artillerie en retraite, à La Corogne (Espagne).

SUR LES TRIANGLES ISOGONOLOGIQUES

Extrait des Comptes rendus de
l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.

CONGRÈS DE MONTAUBAN — 1902

PARIS
SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION
(Hôtel des Sociétés savantes)
28, RUE SERPENTE

ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fusionnée avec
L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE
(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE MONTAUBAN. — 1902

M. Juan J. DURAN-LORIGA
Commandant d'artillerie en retraite, à La Corogne (Espagne)

SUR LES TRIANGLES ISOGONOLOGIQUES [K 5 c]

— *Séance du 11 août* —

1. — Soit ABC le triangle fondamental et A'B'C' un autre triangle tel que les perpendiculaires menées de A, B, C sur B'C', C'A', A'B' concourent en un point L, alors on sait que les perpendiculaires abaissées de A', B', C, sur BC, CA, AB concourent aussi en un point L' (Steiner, *Œuvres complètes*, I, p. 157) et ces triangles sont dits orthologiques. L et L' sont les centres d'orthologie et nous dirons que L est le premier centre et L' le second. De même, si les parallèles menées par A, B, C à B'C', C'A' et A'B' concourent en un point P, les parallèles à BC, CA et AB menées par A', B', C' concourent aussi en un point P' (Neuberg, Mathesis (1), I, p. 144). De tels triangles sont dits parallélogiques (voyez un intéressant article de M. Léon Ripert, A. F., Congrès d'Ajaccio, 1901); nous dirons que P est le premier centre de parallélogie et P' le second.

Nous nous proposons dans cette Note considérer le cas de deux triangles orthologiques ABC et A'B'C', où le premier centre d'orthologie L est sur la circonférence ABC, et alors il est aisé de voir : 1° que le centre L' est sur la circonférence A'B'C' ; 2° que les triangles sont parallélogiques avec les centres P et P' sur les circonférences circonscrites ; 3° ils sont inversement semblables ; 4° les droites menées par A, B, C formant angles égaux avec

B′C′, C′A′, A′B′ concourent sur la circonférence ABC (ou inversement). C'est par cette dernière circonstance que nous appelons *triangles isogonologiques* deux triangles qui remplissent la condition d'être orthologiques, avec les centres d'orthologie sur les circonférences circonscrites.

Voyons maintenant les conditions d'isogonologie de deux triangles ABC et A′B′C′. Soit ABC le triangle de référence et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ les coordonnées barycentriques des sommets A′, B′, C′. Il suffit d'établir que les parallèles menées à B′C′, C′A′ et A′B′ par A, B, C concourent sur la circonférence ABC puisque alors on voit facilement que le centre d'orthologie L est aussi sur la susdite circonférence.

Les parallèles menées par A, B, C ont pour équations :

$$(1)\ L_1\beta - L_2\gamma = 0, \qquad (2)\ M_1\alpha - M_2\gamma = 0, \qquad (3)\ N_1\alpha - N_2\beta = 0$$

ayant fait

$$\gamma_2(\alpha_3+\beta_3) - \gamma_3(\alpha_2+\beta_2) = L_1, \qquad \beta_2(\alpha_3+\gamma_3) - \beta_3(\alpha_2+\gamma_2) = L_2,$$

$$\gamma_2(\alpha_1+\beta_1) - \gamma_1(\alpha_2+\beta_2) = M^1, \qquad \alpha_2(\beta_1+\gamma_1) - \alpha_1(\beta_2+\gamma_2) = M_2,$$

$$\beta_1(\alpha_2+\gamma_2) - \beta_2(\alpha_1+\gamma_1) = N_1 \qquad \alpha_1(\beta_2+\gamma_2) - \alpha_2(\beta_1+\gamma_1) = N_2.$$

Le point d'intersection de (1) et (2) a pour coordonnées :

$$\frac{\alpha}{M_2L_1} = \frac{\beta}{M_1L_2} = \frac{\gamma}{M_1L_1}.$$

L'intersection de (3) avec la circonférence ABC donne :

$$\frac{\alpha}{N_2(a^2N_1+b^2N_2)} = \frac{\beta}{N_1(a^2N_1+b^2N_2)} = \frac{\gamma}{-c^2N_1N_2},$$

on aura donc :

$$\frac{M_2L_1}{N_2(a^2N_1+b^2N_2)} = \frac{M_1L_2}{N_1(a^2N_1+b^2N_2)} = \frac{M_1L_1}{-c^2N_1N_2},$$

les conditions d'isogonologie sont par suite :

$$(4)\qquad a^2M_2N_1 + b^2M_1N_2 + c^2N_1M_2 = 0,$$

$$(5)\qquad a^2L_1N_1 + b^2L_1N_2 + c^2L_2N_2 = 0,$$

ou bien en forme de déterminant :

$$(4')\quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ N_2 & -N_1 & 0 \\ M_2 & 0 & -M_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (5')\quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ N_2 & -N_1 & 0 \\ 0 & L_2 & -L_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on emploie des coordonnées du *même poids*, c'est-à-dire si l'on a $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \ldots$, alors L_1, M_1, N_1, etc., deviennent proportionnels à $\gamma_2 - \gamma_3$, $\gamma_3 - \gamma_1$, etc., et l'on peut écrire les conditions d'isogonologie sous la forme :

$$(4'')\quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_2 - \beta_1 & 0 \\ \alpha_3 - \alpha_1 & 0 & \gamma_1 - \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5'')\quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_2 - \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_3 - \beta_2 & \gamma_2 - \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que le triangle A'B'C' soit donné par les équations de ses côtés :

$$\left.\begin{array}{ll} (B'C') & l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0 \\ (C'A') & l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0 \\ (A'B') & l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma = 0 \end{array}\right\}$$

les conditions d'isogonologie sont :

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ m_3 - n_3 & l_3 - n_3 & 0 \\ n_2 - m_2 & 0 & l_2 - m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ m_3 - n_3 & l_3 - n_3 & 0 \\ 0 & n_1 - l_1 & m_1 - l_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on donne la direction d'un côté par exemple B'C', les directions des autres côtés sont déterminées. Soit N le point où la parallèle à B'C' menée par A coupe la circonférence ABC ; les droites BN et CN sont parallèles à C'A' et B'C'.

Si l'on connait deux sommets, le troisième est évidemment déterminé.

Si l'on donne trois points situés sur les côtés, les sommets du triangle A'B'C' décrivent des coniques, puisque les côtés du triangle forment des faisceaux homographiques; ainsi, par exemple, si le côté A'B' passe par A, et A'C' par B le lieu de A' est l'hyperbole qui a pour équation :

$$(a^2 - b^2)\beta\gamma - c^2\alpha\beta - b^2\gamma^2 = 0$$

et qui évidemment touche le côté AC et la ceviene

$$(a^2 - b^2)\gamma - c^2\alpha = 0$$

dans les points A et B.

Corrélativement, si l'on donne trois droites sur lesquelles sont les sommets de A'B'C', les côtés de ce triangle enveloppent des coniques. Si l'un des sommets est fixe et qu'un autre sommet se meuve sur une droite le lieu du troisième est une droite; ainsi, par exemple, si C' est en A et B' sur BC, le lieu de A' est la droite qui a pour équation :

$$b^2\alpha + c^2\beta + (c_2 - a^2)\gamma = 0.$$

On peut se proposer de construire des triangles isogonologiques et trihomologiques à ABC ; la solution est facile : il suffit de tracer un triangle quelconque A'B'C' isogonologique à ABC et ensuite une autre homothétique à A'B'C' et trihomologique à ABC, problème connu.

II. — Considérons le cas particulier où le triangle A'B'C' soit isobarique avec le triangle fondamental : alors les conditions d'isogonologie se réduisent à la seule relation

$$a^2(\beta_1 - \gamma_1) + b^2(\alpha_1 - \beta_1) + c^2(\gamma_1 - \alpha_1) = 0.$$

et le lieu du point A' $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ est :

$$(b^2 - c^2)\alpha + (a^2 - b^2)\beta + (c^2 - a^2)\gamma = 0,$$

c'est-à-dire la droite qui joint le sommet A_1 du premier triangle de Brocard au centre de gravité.

De même, la condition pour que la droite (B'C') forme avec ses isobariques des triangles isogonologiques avec le triangle de référence est :

$$a^2(n_1 - m_1) + b^2(m_1 - l_1) + c^2(l_1 - n_1) = 0,$$

et l'enveloppe de B'C' est le point qui a pour équation tangentielle :

$$(c^2 - b^2)\alpha + (b^2 - a^2)\beta + (a^2 - c^2)\gamma = 0,$$

ou en coordonnées ponctuelles :

$$\frac{\alpha}{c^2 - b^2} = \frac{\beta}{b^2 - a^2} = \frac{\gamma}{a^2 - c^2},$$

c'est-à-dire le point à l'infini du côté B_1C_1 du premier triangle de Brocard. il en résulte que les triangles isogonologiques et isobariques avec le triangle fondamental sont homothétiques au premier triangle de Brocard : le centre commun d'homothétie est le centre de gravité ; ils sont aussi tri-homologiques avec le triangle de référence (comme tous les triangles formés par droites isobariques). Nous obtenons ainsi une série de triangles qui ont quelques analogies avec le premier triangle de Brocard et que nous pouvons appeler *triangles brocardiens.*

On trouve facilement l'expression générale des coordonnées des sommets des susdits triangles en fonction de deux paramètres variables p et q.

Sommet A'

$$\frac{\alpha}{q(a^2 - c^2) + p(b^2 - a^2)} = \frac{\beta}{p(b^2 - c^2)} = \frac{\gamma}{q(b^2 - c^2)},$$

B' et C' les points isobariques de A'.

On obtient le triangle de Brocard avec les valeurs des paramètres :

$$p = \text{A}c^2, \qquad q = \text{A}b^2.$$

Le centre de gravité est aussi un cas particulier de ces triangles (triangle à trois sommets confondus), il correspond à l'hypothèse $p = q$.

Pour que le triangle A'B'C' soit inscrit au triangle de référence, il faut faire une des trois hypothèses :

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{q} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2},$$

il y a donc trois triangles brocardiens inscrits au triangle fondamental. Considérons, par exemple, le triangle qui correspond à l'hypothèse :

$$\frac{p}{q} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2},$$

les coordonnées des sommets sont

$$(\text{A}') \qquad \frac{\alpha}{o} = \frac{\beta}{a^2 - c^2} = \frac{\gamma}{a^2 - b^2},$$

$$(\text{B}') \qquad \frac{\alpha}{a^2 - c^2} = \frac{\beta}{a^2 - b^2} = \frac{\gamma}{o},$$

$$(\text{C}') \qquad \frac{\alpha}{a^2 - b^2} = \frac{\beta}{o} = \frac{\gamma}{a^2 - c^2}.$$

et les coordonnées du centre P′ de parallélogie sont :

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{a^2 - b^2} = \frac{\gamma}{a^2 - c^2},$$

c'est-à-dire le point isotomique du sommet A′.

Nous allons maintenant trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle dont nous parlons, on a :

$$\frac{\mathrm{BA}'}{\mathrm{A'C}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \mathrm{BA}' = \dfrac{a(a^2 - b^2)}{2a^2 - (b^2 + c^2)}, \\ \mathrm{A'C} = \dfrac{a(a^2 - c^2)}{2a^2 - (b^2 + c^2)}, \end{cases}$$

et puisque P′ est isotomique de A′, on a aussi :

$$\mathrm{BP}' = \frac{a(a^2 - c^2)}{2a^2 - (b^2 + c^2)}, \qquad \mathrm{P'C} = \frac{a(a^2 - b^2)}{2a^2 - (b^2 + c^2)},$$

par suite les puissances des sommets B et C par rapport au cercle A′B′C′P′ sont :

$$m = \mathrm{BA'XBP'} = \frac{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{[2a^2 - (b^2 + c^2)]^2} = n = \mathrm{CA'XCP'}.$$

Pour trouver le paramètre l il suffit d'établir que le cercle passe par le point $\mathrm{B}'(a^2 - c^2, a^2 - b^2, 0)$, et on trouve facilement :

$$l = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{[2a^2 - (b^2 + c^2)]^2},$$

l'équation que nous cherchons est donc :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \times \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{[2a^2 - (b^2 + c^2)]^2} \times [(b^2 + c^2 - a^2)\alpha + a^2\beta + a^2\gamma] - \sum a^2\beta\gamma = 0.$$

Ce cercle a quelques propriétés intéressantes : nous l'étudierons dans un prochain travail ; pour le moment nous observerons qu'il passe, en plus des points A′, B′, C′ et le centre de parallélogie P′, par l'orthocentre du triangle formé par le sommet A du triangle de référence et le côté B′C′ du triangle inscrit, par les points de concours des parallèles menées par A′B′C′ aux droites joignant les sommets de ABC aux points de Brocard, Ω, et Ω_2. D'autre part, l'équation montre que ce cercle est coaxial avec le circonscrit et le premier cercle M_a de *M'Cay*. On trouve aussi divers points de ce cercle au moyen des droites menées par A', B', C' formant des angles égaux avec les côtés du triangle de référence.

Le triangle brocardien inscrit A'B'C' a des relations faciles à trouver avec le triangle fondamental ABC. Citons, par exemple, les suivantes :

1° Soit L l'intersection avec le côté AB de la droite qui joint C' au point de Steiner et M l'intersection de AP' et B'C'; les points A', L, M sont collinéaires;

2° Cette droite est parallèle à celle qui joint P' au point de Steiner. Les autres deux triangles inscrits donnent des propriétés analogues.

Nous avons dit que les triangles brocardiens sont triplement homologiques avec le triangle de référence, nous avons à trouver le lieu des centres d'homologie (par exemple le premier centre d'homologie), ce qui nous conduira à un résultat intéressant.

L'équation du côté B'C' en fonction d'un paramètre variable Λ est :

$$(b^2c^2 - a^4 + \Lambda)\alpha + (a^2b^2 - c^4 + \Lambda)\beta + (a^2c^2 - b^4 + \Lambda)\gamma = 0.$$

Si l'on pose :

$$b^2c^2 - a^4 = l, \qquad a^2b^2 - c^4 = m, \qquad a^2c^2 - b^4 = n,$$

on obtient pour les équations des trois côtés :

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{B'C'}) & (l + \Lambda)\alpha + (m + \Lambda)\beta + (n + \Lambda)\gamma = 0, \\
(\mathrm{C'A'}) & (m + \Lambda)\alpha + (n + \Lambda)\beta + (l + \Lambda)\gamma = 0, \\
(\mathrm{A'B'}) & (n + \Lambda)\alpha + (l + \Lambda)\beta + (m + \Lambda)\gamma = 0.
\end{array}$$

Les droites joignant A et A', B et B' ont pour équations :

$$[(n + \Lambda)^2 - (m + \Lambda)(l + \Lambda)]\beta - [(m + \Lambda)^2 - (l + \Lambda)(n + \Lambda)]\gamma = 0,$$
$$[(l + \Lambda)^2 - (m + \Lambda)(n + \Lambda)]\alpha - [(m + \Lambda)^2 - (l + \Lambda)(n + \Lambda)]\gamma = 0,$$

et nous aurons pour les coordonnées du centre d'homologie

$$\frac{\alpha}{\dfrac{1}{(l + \Lambda)^2 - (m + \Lambda)(n + \Lambda)}} = \frac{\beta}{\dfrac{1}{(n + \Lambda)^2 - (m + \Lambda)(l + \Lambda)}}$$
$$= \frac{\gamma}{\dfrac{1}{(m + \Lambda)^2 - (l + \Lambda)(n + \Lambda)}}.$$

Nous devons éliminer le paramètre Λ entre ces équations, mais pour plus de commodité, considérons le point réciproque et l'élimination de Λ donne :

$$(c^2 - b^2)\alpha + (a^2 - c^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0.$$

Le lieu cherché est donc :

$$(c^2 - b^2)\beta\gamma + (a^2 - c^2)\alpha\gamma + (b^2 - a^2)\alpha\beta = 0,$$

c'est-à-dire l'hyperbole de Kiepert qui, comme on sait, est équilatère, circonscrite au triangle de référence et passe par le centre de gravité, l'orthocentre, le point de Tarry et plusieurs autres points remarquables.

De même que nous avons trouvé le lieu des centres d'homologie du triangle variable A'B'C', on peut se proposer de trouver celui des centres de parallélogie.

L'équation de la parallèle menée par A' au côté BC est :

$$\begin{aligned}[(m+\Lambda)(l-m)+(l-n)(n+\Lambda)]\alpha+[(n+\Lambda)(l-m)+(l-n)(l+\Lambda)]\beta \\ +[(l+\Lambda)(l-m)+(l-n)(m+\Lambda)]\gamma=0,\end{aligned}$$

et la parallèle à AC menée par B' a pour équation :

$$\begin{aligned}[(n+\Lambda)(l-n)+(l+\Lambda)(m-n)]\alpha+[(l+\Lambda)(l-n)+(m+\Lambda)(m-n)]\beta \\ +[(m+\Lambda)(l-n)+(n+\Lambda)(m-n)]\gamma=0.\end{aligned}$$

l'intersection de ces droites a pour coordonnées :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{(mn-l^2)+\Lambda(m+n-2l)} &= \frac{\beta}{(ml-n^2)+\Lambda(m+l-2n)} \\ &= \frac{\gamma}{(nl-m^2)+\Lambda(m+l-2n)}.\end{aligned}$$

L'élimination de Λ donne finalement pour le lieu que l'on cherche :

$$(c^2 - b^2)\alpha + (a^2 - c^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0,$$

c'est-à-dire la droite harmoniquement associée au point de Steiner.

On peut observer que le centre q' *de parallélogie et le premier centre d'homologie décrivent des lieux réciproques.*

III. — Avant de terminer cette note, je dois remarquer qu'il y a trois points qui jouent un rôle important relativement au triangle inscrit $A'B'C'$, que nous avons considéré et au cercle qui lui est circonscrit.

Ce sont les points homothétiques des sommets du triangle fondamenta dans le système que nous avons étudié; ils ont pour coordonnées :

$$(P_a) \qquad \frac{\alpha}{-(b^2+c^2)} = \frac{\beta}{a^2} = \frac{\gamma}{a^2},$$

$$(P_b) \qquad \frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{-(b^2+c^2)} = \frac{\gamma}{a^2},$$

$$(P_c) \qquad \frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{a^2} = \frac{\gamma}{-(b^2+c^2)}.$$

Les droites P_bA', P_cB', P_aC' concourent sur le cercle $A'B'C'$ en un point ω_1', qui a pour coordonnées :

$$\frac{\alpha}{a^2(a^2b^2-c^4)} = \frac{\beta}{a^2(a^2c^2-b^4)} = \frac{\gamma}{(b^2+c^2)(a^4-b^2c^2)},$$

c'est le point homothétique de Ω_1.

De même les droites P^bC', P_cA', P_aB' concourent en un point ω_2' qui a pour coordonnées

$$\frac{\alpha}{a^2(a^2c^2-b^4)} = \frac{\beta}{(b^2+c^2)(a^4-b^2c^2)} = \frac{\gamma}{a^2(a^2b^2-c^4)};$$

c'est le point homothétique de Ω_2.

Le point ω_1' est le factorien (selon dénomination de M. A. Poulain) du point P_c et de celui qui a pour coordonnées :

$$\frac{\alpha}{a^2b^2-c^4} = \frac{\beta}{a^2c^2-b^4} = \frac{\gamma}{b^2c^2-a^4}.$$

Quant à ce dernier point, il est un des points semi-réciproques du point harmoniquement associé à l'axe d'homologie de ABC avec le premier triangle de Brocard.

Il y a analogie en ce qui concerne le point ω_2'.

Le temps nous fait absolument défaut pour exposer d'autres propriétés qui dérivent par un penchant naturel de la considération des triangles isogonologiques, nous le ferons dans un prochain travail.