N.º 708

TRES CAPÍTULOS

DE

GEOMETRÍA SUPERIOR

CON ARREGLO AL PROGRAMA DE INGRESO
EN LA ESCUELA GENERAL PREPARATORIA DE INGENIEROS
Y ARQUITECTOS

POR

Don Juan J. Durán Loriga

CAPITAN DE ARTILLERÍA

LA CORUÑA:
IMPRENTA Y PAPELERIA DE PUGA
1891

TRES CAPÍTULOS

DE

GEOMETRÍA SUPERIOR

CON ARREGLO AL PROGRAMA DE INGRESO
EN LA ESCUELA GENERAL PREPARATORIA DE INGENIEROS
Y ARQUITECTOS

POR

Don Juan J. Durán Loriga

CAPITAN DE ARTILLERÍA

LA CORUÑA:
IMPRENTA Y PAPELERIA DE PUGA
1891

PRÓLOGO

Nos hemos propuesto en el presente folleto exponer en muy pocas páginas la parte de Geometría Superior que exige el programa de ingreso en la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos. Si el lector encuentra en este trabajo reunidas las condiciones de concisión, claridad y buen método en la exposición de las teorías que abraza, nuestro propósito habrá quedado cumplido.

PRINCIPIO DE SIGNOS EN GEOMETRÍA

Si consideramos un punto fijo o elegido arbitrariamente sobre una recta (fig. 1.ª) y nos marcan la distancia l que separa otro punto de dicha recta del primero no podemos sin ambigüedad señalar la posición del segundo punto, puesto que ignoramos si hemos de situarlo en A ó en A'. Esta ambigüedad desaparecería si nos dijesen si el punto en cuestión debe estar situado á la derecha ó á la izquierda del o.

Se ha convenido en anteponer el signo más á las distancias que se cuenten en el sentido oA y llamarlas positivas, y afectar del signo menos llamándolas negativas las que se tomen en el sentido oA'.

Claro está que la dirección positiva es arbitraria y la única condición que hay que exigir al considerar la *cualidad* de la magnitud geométrica es que vayan acompañadas de signos contrarios las que tengan sentidos opuestos.

Del mismo modo, si consideramos una recta AB (fig. 2.ª) podemos suponerla engendrada, bien por un móvil que partiendo de A llega á B ó inversamente; el movimiento del primer punto nos marca un cierto sentido AB y el del segundo una dirección completamente contraria BA; pues bien, se considera la primera como positiva y la segunda negativa y se podrá establecer por consiguiente

$$AB=-BA \text{ ó } AB+BA=o$$

La introducción del principio de signos en Geometría generaliza las cuestiones pues evita el tener que estudiar, en ocasiones en que esto sería necesario, distintas posiciones de los elementos de las figuras y tiende á unificar el enunciado de algunos teoremas, así por ejemplo al estudiar como varía la relación de distancias de un punto móvil sobre una recta, á otros dos fijos situados en ella, se nota que á un punto *interior* al segmento corresponde siempre otro *exterior*, pero el principio de signos permite observar que si bien las dos relaciones $\frac{MA}{MB}$ y $\frac{M'A}{M'B}$ son iguales en valor absoluto la primera es negativa porque MA y MB tienen dirección contraria, y se puede por consiguiente establecer que *solo hay un punto que divida á un segmento en una relación fija*. (1) Otra deducción del principio de signos, que hemos de utilizar es la siguiente; si tenemos tres puntos o, A y B en una recta en la posición que indica la figura 3.ª, se tendrá evidentemente

$$AB = oB - oA$$

pero si el punto o se traslada á o' ú o'' se tendrá

$$AB = Ao' + o'B \qquad AB = Ao'' - Bo''$$

Se necesitan pues tres igualdades para hallar la distancia entre dos puntos valiéndose de un tercero, en los distintos casos que pueden ocurrir, pero si empleamos el principio de signos y contamos como positivas las distancias medidas en el sentido AB y como negativas las contrarias, la primera igualdad es suficiente, para todas las posiciones de o. Tenemos en efecto

$$AB = Ao' + o'B = o'B - o'A$$
$$AB = Ao'' - Bo'' = o''B - o''A$$

y así resulta en general que si tenemos tres puntos en una recta la distancia de dos de ellos (en un cierto sentido, marcado por el orden de enunciación) es igual á la diferencia entre el segmento que marca la distancia entre el tercero y el segundo punto nombrado al enunciar la recta y el correspondiente á la combinación del citado tercero con el otro. Así aunque se igno-

(1) Ya comprenderá el lector que enunciamos esta proposición y así lo haremos con frecuencia, en una forma abreviada propia de la concisión de lenguaje que se emplea en las matemáticas.

re la posición relativa de tres puntos $p. q. r.$ sobre una recta se tendrá siempre

$$pq=rq-rp. \qquad pr=qr-qp. \qquad qr=pr-pq.$$

Otras consecuencias importantes se deducen del principio de signos pero lo dicho es suficiente para poder entender las teorías que vamos á desarrollar.

CAPITULO PRIMERO

Relación anarmónica de cuatro puntos en línea recta y de cuatro rectas en haz.

§ 1.° ***Definición y notación de la relación anarmónica de cuatro puntos en línea recta.***

Si consideramos cuatro puntos en línea recta a, b, c, d, (fig. 4.ª) y hallamos la relación de distancias de dos de ellos á los otros dos, al cociente de estas dos relaciones se le llama relación anarmónica de los cuatro puntos. Así, por ejemplo, son relaciones anarmónicas las siguientes:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} \qquad\qquad \frac{bd}{bc} : \frac{ad}{ac} \ \&.$$

Para representarlas de un modo abreviado se escriben entre paréntisis las cuatro letras distintas que entran en la relación, en el siguiente orden; primero, letra que se repite en los dos términos de la relación dividendo, segundo, letra que figura en los dos términos del divisor, tercero, letra común á los numeradores de las dos relaciones y cuarto, letra repetida en los denominadores. Con este convenio la primera relación se escribe abreviadamente en esta forma $(a\ b\ c\ d)$ y la segunda de este modo $(b\ a\ d\ c)$. Inversamente se pasa de la notación abreviada á la relación anarmónica que representa, ligando la primera letra con la tercera y la cuarta y haciendo lo mismo con la segunda, restando solo dividir la relación de los dos primeros segmentos por la relación de los otros dos, así $(d\ b\ a\ c)$ es la escritura abreviada de la relación $\dfrac{da}{dc} : \dfrac{ba}{bc}$.

§ 2. ***Diversas relaciones anarmónicas de cuatro puntos y correlación entre ellas.***

Resulta de lo que llevamos dicho que habrá tantas relaciones anarmónicas como grupos en distintos órdenes pueden formarse con cuatro letras entrando todas sin repetición en cada grupo, puesto que á cualquiera agrupación que formemos corresponde una relación anarmónica de distinta forma que la relativa á otro grupo y á una relación anarmónica escrita corresponde un grupo único al expresarla en la notación abreviada. Ahora bien á este género de grupos que consideramos se les llama en álgebra permutaciones sin repetición y se demuestra que su número es igual al producto de la série natural de los números hasta el que representa el número de objetos. Resulta por lo tanto que el número de relaciones anarmónicas es $1, 2, 3, 4 = 24$. Veamos ahora las relaciones que entre ellas existen y para facilitar su escritura sigamos este orden: escribamos las cuatro a, b, c, d y liguemos cada una con otra de las que le siguen, de este modo obtendremos los seis grupos binarios

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd$$

invirtiendo el orden de las letras se obtienen otros seis

$$ba, ca, da, cb, db, dc$$

y si á la derecha de estos doce grupos escribimos las dos letras que en cada uno faltan, primero en orden alfabético y luego en orden contrario, como cada uno dará lugar á dos se obtendrán los veinticuatro grupos que se desean.

Fijémonos en particular en los que se deducen de los tres primeros de dos letras al colocar las dos restantes en orden alfabético en el primero y tercero y en orden contrario al natural en el segundo y llamemos desde luego á las relaciones anarmónicas que representan, *principales* (porque según vamos á ver todos se derivan de ellas) y representémoslas por m, n y p, se tendrá por consiguiente

$$(a\,b\,c\,d) = m \qquad (a\,c\,d\,b) = n \qquad (a\,d\,b\,c) = p$$

Escribamos ahora los veinticuatro grupos por el orden en que los hemos formado, y al desarrollarlos en relaciones anarmónicas se verá con facilidad que se verifican las igualdades

$$\begin{array}{llll}
(a\,b\,c\,d)=m & (b\,c\,a\,d)=p & (b\,a\,c\,d)=\frac{1}{m} & (c\,b\,a\,d)=\frac{1}{p} \\
(a\,b\,d\,c)=\frac{1}{m} & (b\,c\,d\,a)=\frac{1}{p} & (b\,a\,d\,c)=m & (c\,b\,d\,a)=p \\
(a\,c\,b\,d)=\frac{1}{n} & (b\,d\,a\,c)=\frac{1}{n} & (c\,a\,b\,d)=n & (d\,b\,a\,c)=n \\
(a\,c\,d\,b)=n & (b\,d\,c\,a)=n & (c\,a\,d\,b)=\frac{1}{n} & (d\,b\,c\,a)=\frac{1}{n} \\
(a\,d\,b\,c)=p & (c\,d\,a\,b)=m & (d\,a\,b\,c)=\frac{1}{p} & (d\,c\,a\,b)=\frac{1}{m} \\
(a\,d\,c\,b)=\frac{1}{p} & (c\,d\,b\,a)=\frac{1}{m} & (d\,a\,c\,b)=p & (d\,c\,b\,a)=m
\end{array}$$

Por consiguiente conocidas las tres principales todas las demás lo son tambien porque el cuadro anterior nos dice que ó son iguales ó recíprocas de dichas principales.

Pero no es esto solo, las mismas principales citadas están ligadas entre sí en tal forma que de una de ellas se deducen las otras dos, como vamos á ver.

Tenemos:

$$m=(a\,b\,c\,d)=\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{ac.\,bd}{ac.\,bc}$$

y del mismo modo

$$n=\frac{ad.\,cb}{ab.\,cd} \qquad p=\frac{ab.\,dc}{ac.\,db}$$

y si llamamos x, y, z á ab, ac y ad respectivamente y observamos que se verifica

$$bc=ac-ab=y-x. \quad bd=ad-ab=z-x. \quad cd=ad-ac=z-y$$

resultará

$$m=\frac{y\,(z-x)}{z\,(y-x)}. \quad n=\frac{z\,(y-x)}{x\,(y-z)}. \quad p=\frac{x\,(z-y)}{y\,(z-x)}.$$

Calculemos ahora $(1-m)$ y $(1-n)$

$$1-m=1-\frac{y\,(z-x)}{z\,(y-x)}=\frac{zy-zx-yz+xy}{z\,(y-x)}=\frac{x\,(y-z)}{z\,(y-x)}$$

$$1-n=1-\frac{z\,(y-x)}{x\,(y-z)}=\frac{xy-xz-zy+xz}{x\,(y-z)}=\frac{y\,(z-x)}{x\,(z-y)}$$

Vemos pues que los valores de $(1-m)$ y $(1-n)$ son respectivamente recíprocos de n y p. Se tiene por consiguiente

$$m \qquad n=\frac{1}{1-m} \qquad\qquad p=\frac{1}{1-n} \qquad (1)$$

para valores de las tres relaciones principales.

Dada una cualquiera de estas relaciones se pueden deducir las otras dos, así por ejemplo conocido el valor m de la primera, de la segunda se deduce n y de la tercera el de p. Solo se necesita en resúmen conocer una de las veinticuatro relaciones anarmónicas de cuatro puntos para llegar al conocimiento de todas.

Las tres relaciones (1) se transforman en las siguientes

$$m=1-\frac{1}{n} \qquad n=1-\frac{1}{p} \qquad p=1-\frac{1}{m} \qquad (2)$$

que se han obtenido, las dos primeras, encontrando en la segunda y tercera de las (1) los valores de m y n y la tercera sustituyendo en la última de las (1) el valor n de la segunda. Puestas bajo la forma (2) son muy fáciles de retener pues una vez escrita la primera, las otras dos se deducen sucesivamente sustituyendo á cada letra la que le sigue en el orden alfabético y á la última letra la primera, que es lo que se llama mutación circular; por ejemplo, sustituyendo en la primera igualdad m por n y n por p se deduce la segunda, y de esta se pasa á la tercera reemplazando n por p y p por m.

Es facil ver que las relaciones principales son siempre, dos positivas y una negativa, y las positivas una mayor y otra menor que la unidad.

En efecto, puestos bajo la forma (2) hagamos por ejemplo la hipótesis de ser m positivo y mayor que uno; la tercera igualdad hace ver que p es positivo y menor que uno y por consiguiente n negativo según se desprende de la segunda igualdad. De un modo análogo se analizarían las demás hipótesis que respecto á una cualquiera de las tres cantidades m, n y p se hiciesen.

Si se hace que los valores de las cantidades m, n y p dependan solo de una de ellas por ejemplo la m se obtiene.

$$m=m \qquad n=\frac{1}{1-m} \qquad p=\frac{m-1}{m}$$

y multiplicando estas igualdades miembro á miembro se deduce

$$m.n.p=-1$$

§ **3.** *Valores posibles de una relación anarmónica.*

Tratamos ahora de estudiar como varían los valores de la relación anarmónica al cambiar los puntos de posición en la recta y pudiendo hacer este estudio sobre una cualesquiera de las veinticuatro relaciones, elijamos por ejemplo la primera de las principales cuyo valor sabemos es

$$m=\frac{y\,(z-x)}{z\,(y-x)} \qquad (3)$$

Ante todo debemos observar que aún variando la posición relativa de los puntos en la recta se pueden encontrar valores convenientes de x y z que hagan que el valor de m sea constante, pues una vez fijo el primer miembro de la relación (3) hay infinitos valores de las incógnitas que hacen que el segundo miembro se iguale á aquel.

La relación anarmónica puede pasar por todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$ pues bastará darle á m el valor que se desée y encontrar valores convenientes de x y z (que son en número infinito) que satisfagan la relación (3).

En cuanto á los valores límites, se obtendrán del modo siguiente:

$$m=o\left\{\begin{array}{ll} y=o- & \text{El punto } c \text{ coincide con el } a \\ z=x- & \text{El punto } d \text{ coincide con el } b \end{array}\right.$$

$$m=\infty\left\{\begin{array}{ll} z=o- & \text{El punto } d \text{ coincide con el } a \\ y=x- & \text{El punto } c \text{ coincide con el } b \end{array}\right.$$

§ **4.** *Dados tres puntos en una recta determinar gráficamente en ella un cuarto punto conjugado con uno de los dados, conocida la relación anarmónica de los cuatro.*

El valor de m puede darse por la relación de dos rectas p y

q ó por un número, pero siempre podemos estar en el primer caso porque si por ejemplo $m = \frac{3}{4}$ se elegirá una longitud *arbitraria* como unidad y repetida tres y cuatro veces sucesivamente se obtendrán dos rectas p y q tales que la razón $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$ (si m fuese entero por ejemplo $m = 7$ se tendrá $m = \frac{7}{1}$ y procederíamos lo mismo).

Dicho esto consideraremos en las construcciones que vamos á efectuar que el valor de m se dá por la relación de dos rectas conocidas p y q y estudiaremos los cuatro casos de desconocer uno de los cuatro puntos a, b, c, d.

Determinación del punto b.—Trácese por el punto a una recta cualquiera y tómense sobre ella á partir de dicho punto dos $aP = p$ y $aQ = q$ (fig.ª 5, 6, 7) únase P con c y Q con d y por el punto H en que estas rectas se cortan trácese la Hb paralela á aP que determinará el punto b en su intersección con la recta dada. En efecto, los triángulos semejantes $d\,a\,Q$ y $d\,b\,H$ y tambien los $c\,a\,P$ y $c\,b\,H$ dan:

$$\frac{q}{bH} = \frac{ad}{bd}. \qquad \frac{p}{bH} = \frac{ac}{bc}$$

y dividiendo la segunda igualdad por la primera resulta

$$\frac{p}{q} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

Como comprenderá el lector las dos primeras figuras se refieren al caso de ser m positivo y sucesivamente mayor ó menor que la unidad y la tercera al de ser m negativo. El exámen de la construcción prueba claramente que m toma el valor cualitativo que se desea.

Determinación del punto c.—Se traza por a la misma recta que en el caso anterior, se une Q con d, se traza la bH y la unión de P con H determina c.

Determinación del punto d.—Se obtiene el punto H por medio de las rectas cP y bH y la QH proporciona el d.

Determinación del punto a.—Trazaremos por d (fig. 8) la recta dP (de dirección arbitraria) tomaremos las longitudes $dP=p$ y $dQ=q$ se unirá b con P y trazando la cH paralela á dP la QH determina el punto a.—En efecto los triángulos semejantes bdP y bcH y tambien adQ y acH dan:

$$\frac{p}{cH}=\frac{bd}{bc}. \qquad \frac{q}{cH}=\frac{ad}{ac}$$

y dividiendo la primera igualdad por la segunda se obtiene

$$\frac{p}{q}=\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$$

Si m fuese menor que la unidad ó fuese negativo se procede de un modo análogo, recordando lo que hicimos al tratar los demás casos.

§ 5. ***Propiedad proyectiva de la relación anarmónica de las divisiones de una recta y consiguiente relación geométricamente demostrada, entre puntos y haces de rectas.***

Se llaman propiedades proyectivas de las figuras aquellas que subsisten en las proyecciones y en este concepto vamos á demostrar que la relación anarmónica de cuatro puntos es proyectiva, esto es que dicha relación entre cuatro puntos es la misma que entre las proyecciones de dichos puntos.

Se sabe por la Geometría elemental lo que se entiende por proyección ortogonal ú oblícua, incluidas ambas en la denominación de proyección cilíndrica y ahora añadiremos que se llama proyección cónica, concurrente ó perspectiva de varios puntos las intersecciones con la línea ó plano de proyección de las rectas que unen un punto fijo con los que se desea proyectar.

Dicho lo anterior vamos á demostrar la propiedad enunciada, primero para la proyección cilíndrica y después para la cónica. (fig. 9).

La relación dada es

$$m=\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$$

y además se verifica en virtud de una propiedad conocida

$$\frac{ac}{a'c'}=\frac{ad}{a'd'}=\frac{bc}{b'c'}=\frac{bd}{b'd'}$$

pueden por consiguiente reemplazarse los segmentos que figuran en la relación anarmónica por sus proyecciones y se tendrá

$$\frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

Siendo la proyección ortogonal ú oblícua de una recta sobre un plano la misma que sobre la línea de proyección queda estendida la propiedad anterior para este caso.

Si se trata de la proyección cónica tambien la proposición es cierta. En efecto (fig. 10) sea o *el centro de proyección*, MN la línea del mismo nombre, AB la recta dada, cm y cn las perpendiculares bajadas desde c sobre oa' y ob', dp y dq las bajadas desde d sobre las mismas rectas y finalmente or la perpendicular bajada desde o sobre AB. Se verificarán las igualdades

$$ac.\ or = oa.\ cm$$
$$ad.\ or = oa.\ dp$$
$$bc.\ or = ob.\ cn$$
$$bd.\ or = ob.\ dq$$

puesto que lo mismo los primeros miembros que los segundos representan respectivamente los dobles de las áreas de los triángulos aoc, aod, boc y bod.

Dividiendo miembro á miembro las igualdades primera y segunda y las tercera y cuarta se obtiene

$$\frac{ac}{ad} = \frac{cm}{dp}. \qquad \frac{bc}{bd} = \frac{cn}{dq}$$

y por consiguiente

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{cm}{cn} : \frac{dp}{dq}$$

Se deduce de un modo análogo

$$\frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'} = \frac{c'm'}{c'n'} : \frac{d'p'}{d'q'}$$

Tambien se verifica

$$\frac{cm}{c'm'} = \frac{oc}{oc'}. \qquad \frac{cn}{c'n'} = \frac{oc}{oc'}$$

luego

$$\frac{cm}{cn} = \frac{c'm'}{c'n'}$$

por la misma razón

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d'p'}{d'q'}$$

y dividiendo miembro á miembro las dos últimas igualdades resulta

$$\frac{cm}{cn} : \frac{dp}{dq} = \frac{c'm'}{c'n'} : \frac{d'p'}{d'q'}$$

y como consecuencia

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}$$

lo que demuestra la proposición.

Podemos establecer como consecuencia de lo anterior que si tenemos cuatro rectas concurrentes y las cortamos por una transversal, la relación anarmónica de los puntos así determinados es independiente de la dirección de la secante; pues bien á la figura formada por cuatro rectas concurrentes se la llama haz de cuatro rectas, siendo estas sus rádios, el punto de concurso el vértice y la relación anarmónica de los cuatro puntos que determina una transversal *relación anarmónica del haz*.

Dado pues un haz de cuatro rectas puede facilmente determinarse su relación anarmónica y así mismo dados tres rádios y la relación citada determinar el cuarto rádio, pues bastará cortar el haz de tres rádios por una secante determinar el cuarto punto por los medios ya conocidos y unirlo con el vértice.

Debemos observar que si dos haces tienen los ángulos iguales son superponibles y tendrán por consiguiente la misma relación anarmónica, tal sucederá por ejemplo con los distintos haces obtenidos al unir un punto móvil sobre una circunferencia con cuatro fijos en ella puesto que los ángulos de los dichos haces son respectivamente iguales como inscriptos en el mismo segmento.

La relación anarmónica de un haz, es proyectiva sobre un plano porque (fig. 11) el dado y su proyección tienen por relación de esta clase la de los cuatro puntos a, b, c, d.

Para expresar de un modo abreviado la relación anarmónica de un haz, se usa la notación conocida para la de puntos, salvo el anteponer la letra del vértice, así por ejemplo se escribe $(o . a b c d)$.

CAPITULO II.

RELACIÓN ARMÓNICA DE CUATRO PUNTOS EN LÍNEA RECTA Y DE CUATRO RECTAS EN HAZ.

§ **6.** *Definición.*—Hemos dicho que la relación anarmónica de cuatro puntos puede pasar por todos los valores de la escala numérica y si en particular asignamos el valor -1 á la primera de las principales, se dice que la relación es armónica ó que los puntos están armónicamente situados.

Claro está que siendo la relación armónica un caso particular de la anarmónica participa de las propiedades generales ya establecidas y se podrán resolver los problemas que á su tiempo hemos considerado, pero se verifican además propiedades particulares que nos proponemos estudiar en el presente capítulo.

Siendo conocida la primera de las relaciones principales por ser $m=-1$, las otras dos tendran valores tambien fijos á saber:

$$n=\frac{1}{1-m}=\tfrac{1}{2} \qquad p=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

y cualesquiera de ellas expresará que los puntos ocupan posiciones armónicas.

§ **7.** ***Posición relativa de los puntos conjugados armónicamente.***

Sean a, b, c, d los cuatro puntos (fig. 12), por hipótesis se verifica

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=-1 \text{ ó bien } \frac{ac}{ad}=-\frac{bc}{bd} \quad (1)$$

Por de pronto observamos que la relación escrita exige que uno de los puntos sea interior al segmento cd y el otro exterior pues en otro caso no podrían ser las relaciones que figuran en los dos miembros de la igualdad (1) de signo contrario.

Tambien podemos deducir de la igualdad (1) cambiando los medios y alterando el orden de las letras (con lo cual cambiamos á la vez de signo los numeradores y denominadores)

$$\frac{ca}{cb}=-\frac{da}{db} \quad (1)$$

deduciendo como consecuencia que los puntos c y d desempeñan respecto al segmento ab el mismo papel que los a y b respecto á cd. La relación (1) traduce una propiedad que se suele expresar diciendo que los puntos a y b son *conjugados armónicos* con los c y d ó que el segmento cd *queda dividido armónicamente* por los puntos a y b, y por la (2) vemos que recíprocamente el segmento ab queda dividido armónicamente por los puntos c y d.

§ 8. ***Relación métrica de la mitad de un segmento armónicamente dividido por otros dos puntos.***

Llamemos a al valor absoluto de la mitad del segmento ab (que tomaremos con signo más ó menos según se cuente en el sentido ob ú oa) y x y x' las distancias del medio o del segmento (fig. 12) á los puntos c y d, tendremos

$$\begin{aligned} ac&=oc-oa=x+a \\ ad&=od-oa=x'+a \\ bc&=oc-ob=x-a \\ bd&=od-ob=x'-a \end{aligned}$$

y sustituyendo en la relación (1)

$$\frac{x+a}{x'+a}=-\frac{x-a}{x'-a}$$

y por consiguiente

$$xx'=a^2 \quad (3)$$

Deducimos pues que *cuando un segmento queda dividido armónicamente por dos puntos, la mitad de este segmento es media geométrica entre las distancias de su medio á dichos puntos* y pro cediendo en orden inverso se justifica tambien la recíproca de esta proposición.

La relación que acabamos de obtener demuestra que los dos puntos que dividen armónicamente á un segmento están hácia el mismo lado de su medio pues en otro caso no sería positivo el primer miembro de la relación (3) como lo es forzosamente el 2.°—Tambien comprueba la relación (3) que los puntos conjugados están uno en el interior y otro al exterior del segmento pues á $x \lessgtr a$ corresponde $x' \gtrless a$.

Es consecuencia tambien de la relación $xx' = a^2$ lo siguiente

$$\text{si } x = o \text{ será } x' = \infty$$
$$\text{» } x = \infty \text{ » } x' = o$$

es decir que el punto conjugado con el medio del segmento está en el infinito y recíprocamente.

§ 9. ***Dados tres puntos en línea recta determinar gráficamente el cuarto conjugado armónicamente con uno de ellos.***

Ya hemos dicho que se puede resolver este problema como lo hicimos al tratar de la relación anarmónica, pero en este caso hay procedimientos más sencillos,

Sean a, b, c los puntos dados (fig. 13) y queremos determinar el d. La distancia de este punto al o es una tercera proporcional entre a y x porque

$$x' = \frac{a^2}{x}$$

La construcción puede reducirse á la siguiente: levantemos en c la perpendicular cp á la ab, haciendo centro en o con un rádio a determinemos el punto p, unamos o con p y la perpendicular pd á la op determina el punto desconocido porque $\overline{op}^2 = oc.\, od$. Para determinar c se puede proceder así; descríbase sobre od una semicircunferencia trácese en ella la cuerda $op = a$ y la proyección del punto p sobre ab da el c que se busca.

§ 10. ***Propiedad proyectiva de la relación armónica.***

La relación armónica de cuatro puntos es proyectiva, puesto que ya se demostró esta propiedad para la anarmónica en general.

§ **11.** ***Haz armónico.***

Cuando la relación anarmónica de un haz de cuatro rectas es igual á -1 se le llama armónico, y por consiguiente si se corta un haz de esta clase por una transversal se obtiene un sistema de cuatro puntos armónicos.

§ **12.** ***Propiedades del haz armónico.***

Entre las varias propiedades de los haces armónicos citaremos las siguientes:

1.ª *Toda paralela á uno de los rádios de un haz armónico queda dividida por los otros tres en partes iguales.* En efecto (fig. 14) por ser el haz armónico los puntos a, b, c, ∞ son armónicos, luego b es medio de $o\,c$.

Recíprocamente.—Si *al cortar un haz por una secante paralela á uno de los rádios queda la transversal dividida por los otros tres en partes iguales, el haz es armónico* porque siendo el sistema $a\,b\,c\,\infty$ armónico tambien lo es el haz.

2.ª *Si en un haz armónico dos rádios se cortan perpendicularmente son bisectrices del ángulo de los otros dos y de su adyacente suplementario.* En efecto (fig. 15) la perpendicular á $o\,B$ es paralela á $o\,D$ y por la propiedad anterior $ab = bc$ y siendo iguales los triángulos rectángulos aob y boc, $o\,B$ es bisectriz de $A o C$ y por lo tanto $o\,D$ del suplemento.

3.ª *Los lados de un ángulo su bisectriz y la de su adyacente suplementario forman un haz armónico.* Porpue si trazamos una perpendicular á $o\,B$ (fig. 15) y paralela por lo tanto á $o\,D$, dicha perpendicular corta el haz en puntos a, b, c, ∞ armónicos (por ser b medio de $a\,c$) luego el haz es armónico. Dando cualquiera otra transversal una división armónica, caemos en la conocida propiedad de las bisectrices de los ángulos de un triángulo, si bien enunciada hasta aquí sin tener en cuenta los signos de las relaciones.

§ **13.** ***Determinación de un cuarto rádio de un haz armónico dados los otros tres.***

Bastará cortar el haz por una transversal determinar en esta un cuarto punto por los procedimientos conocidos y unirlo con el vértice del haz.

§ **14.** *Ejemplos de relaciones armónicas tomados de construcciones y propiedades geométricas.*

Varias son las construcciones geométricas que dan lugar á divisiones armónicas, por ejemplo, las siguientes:

1.ª Los extremos de un lado de un triángulo y los puntos en que las bisectrices de un ángulo opuesto y del exterior correspondiente encuentran á dicho lado, marcan una división armónica según hemos dicho.

2.ª Sea ABC un triángulo inscripto en una circunferencia (fig. 16) y ab un diámetro perpendicular al lado AB. Por ser el arco $aB = aA$ la recta aC es bisectriz del ángulo BCA exterior al triángulo cCd y su perpendicular bC del interior correspondiente luego $a\,c\,b\,d$ es una división armónica.

3.ª Si tenemos dos círculos ortogonales o y o' (fig. 17) y marcamos los puntos que se ven en dicha figura por ser recto el ángulo $o\,m\,o'$, $\overline{o\,m}^2 = o\,c\,.\,o\,d$ y $a\,c\,b\,d$ es una división armónica. Así mismo lo serían todas las análogas de los diámetros del círculo o que cortasen al o' y de los del círculo o' que cortasen al o.

4.ª Tracemos por un punto m de una circunferencia o (figura 18) la tangente $m\,d$, y la perpendicular $m\,c$ á un diámetro cualquiera $a\,b$, los puntos c y d de intersección de dichas rectas con el diámetro son conjugados armónicos con los extremos de este porque $\overline{o\,m}^2 = o\,c\,.\,o\,d$.

5.ª Sea $a\,b\,c\,d$ (fig. 19) un cuadrilátero cualquiera, prolonguemos los lados opuestos hasta que se corten en e y en f, tracemos la recta $e\,f$ y marquemos los puntos g y h intersecciones de las diagonales del cuadrilátero con dicha recta; decimos que el sistema $e\,g\,f\,h$ es armónico. En efecto si h no fuese el conjugado de g con relación á los e y f lo sería otro punto tal como h' y el haz $d\,e\,g\,f\,h'$ sería armónico y por lo tanto la división $k\,b\,o\,c$ resultado de cortar el citado haz por la transversal $k\,h$

será armónico. Por otra parte el haz $a\ e\ g\ f\ h'$ será tambien armónico y por consiguiente la división $b\ o\ c\ l$. La hipótesis pues de que el conjugado de g sea distinto de h nos lleva al absurdo de tener el punto o dos conjugados k y l respecto á $b\ c$. Tenemos pues en la construcción hecha un nuevo ejemplo de división armónica. (Más adelante al hablar del cuadrilátero completo, se estudia esta y otras propiedades de dicho cuadrilátero).

CAPITULO III.

Homografía é involución.

§ 15. *Igualdad de dos relaciones anarmónicas de sistemas de puntos y de haces de rectas.*

Supongamos que sobre dos rectas AB y $A'B'$ (fig. 20) elegimos dos puntos arbitrarios o y o' como orígenes para marcar distintos puntos sobre dichas rectas, una vez conocidas las distancias que los separan de los puntos fijos. Se comprende que si se establece una cierta relación entre las distancias que se toman en ambas rectas se podrá conseguir que á cada punto que en la primera se fige corresponda otro en la segunda y recíprocamente. Entre las distintas relaciones que podrían establecerse tiene especial importancia la que exige que las relaciones anarmónicas de cuatro puntos de la primera recta y de los homólogos de la segunda sean iguales. A los sistemas de puntos obtenidos en estas condiciones se les llama homográficos (si bien esta palabra tiene un sentido más general) y de su estudio nos vamos á ocupar en el presente capítulo.

Empezaremos por establecer que la homografía quedará perfectamente determinada (es decir que cada punto de una de las rectas solo tendrá un homólogo en la otra) si se dan tres pares de puntos en correspondencia, por ejemplo, a, b, c en la primera recta y respectivamente a', b', c' en la segunda. En efecto si d es un punto arbitrario de la primera recta tendrá que verificarse $(a\,b\,c\,d)=(a'\,b'\,c'\,d')$ y ya hemos visto que fijada una relación anarmónica y tres puntos el cuarto queda determinado. Además es fácil demostrar que elegidos cuatro puntos arbitrarios en una de las rectas y señalados los cuatro que se han obtenido como correspondientes en la otra sus relaciones anarmónicas son iguales. Para convencerse de esto basta colocar las dos rectas en ángulo de modo que se reunan en el vértice dos puntos correspondientes (fig. 21). Si se une el punto o intersección de bb' y cc' con los distintos puntos de una de las rectas, los rádios del haz así obtenido marcarán sobre la otra recta puntos homólogos de los de la primera, así al d corresponde el d' al e el e', &, y ahora se vé claramente que cada cuatro puntos de una recta y los correspondientes de la otra representan divisiones obtenidas cortando un mismo haz por dos transversales y tienen por consiguiente la misma relación anarmónica.

Del mismo modo que hemos establecido la homografía en dos séries de divisiones rectilíneas, se puede y es natural que se ocurra esta generalización establecer correspondencia análoga para los haces; pues si dadas dos divisiones homográficas $a\ b\ c\ d$......... y $a'\ b'\ c'\ d'$......... se unen dos puntos o y o' (figura 22) exteriores respectivamente á los dos sistemas con los distintos de cada uno se forman dos haces tales que la relación anarmónica de cada cuatro rádios de uno y de los correspondientes del otro son iguales y á los haces así obtenidos se les llama homográficos. Se comprende que la homografía quedará determinada conocidos tres pares de rádios homólogos porque para hallar el cuarto rádio de uno de ellos conjugado con un rádio del otro, basta cortar ambos haces por una secante que señale tres y cuatro puntos respectivamente y una vez encontrado el punto homólogo desconocido en las divisiones rectilíneas obtenidas su unión con el vértice dará el rádio que se busca.

§ 16. *Ecuación que expresa la homografía de las divisiones rectilíneas.*

Hemos visto que dados tres puntos de una de las rectas y los tres correspondientes de la otra se pueden obtener los puntos homólogos de otros que se asignen y se comprende por consiguiente la posibilidad de traducir esta correspondencia geométrica en una relación analítica entre las obscisas de los puntos correspondientes. Sean a b c tres puntos dados de una de las rectas, a' b' c' sus homólogos (fig. 23) o y o' dos orígenes arbitrarios x x' dos puntos homólogos cualesquiera.

Representemos por a, b, c, x las distancias oa, ob, oc y ox y de un modo análogo para las distancias de la segunda recta.

Siendo iguales las relaciones anarmónicas de cuatro puntos y sus homólogos se tendrá

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,x}{b\,x} = \frac{a'\,c'}{b'\,c'} : \frac{a'\,x'}{b'\,x'}$$

ó bien

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = \frac{c'-a'}{c'-b'} : \frac{x'-a'}{x'-b'}$$

Las fracciones dividendos de ambos miembros son cantidades fijas puesto que hacen referencia á los datos de la cuestión y llamándolas A y B, resulta

$$\frac{A\,(x-b)}{x-a} = \frac{A'(x'-b')}{x'-a'}$$

y por medio de sencillas transformaciones se llega á la siguiente ecuación

$$(A-A')xx' + (A'b'-Aa')x + (aA'-Ab)x' + Aba' - aA'b' = o$$

si dividimos por $(A-A')$ y representamos por M, N y P los coeficientes de las incógnitas y el término conocido se obtiene

$$xx' + Mx + Nx' + P = o$$

que es la *ecuación de homografía*.

Vemos que por médio de esta ecuación para cada valor de x se podrá obtener el correspondiente de x' ó inversamente, siempre que se conozcan M, N y P ya porque desde luego se les asignen valores ya porque se conozcan tres pares de puntos homólogos, como hemos hecho al determinarlos, pues todo se reduciría á escribir las relaciones que determinan dichos coeficientes en función de a, b, c, a', b', c', y que en el fondo no es otra cosa que la resolución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$aa'+Ma+Na'+P=o$$
$$bb'+Mb+Nb'+P=o$$
$$cc'+Mc+Nc'+P=o$$

que expresan que las abscisas de los puntos dados verifican la ecuación de homografía.

§ **17**. ***Significación geométrica de los coeficientes de la ecuación de homografía.***

Los coeficientes de la ecuación de homografía tienen una significación geométrica que es útil conocer.

Si buscamos el punto correspondiente al situado en el infinito en la primera recta, para lo cual haremos $x=\infty$ (dividiendo por x antes de hacer la hipótesis) resulta

$$x'+M=o$$

ó bien (llamando x'_∞ al correspondiente al infinito de la primera recta

$$M=-x'_\infty$$

De un modo análogo se obtiene para la hipótesis $x'=\infty$

$$N=-x_\infty$$

deduciéndose que *el coeficiente de cada incógnita representa la distancia al origen del punto conjugado del situado en el infinito en la recta en que figura el punto correspondiente á la incógnita.*

Si hacemos en la ecuación de homografía $x=o$ y representamos por x'_o el punto correspondiente se encuentra

$$N\,x'_o+P=o$$

ó lo que es lo mismo

$$P=-N\,x'_o$$

y sustituyendo en lugar de N su valor $-x_\infty$

$$P=x'_o\,x_\infty$$

Tambien se obtendría

$$P=x_o\,x'_\infty$$

mediante la hipótesis $x'=o$

Vemos que el término independiente P es igual *al producto de las abscisas del conjugado en una de las rectas con el origen de la otra y del conjugado en esta última con el infinito de la primera.*

§ **18.** *Ecuación que expresa la homografía de las haces.*

(Véase el apéndice).

§ **19.** *Construcción geométrica de dos divisiones homográficas dados tres pares de puntos homólogos.*

Sean a, b, c y a', b', c' (fig. 24) tres pares de puntos homólogos y vamos á encontrar el correspondiente á un punto cualquiera d; unamos a con a', b' y c', y a' con a, b, c y d prolonguemos la $m\,n$ que une las intersecciones ab' con $a'b$ y ac' con $a'c$, hasta que corte á la $a'd$ en p y uniendo a con p esta recta marcará el punto d' homólogo de d. Se tiene en efecto $(q\,m\,n\,p)$ $=(a'b'c'd')$; por estar cortado un mismo haz $a\,a'\,b'\,c'\,d'$ por dos transversales y tambien $(q\,m\,n\,p)=(a\,b\,c\,d)$ luego

$$(a\,b\,c\,d)=(a'\,b'\,c'\,d')$$

Para resolver el problema análogo á este en los haces homográficos córtense por transversales y aplíquese la construcción anterior.

§ **20.** *Puntos límites: su determinación.*

Al tratar de interpretar geométricamente los coeficientes de la ecuación de homografía, hemos visto que los de las incógnitas x y x' representan las abscisas de los puntos conjugados con los situados con el infinito, y á estos puntos que tienen una situación perfectamente determinada, se les llama *puntos límites*. Su situación en las rectas puede encontrarse tomando á partir del orígen (y en el sentido conveniente) tantas unidades (de la longitud convencional que se haya adoptado en el dibujo) como indican los números que expresan los coeficientes y en cuanto á la construcción geométrica, para determinarlos es análoga á la empleada para puntos cualesquiera, aunque naturalmente teniendo en cuenta que la recta que une un punto con otro situado en el infinito sobre una recta es la paralela á esta trazada por el primer punto. La figura 25 manifiesta claramente la construcción.

§ **21.** *Valor constante en dos séries homográficas del producto de las distancias de dos puntos conjugados cualesquiera á los puntos límites.*

La ecuación de homografía es

$$x x' + Mx + Nx' + P = o$$

á la que se le puede dar la forma

$$(x+N)(x'+M) = K$$

después de haber pasado P al segundo miembro, añadido á ambos la cantidad MN y representado la constante $MN-P$ por K.

Si en la última ecuación ponemos en vez de N y M sus valores resulta

$$(x - x_\infty)(x' - x_\infty) = K$$

Ahora bien, si en lugar de tomar dos orígenes arbitrarios como hemos hecho tomamos precisamente dos puntos conjugados *cualesquiera* la ecuación tendrá que verificarse para $x=o$ y $x'=o$ y tomará la forma

$$x_\infty \cdot x'_\infty = \text{constante}$$

pero entendiendo que al haber cambiado de orígen, las abscisas x_∞ y x'_∞ representan las distancias de los puntos límites á dos conjugados cualesquiera.

§ **22.** ***Séries semejantes, séries iguales.***

Recordemos que la ecuación de homografía, antes de dividirla por el coeficiente del primer término tiene la forma

$$L x x' + M x + N x' + P = o$$

Si consideramos el caso particular de ser $L=o$, se reduce á la siguiente

$$M x' + N x' + P = o$$

de donde

$$x = -\left(\frac{N}{M} x' + \frac{P}{M}\right) = -\frac{N}{M}\left(x' + \frac{P}{N}\right)$$

hagamos para abreviar

$$-\frac{N}{M} = K' \qquad \frac{P}{N} = -h$$

y se tendrá

$$x = K'(x' - h)$$

como para $x=o$ resulta $x'=h$ claro está que si tomamos como orígen del segundo sistema el punto homólogo del orígen del primero será $h=o$ y se tendrá

$$x=k\,x'$$

resultando, que al tomar como orígenes dos puntos conjugados se verifica la particularidad de que las abscisas de los distintos puntos homólogos son proporcionales y se dice que las divisiones *son semejantes*. En el caso particular de ser $K=1$, $x=x'$ y las divisiones *son iguales*.

Si en la ecuación $x=k\,x'$ hacemos $x=\infty$ resulta $x'=\infty$ luego los puntos en el infinito son homólogos, es decir que los puntos límites se han trasladado al infinito.

Es fácil ver que esta condición es suficiente para que las divisiones sean semejantes, pues teniendo que verificarse entónces la ecuación

$$L\,x\,x'+M\,x+N\,x'+P=o$$

pero $x=\infty$ $x'=\infty$, si se divide por $x\,x'$ resulta

$$L+\frac{M}{x'}+\frac{N}{x}+\frac{P}{xx'}=o$$

esto es

$$L=o$$

por ser nulos los otros términos, y ya se ha visto que en este caso las divisiones se hacen semejantes.

§ **23**. ***Posición relativa de los puntos de intersección de los rádios de dos haces homográficos que tienen un rádio común.***

Hemos indicado anteriormente el procedimiento para determinar rádios homólogos de dos haces homográficos, consistente en cortarlos por transversales pero se puede seguir un procedimiento muy cómodo fundándose en la siguiente proposición.

Si dos haces homográficos tienen un rádio común los puntos de intersección de los demás rádios homólogos están en línea recta.

Es evidente que bastará demostrar la proposición para dos haces de cuatro rádios que tengan la misma relación anarmónica. Sean estos $o\,A\,B\,C\,D$ y $o'\,A'\,B'\,C'\,D'$ (fig. 26).

Tracemos la recta $m\,n$ que une los puntos de intersección de $o\,B$ con $o'\,B'$ y $o\,C$ con $o'\,C'$ y decimos que esta recta pasa por

p. En efecto si cortase à la $o' D'$ en un punto p' distinto de p la relación anarmónica del haz o' sería $(q\ m\ n\ p')$ y la del o otra distinta lo que es absurdo.

Demostrada esta proposición, se comprende que para hallar rádios homólogos de otros en dos haces homográficos, bastará hacer que ambos haces tengan un rádio homólogo común y aplicar la propiedad establecida.

§ **24.** ***Puntos dobles sobre una misma recta: su posición respecto al punto central.***

Hemos considerado hasta aquí las divisiones homográficas en dos rectas distintas, pero se comprende que no hay inconveniente en llevar una de las rectas sobre la otra y considerar en la única que así resulta dos divisiones que llamaremos para distinguirlas primera y segunda división, primera por ejemplo la que tiene las letras no acentuadas y segunda la otra, podemos referir cada una de ellas á su correspondiente orígen, pero es más natural y cómodo tomar un solo orígen para referir á él las abscisas correspondientes á los distintos puntos.

Todo lo que hemos dicho respecto á divisiones homográficas en rectas no coincidentes subsiste en el caso que ahora tratamos y la ecuación de homografía es la misma; debemos no obstante observar que para las construcciones geométricas de determinación de puntos será necesario separar las dos rectas (siendo cómodo hacerlo trasladándola paralelamente á sí misma) y luego referir el resultado á la recta única. Una particularidad se podrá presentar al considerar las divisiones sobre una misma recta y es el que un punto coincida con su homólogo obteniéndose entónces lo que se llama un punto doble, de cuya determinación vamos á ocuparnos.

Siendo uno solo el orígen de las dos divisiones, resultará un punto doble cuando las abscisas de dos puntos homólogos sean iguales; si pues en la ecuación de homografía hacemos $x'=x$ las raices de la ecuación que resulta

$$x^2+(M+N)x+P=o$$

marcarán puntos dobles, efectivos si son reales dichas raices y por generalización se dice en otro caso que los puntos dobles son imaginarios.

Como podemos elegir cualquier orígen, tomaremos aquel que dé á la ecuación la forma más sencilla y en este concepto podemos observar que si lo tomásemos en el medio de la distancia entre los puntos límites (al que se llama *punto central)* se verificará $x_\infty = -x'_\infty$ ó bien $M = -N$ y la ecuación se reduce si continuamos representando por P el término independiente á

$$x^2 + P = o$$

de dónde

$$x = \pm\sqrt{P} = \pm\sqrt{-x'_0 x_\infty}$$

Los valores de x nos demuestran (á causa del doble signo) que los puntos dobles están á igual distancia del punto central y á distinto lado y equidistantes tambien por consiguiente de los puntos límites.

Para que los puntos dobles sean reales es preciso que P sea positivo ó lo que es lo mismo que x'_0 y x_∞ tengan signos contrarios, es decir que el punto conjugado con el orígen considerado como de la primera división y el conjugado con el infinito de la segunda resulten á distinto lado del punto central. Si á P se le hubiese dado la forma $P = -x_0 x'_\infty$ se deduciría una consecuencia parecida, pues solo habría que cambiar la palabra primera recta por segunda é inversamente.

El procedimiento numérico para la determinación de los puntos dobles (cuando son reales) se reduce pues á la extracción de una raíz cuadrada y en cuanto al geométrico vamos á explicarlo (fig. 27):

AB es la recta que contiene las dos divisiones pero hemos proyectado oblícuamente tres puntos de la segunda división sobre una recta $A''B''$ paralela á AB, después hemos determinado la recta de homología mn entendiendo por tal á la que contiene las intersecciones de rádios homólogos, los puntos límites sobre AB y $A''B''$ estarán evidentemente en las intersecciones x_∞ y x''_∞ de la recta de homología con AB y $A''B''$ (pues las paralelas que para su determinación habría que trazar se confunden en este caso con dichas rectas). Seguidamente se ha llevado el punto x''_∞ sobre la recta AB á x_∞. Determinado el orígen o sobre AB equidistante de los puntos límites hemos encontrado su homólogo x''_o y se ha referido á la recta dada. Resta únicamente hallar una media proporcional entre x_∞ y x'_o, lo que se consigue describiendo sobre la recta que une estos puntos una semicircunferencia y la perpendicular oD al diámetro es la media proporcional, que en la figura se ha marcado á ambos lados de o en d y d', para señalar los puntos dobles.

Estos puntos que acabamos de determinar y lo mismo los puntos límites marcan variaciones críticas en la situación relativa de un punto y su conjugado. Observemos en efecto, que siendo la ecuación de homografía una función contínua de las variables x y x' al variar una de estas de un modo contínuo la otra tiene que variar del mismo modo, es decir que si el punto a toma dos posiciones sumamente próximas las de su conjugado a' muy próximas serán tambien y como consecuencia si el punto a está detrás dal a' solo podrá pasar delante de dos modos; ó pasando antes por la posición de los puntos dobles, ó llegando á pasar por la de los puntos límites, en cuyo caso el conjugado se traslada al infinito.

Claro está que si los puntos dobles son imaginarios solo los puntos límites marcan el tránsito para el cambio de signo del segmento que une un punto con su conjugado.

§ **25.** ***Haces homográficos que tienen el vértice común rádios dobles.***

Si dados dos haces homográficos se hacen coincidir sus vértices, puede ocurrir que dos rádios homólogos coincidan obteniéndose lo que se llama un rádio doble; para su determinación basta cortarlos por una transversal y unir los puntos dobles, si existen, con el vértice.

§ **26.** ***Involución. Su definición: consiguiente coincidencia de los puntos límites en el centro de involución.***

Si consideramos dos divisiones homográficas en una misma recta, claro está que en cualquier punto de ella en que nos fijemos podemos considerar dos en coincidencia (uno de cada sistema) por ejemplo (fig. 28) a y b'; si por medio de la ecuación de homografía hallamos el conjugado a' del a y tambien el b correspondiente al b', lo general será que estos puntos a' y b no coincidan pues sus abscisas son

$$a' = -\frac{P + aM}{a + N} \qquad b = -\frac{P + aN}{a + M}$$

que se han obtenido haciendo en la ecuación de homografía primero $x = a$ para determinar a' y despues $x' = a$ tambien, para determinar b puesto que por hipótesis los puntos a y b' están á la misma distancia del orígen.

Los valores formulares de a' y b manifiestan claramente que si $M = N$ hubiesen resultado iguales y por consiguiente á dos puntos coincidentes (uno de cada división) resultarían otros conjugados tambien coincidentes. Nos encontramos pues en un caso particular de la homografía al que se llama *involución* y que definiremos de este modo: *se dice que dos sistemas homográficos de puntos en línea recta están en involución cuando el conjugado de un punto ya sea del primero ó del segundo sistema resulta en la misma situación en la recta.*

Si bien acabamos de ver que la condición $M = N$ *es suficiente* para que dos sistemas homográficos estén en involución, necesitamos demostrar que *es tambien necesaria* y para conseguirlo observemos que la hipótesis de involución exige que si $x = a$ y $x' = a'$ verifican la ecuación homográfica, tambien la verificarán recíprocamente $x = a'$ y $x' = a$; se deberá tener por consiguiente

$$aa' + Ma + Na' + P = o$$
$$aa' + Ma' + Na + P = o$$

y restando miembro á miembro

$$(M - N)(a - a') = o$$

y como a y a' no son en general iguales por ser abscisas de puntos distintos, tendrá que verificarse como condición *necesaria y suficiente*

$$M = N$$

y la ecuación de involución será

$$xx'+M(x+x')+P=o$$

Observemos que $M=N$ equivale á $x_{\infty}=x'_{\infty}$ es decir que los puntos límites coinciden, como se pudo ver á priori pues siendo los puntos en el infinito coincidentes un solo punto debe ser el conjugado de ambos.

Al punto en el que coinciden en la involución los puntos límites se le llama *centro de involución*.

§ **27.** ***Valor constante del producto de las distancias de los puntos conjugados al centro de involución.***

Si en lugar de tomar un orígen cualquiera como hemos hecho lo tomamos en el centro de involución la cantidad M (distancia del centro al orígen) se convierte en cero y la P que es constante tomará un valor distinto pero tambien constante que podemos representar por $-K$ y la ecuación de involución se reduce á

$$xx'=K$$

siendo x y x' las distancias de dos puntos conjugados cualesquiera al centro de involución.

La ecuación que acabamos de obtener demuestra que si $K>o$ los puntos conjugados quedan al mismo lado del centro de involución y á distinto si $K<o$ y tambien que á $x=o$ corresponde $x'=\infty$.

§ **28.** ***Puntos dobles.***

Como en la homografía, existirán en la involución dos puntos dobles reales ó imaginarios, pues la hipótesis $x=x'$ da

$$x^2=K \qquad x=\pm\sqrt{K}$$

Si K es positivo, es decir si dos puntos conjugados están al mismo lado del centro de involución los puntos dobles son reales é imaginarios en otro caso.

§ **29.** ***División armónica del segmento de los puntos dobles por dos conjugados cualesquiera.***

Sean a y a' dos puntos conjugados cualesquiera (fig. 29) y

d y d' los puntos dobles. En virtud de la ecuación de involución se verifica

$$a\,a'=K \qquad d^2=K$$

luego

$$d^2=a\,a'$$

que demuestra que el segmento dd' queda armónicamente dividido por los puntos conjugados a y a'.

§ **30.** *Haces en involución: su reducción á las séries de puntos en involución.*

Si consideramos dos haces homográficos con el vértice común podemos considerar en cada rádio dos en coincidencia, uno de cada sistema; pues bien, si al hallar el conjugado de un rádio ya se considere como de uno ú otro sistema resultan los conjugados coincidentes, se dice que los haces están en involución.

Es claro que si cortamos dos haces en involución por una transversal las séries homográficas que resultan gozarán de la propiedad de la involución y por consiguiente el estudio de estos haces se reduce en último término al de séries rectilíneas.

El rádio que va a parar al centro de involución toma el nombre de eje de involución.

§ **31.** *Construcciones geométricas de puntos en involución.*

Ante todo debemos observar que así como la homografía necesitaba tres condiciones para su determinación, la involución solo necesita dos, pues así lo hace ver la ecuación en la que solo aparecen dos coeficientes. Cuando se usa la ecuación bajo la forma $xx'=K$, si bien hay una constante se supone conocido el centro de involución y se necesitan por consiguiente dos condiciones tambien.

Vamos á resolver geométricamente algunos problemas relativos á la involución ya que el procedimiento numérico queda reducido al empleo de sencillas fórmulas que claramente indican el modo de proceder en cada caso.

Dados dos pares de puntos conjugados encontrar el centro de involución:

Primer caso.—Que los segmentos formados por las rectas que unen puntos conjugados no tengan parte común ó que el uno contenga al otro. (fig.ª 30 y 31).

Se hace pasar una circunferencia cualquiera por aa' y otra por bb' pero obligándolas á cortarse (esto se consigue siempre haciendo pasar ambas por un punto exterior á la recta), la cuerda común mn prolongada determina el centro Y de involución porque

$$Ym.Yn = Ya.Ya' \qquad Ym.Yn = Yb.Yb'$$

y por lo tanto

$$Ya.Ya' = Yb.Yb'$$

Segundo caso.—Que los segmentos se crucen (fig. 32). La construcción es análoga á la anterior y basta examinar la figura para comprenderla.

Dados dos pares de puntos conjugados determinar el homólogo del otro.

Pueden ocurrir los mismos casos que en el problema anterior y la construcción se reduce á determinar el centro de involución y hacer pasar una circunferencia por la cuerda común y el punto dado; la segunda intersección de la circunferencia y la recta dada determina el punto desconocido.

Dados dos pares de puntos conjugados determinar los puntos dobles.

Primer caso.—Segmentos exteriores ó que el uno contenga al otro.

Hágase pasar una circunferencia por mn tangente á la recta dada, el punto de tangencia d será doble porque se verifica.

$$Yd^2 = Ya.Ya' = Yb.Yb'$$

La otra circunferencia tangente determina el segundo punto doble, pero es más sencillo buscar el simétrico de d respecto á Y.

Segundo caso.—Los segmentos se cruzan. A priori se sabe la imposibilidad de encontrar puntos dobles y la construcción geométrica lo comprueba porque estando m y n (fig. 32) a distinta región de la recta no puede trazarse la circunferencia tangente.

Dado el centro de involución y un par de puntos conjugados a y a' encontrar otro par de puntos tambien conjugados ó el homólogo de uno dado.

Hágase pasar una circunferencia por $a\,a'$ (fig.s 31 y 32), trácese la secante $Y\,m\,n$ y cualquiera circunferencia que pase por $m\,n$ y corte á la recta señala un par de puntos homólogos, si además se le obliga á pasar por un punto dado resulta el correspondiente á este. Si la circunferencia ultimamente trazada es tangente á la recta se obtiene un punto doble.

Marcar sobre una recta un sistema de puntos en involución.

Sea AB la recta (fig. 33), fíjese en ella un punto Y como centro, trácese una recta cualquiera por este punto, y tomando sobre ella dos m y n (que pudieran elegirse á distinto lado de Y), es evidente que todas las circunferencias que tengan $m\,n$ por cuerda y corten á AB marcan puntos en involución.

FIN

NOTA 1.ª (a)

Ecuación que expresa la homografía de los haces.

Hemos visto (fig. 34) que la relación anarmónica de un haz $o\,A\,B\,C\,D$ ó sea

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

es igual á $\dfrac{cm}{cn} : \dfrac{dp}{dq}$

pero tenemos

$$\frac{cm}{cn} : \frac{dp}{dq} = \frac{\dfrac{cm}{oc}}{\dfrac{cn}{oc}} : \frac{\dfrac{dp}{od}}{\dfrac{dq}{od}}$$

y como las relaciones $\dfrac{cm}{oc} : \dfrac{cn}{oc}$ & marcan los senos de los ángulos $A\,o\,C$, $A\,o\,D$ & resulta

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{sen.\ AoC}{sed.\ AoD} : \frac{sen.\ BoC}{sen.\ BoD}$$

esto es que la relación anarmónica de un haz es la misma que la de los senos de los ángulos del haz respectivamente opuestos á los segmentos que se toman al escribir la dicha relación.

(a) Escribimos esta primera nota por si algún lector quiere estudiar lo que en ella tratamos, y que no hemos incluido en el texto por no pedir este punto el programa de la Escuela General Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, y requerir además algunas nociones de trigonometría. Como los problemas relativos á haces homográficos se reducen en último término á los correspondientes á séries rectilíneas, no se hace necesario este estudio directo.

Dicho esto vamos á tratar de encontrar una relación que nos permita dados tres rádios de un haz y los tres conjugados da otro homográfico, encontrar un cuarto rádio homólogo de uno conocido.

Así como en las divisiones rectilíneas, tomábamos un punto coma orígen para referir á él las distancias de los distintos puntos de la recta, en lo relativo á haces la analogía nos lleva á tomar un rádio como orígen y situar los demás rádios por el ángulo que con este forman. Esto sentado sean $oA, oB, oC, oA', oB', oC'$ (fig.ª 35 y 36) tres pares de rádios homólogos de dos haces homográficos, oM y $o'M'$ los orígenes angulares y se desea encontrar un rádio $o'X'$ del segundo haz correspondiente al oX del primero.

Llamemos A, B, C &c los ángulos que oA, oB, oC, &c forman con el orígen.

Tendremos

$$\frac{sen.\ AoC}{sen.\ BoC} : \frac{sen.\ AoX}{sen.\ BoX} = \frac{sen.\ A'o'C'}{sen.\ B'o'C'} : \frac{sen.\ A'o'X'}{sen.\ B'o'X'}$$

siendo constantes las relaciones $\frac{sen.\ AoC}{sen.\ BoC}$ y $\frac{sen.\ A'o'C'}{sen.\ B'o'C'}$ podemos representarlas por M y N y se tendrá, observando que

$$AoX = X - A \qquad BoX = X - B \ \&c$$

$$M : \frac{sen.\ (X-A)}{sen.\ (X-B)} = N : \frac{sen.\ (X'-A')}{sen.\ (X'-B')}$$

ó bien

$$M\, sen.\ (X-B)\ sen.\ (X'-A') = N\, sen.\ (X'-B')\ sen.\ (X-A)$$

y desarrollando los senos

$$M\ (cos\ B\ sen\ X - sen\ B\ cos\ X)\ (cos\ A'\ sen\ X' - sen\ A'\ cos\ X') =$$
$$N\ (cos\ B'\ sen\ X' - sen\ B'\ cos\ X')\ (cos\ A\ sen\ X - sen\ A\ cos\ X)$$

Dividiendo ambos miembros por $cos\ X\ cos\ X'$ resulta

$$M\ (cos\ B\ tg\ X - sen\ B)\ (cos\ A'\ tg\ X' - sen\ A') = N\ (cos\ B'\ tg\ X' - sen\ B')\ (cos\ A\ tg\ X - sen\ A)$$

Haciendo los productos indicados y ordenando se obtiene

$$(M \cos B \cos A' - N \cos A \cos B') \operatorname{tg} X \operatorname{tg} X' + (N \cos A \operatorname{sen} B' - M \cos B \operatorname{sen} A') \operatorname{tg} X + (N \operatorname{sen} A \cos B' - M \operatorname{sen} B \cos A') \operatorname{tg} X' + (M \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A' - N \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B') = o$$

y llamando Q, R, S, T los coeficientes de las incógnitas y término independiente que son constantes por referirse á los datos se obtiene

$$Q \operatorname{tg} X \operatorname{tg} X' + R \operatorname{tg} X + S \operatorname{tg} X' + T = o$$

Dividiendo por Q y llamando á los nuevos coeficientes M, N y P resulta finalmente

$$\operatorname{tg} X \operatorname{tg} X' + M \operatorname{tg} X + N \operatorname{tg} X' + P = o$$

que es la ecuación de homografía, por medio de la cual una vez conocidos los coeficientes, se podrá determinar el valor de X' correspondiente á X ó al contrario.

Haces en involución.

Los mismos razonamientos hechos en las divisiones rectilíneas nos conducirían á establecer que la condición necesaria y suficiente para que los haces estén en involución es que $M = N$ y la ecuación será en este caso

$$\operatorname{tg} X \operatorname{tg} X' + M (\operatorname{tg} X + \operatorname{tg} X') + P = o$$

NOTA 2.ª (a)

RELACIÓN ANARMÓNICA DE CUATRO PLANOS.—SU PROPIEDAD PROYECTIVA Y CONSIGUIENTE REDUCCIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LOS HACES DE PLANOS Á LOS HACES DE RECTAS Y SÉRIES DE PUNTOS EN SU HOMOGRAFÍA É INVOLUCIÓN.

Si consideramos cuatro planos A, B, C, D (fig. 37) que pasan por una misma recta MN, se verifica la propiedad de que si se cortan por un plano secante no paralelo á la intersección, la relación anarmónica del haz que evidentemente se obtiene es fija cualquiera que sea el plano transversal que se considere. Porque en efecto, si consideramos por ejemplo los dos planos aod y $ao'd$ cuya intersección es PQ, es evidente que las rectas oa, ob, oc, od por una parte y $o'a$, $o'b$, $o'c$ y $o'd$ por otra, se van cortando sobre las intersecciones de los planos de los haces que forman dichas rectas y por lo tanto la relación anarmónica de uno y otro es $(a.b.c.d)$. A este valor fijo que obtenemos se llama *relación anarmónica de los cuatro planos*.

Tambien podemos observar que si cortamos los cuatro planos dados por una recta PQ, como la relación anarmónica de los puntos a, b, c, d que así se obtienen es la misma que la del haz que resultaría haciendo pasar un plano por PQ y un punto de MN y esta ùltima es fija, tambien lo es la otra. Puede pues decirse tambien que la relación anarmónica de cuatro planos es

(a) Esta segunda nota la pide el programa de ingenieros pero no la hemos incluido en el texto por seguir el orden de dicho programa.

la de los cuatro puntos obtenidos cortándolos por una recta cualquiera.

Quedan pues reducidas las propiedades de los haces de planos á los de rectas y séries de puntos, lo que permite generalizar para las primeras todo lo dicho respecto á relaciones armónicas, homografía é involución.

INDICE

Párrafos

CAPITULO III.