Sobre un problema de Física.

POR

JUAN JACOBO DURÁN-LORIGA

Comandante de Artillería, Miembro Corresponsal de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.—Noviembre de 1909.

Establecimiento Tipográfico.
Pontejos, 8.—Madrid, 1909.

Sobre un problema de Física (*).

POR JUAN JACOBO DURÁN-LORIGA.

Comandante de Artillería, Miembro Corresponsal de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

Consideremos tres focos luminosos, de igual intensidad, colocados en los vértices A, B y C de un triángulo equilátero, y otro de *intensidad suma*, situado en su centro O. La cuestión que nos proponemos estudiar es:

Encontrar los puntos del plano igualmente iluminados por los tres primeros que por el cuarto.

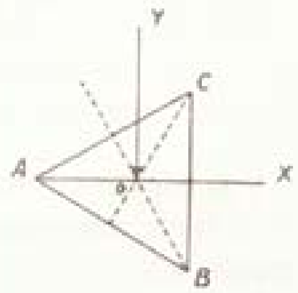

Figura 1.ª

También puede considerarse esta investigación como un problema de *atracción*, según la ley de Newton, y, en fin, si se la quiere revestir de un ropaje completamente geométrico, puede enunciarse así:

Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano de un triángulo equilátero, tales, que el cuadrado del vector dirigido á su centro sea media armónica de los cuadrados de los vectores relativos á sus vértices.

La ecuación que plantea el problema será, evidentemente, la siguiente:

(*) Esta cuestión me fué sugerida por una pregunta de mi hija Pilar, relativa al asunto, no presumiendo que la respuesta ocasionase tantos cálculos.

La presente Memoria ha sido enviada á la Academia, en cumplimiento de un precepto reglamentario, que atañe á los deberes de los Correspondientes nacionales, los cuales han de presentar, cada dos años, un trabajo original.

$$\frac{3}{x^2+y^2}=\frac{1}{\left(x+\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2}+$$

$$+\frac{1}{\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+(y+a)^2}+\frac{1}{\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+(y-a)^2}$$

habiendo representado por $2a$ el lado del triángulo y elegido los ejes que aparecen en la figura 1.ª

Haciendo operaciones se llega á la siguiente ecuación:

$$3\,(x^2+y^2)^2-4a\sqrt{3}\,x\,(x^2-3\,y^2)+4\,a^2\,(x^2+y^2)-$$
$$-\frac{16\,a^4}{3}=0.$$

Y si para evitar irracionales se pone en función del radio R de la circunferencia circunscripta al triángulo, resulta, en definitiva,

$$(x^2+y^2)^2-2Rx(x^2-3y^2)+R^2(x^2+y^2)-R^4=0\ldots..\ (1)$$

Se trata, pues, de *una cuártica* cuyos puntos en el infinito son evidentemente los *puntos cíclicos* y la curva es bitangente á la *recta del infinito* en dichos puntos. Se deduce del propio enunciado del problema (y la ecuación en coordenadas polares lo justificará) que las alturas del triángulo son *ejes ternarios* de simetría. Esto permite establecer *à priori* que la curva no puede tener *puntos dobles*, propiamente dichos, ni de *retroceso*.

En efecto, es sabido que una cuártica no puede tener más que tres puntos dobles sin descomponerse en curvas de grado inferior. Caso, pues, de tenerlos, sería sobre los ejes de simetría; es decir, en los vértices, pues si los tuviese en otros puntos, la triple simetría exigiría que la existencia de uno trajese consigo la de otros cinco. Ahora bien; los vértices no lo son, porque la intersección de la curva con el eje de las x da los cuatro puntos *simples*, que tienen las siguientes abscisas:

$$x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \quad » \quad x_2 = -\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$
$$» \quad x_3 = \frac{R}{2}(1+\sqrt{-3}) \quad » \quad x_4 = \frac{R}{2}(1-\sqrt{-3})$$

reales los dos primeros é imaginarios los otros dos, siendo muy digno de notarse que las abscisas de los puntos reales son los lados de los decágonos estrellado y convexo, correspondientes á la circunferencia circunscrita al triángulo, lo que permite su inmediata determinación por medio de la regla y el compás.

La fórmula de Plücker

$$c = m(m-1) - 2d - 3r,$$

nos da, por consiguiente,

$$c = 12.$$

Así como la

$$i = 3m(m-2) - 6d - 8r$$

establece que $i = 24$, es decir que tiene la curva 24 puntos de inflexión.

Llevando estos datos á la tercera fórmula

$$m = c(c-1) - 2t - 3i,$$

resulta que el número de tangentes dobles es 28, de ellas 4 reales, como se ve claramente en la figura 2.ª, y, por consiguiente, 24 imaginarias.

Resumiendo, resulta para lo que pudiéramos llamar la *filiación* de la curva:

Cuártica de clase 12 y género 3, bitangente á la recta del infinito con 24 puntos de inflexión y 28 tangentes dobles y presentando tres ejes de simetria. Claro está, que aunque citamos todas las circunstancias, algunas son forzosa consecuencia de otras, en virtud de las fórmulas de Plücker.

Si queremos comprobar que la curva es de clase 12, vamos á ver las tangentes que se le pueden trazar por un punto, que por comedidad elegiremos en el infinito sobre el eje de las y. Sabido es que los puntos de contacto de estas tangentes, estarán en la intersección de la curva con la *primera polar* del punto en cuestión, que tiene por ecuación (tomando el radio por unidad):

$$f'_y = 4y^3 + 4x^2y + 12xy + 2y = 0$$

que se descompone en las dos siguientes:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2y^2 + 2x^2 + 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

la intersección de la cuártica con la $y = 0$ (es decir, el eje de las x) da los cuatro puntos que ya anteriormente hemos considerado, y las otras tangentes paralelas al eje de ordenadas, tendrán los puntos de contacto en la intersección de la segunda linea, que se ve es una circunferencia, con la curva propuesta. Pero las abscisas de estos puntos son las raices de la ecuación de cuarto grado.

$$0x^4 + 32x^3 + 36x^2 + 12x + 5 = 0$$

una de ellas infinita, como debia suceder, pues no debe olvidarse que la curva es bitangente á la recta del infinito, y las otras responden á la ecuación de tercer grado

$$32\,x^3 + 36\,x^2 + 12\,x + 5 = 0.$$

Esta ecuación tiene una raíz real y dos imaginarias, pues la expresión $4\,p^3 + 27\,q^2$ aplicada á la ecuación transformada, que es

$$z^3 - 3\,z + 62 = 0$$

da un resultado positivo.

La raíz real tiene por valor:

$$x = \frac{1}{8}\left[\sqrt[3]{-31 + \sqrt{31^2 - 1}} + \sqrt[3]{-31 - \sqrt{31^2 - 1}} - 3\right]$$

á cada una de estas abscisas corresponden *dos* puntos de contacto (respondiendo á las tangentes dobles), cuyas ordenadas se obtendrían por medio de la ecuación

$$2\,y^2 + 2\,x^2 + 6\,x + 1 = 0.$$

Resulta, pues, que hay *cuatro* puntos de contacto sobre el eje de las x, *seis*, simétricamente colocados respecto al de las y, y por último, *los dos puntos cíclicos;* es decir, en total 12, que es lo que corresponde á la clase de la curva.

El círculo que hemos considerado, y que por la intersección de su circunferencia con la curva da los puntos de contacto de las tangentes dobles, paralelas al eje de las y (una real y dos imaginarias), tiene por centro el punto cuyas coordenadas son:

$$x = -\frac{3\,R}{2} \qquad y = 0$$

y su radio tiene por valor:

$$\rho = \frac{R\sqrt{7}}{2}.$$

Tratemos de encontrar la *ecuación polar* de la curva, tomando como eje polar el de las x, y por polo el anterior origen, haremos pues,

$$x = \rho \cos \omega \qquad » \qquad y = \rho \operatorname{sen} \omega$$

y resulta:

$$3\rho^4 - 6R\rho^3 \cos^3\omega + 18R\rho^3 \cos\omega \operatorname{sen}^2\omega + 3R^2\rho^2 - 3R^4 = 0$$

ó bien

$$\rho^4 - 2R\rho^3\cos^3\omega + 6R\rho^3\cos\omega(1 - \cos^2\omega) + R^2\rho^2 - R^4 = 0$$

de la que se deduce:

$$\rho^4 - 2R\rho^3(4\cos^3\omega - 3\cos\omega) + R^2\rho^2 - R^4 = 0$$

ó finalmente:

$$\rho^4 - 2R\rho^3\cos 3\omega + R^2\rho^2 - R^4 = 0. \qquad (2)$$

Esta ecuación demuestra, como ya habíamos anunciado al principio, la triple simetría de la curva, pues su ecuación polar no cambia poniendo en lugar de ω, $\omega + \frac{2\pi}{3}$ y además entra el coseno.

También nos permite la ecuación (2) observar que, puesto que queda verificado para el valor $\rho = R$ (radio del círculo circunscripto) y los valores de ω, $20^0 - 100^\circ - 140^\circ - 220^\circ - 260^\circ - 340^\circ$, podemos obtener inmediatamente *seis* puntos sobre la circunferencia circunscripta; pero nótese que no es construcción exacta por la *geometría canónica de la regla y el compás*, pues, p. e., el formar un ángulo de 20° no es factible exactamente, y la división que marca el transportador es, *aún teóricamente*, aproximada (*). No debe sorprendernos el encontrar la mayor parte de los puntos de la curva, no construibles por la *geometría elemental*, pues el examen de la ecuación polar hace ver que lleva fatalmente encarnado el problema de la trisección del ángulo. Es decir, que se trata de una curva *trisectriz*, como decían los antiguos.

Podemos observar de paso, que los puntos que acabamos de considerar sobre la circunferencia circunscripta pertenecen también á la intersección de dicha circunferencia con la *cúbica*, que tiene por ecuación:

$$2Rx(x^2-3y^2)-R^2(x^2+y^2)=0$$

ó en coordenadas polares:

$$\rho=\frac{R}{2\cos 3\omega}$$

que es una curva conocida llamada *espiga* (**), algébrica

(*) Siendo *20* la dieciochava parte de la circunferencia, en la que entra el factor primo *tres* elevado al cuadrado, resulta la división aproximada, pues está perfectamente demostrado que no puede dividirse la circunferencia en un número de partes en el que entre la potencia superior á la unidad de un número primo impar.

(**) En rigor *Aubri* llamó espigas á las que traduce la ecuación:

$$\rho=\frac{a}{\operatorname{sen} m\omega}$$

pero es fácil ver que se pasa de unas á otras por un cambio conveniente del eje polar.

cuando el coeficiente de ω que figura bajo el coseno es *racional* (como en este caso), y *transcendente* en los demás, y se compone evidentemente de tantas ramas como indica el citado coeficiente cuando es entero (tres en este caso), y en el caso de ser fraccionario, y *supuesto irreducible*, el valor que indica el numerador *ó su doble*, según sean ambos términos de la misma ó distinta paridad. En nuestro caso salta á la vista que la recta inclinada 30° sobre el eje de las x y su simetria son *asintotas* de la curva. Las espigas son *cuadrables*; pero su rectificación depende de *integrales elipticas* de primera y segunda especie.

Aún más generalmente puede observarse que la curva que estudiamos es el lugar geométrico de las intersecciones de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = K R^2$$

y la cúbica

$$2x(x^2 - 3y^2) = (K^2 + K - 1) R^3$$

siendo K un parámetro (numérico) variable.

Basta para convencerse de ello, eliminar K entre ambas ecuaciones.

La ecuación de dicha línea de *tercer orden* en coordenadas polares es:

$$\rho^3 = \frac{(K^2 + K - 1) R^3}{2 \cos 3 \omega},$$

que representa una curva análoga á las *espigas*. Haciendo variar K se obtendrian cuantos puntos se quisieran de la curva que estudiamos; pero claro está que este seria un procedimiento puramente teórico.

Bajo el punto de vista práctico hay que determinar gráfica ó numéricamente diversos puntos de la cuártica que motiva este estudio, para lo cual será útil su ecuación en coordenadas polares. Conviene empezar por determinar varios puntos cuya construcción sea factible por medio de la regla y el compás; pero ante todo debe observarse, en vista de lo que llevamos dicho, que la cuártica está por completo encerrada en la *corona* que determinan las circunferencias que tienen por centro el del triángulo y por radios respectivos,

$$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{y} \quad \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

siendo dichas circunferencias triplemente tangentes á la curva en los *seis* vértices. Basta, por otra parte, observar que sólo hay que ocuparse de determinar puntos de una media hoja, es decir, la parte comprendida en el ángulo CoX ó en el CoD (fig. 1.ª).

Encontremos, por de pronto, la intersección de la curva con el eje de las y. Haremos en la ecuación (1) $x=0$, y la ecuación bicuadrada que resulta tiene por expresión:

$$y^4 + R^2 y^2 - R^4 = 0$$

cuya raiz real positiva es:

$$y = \sqrt{R.\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

es decir, la MEDIA GEOMÉTRICA *entre el lado del decágono convexo y el radio de la circunferencia circunscripta*. Así, pues, refiriéndonos á la figura 2.ª, bastará describir sobre $d_1\,k$, como diámetro, una semicircunferencia, y su intersección con oy marcará el punto e_1. Se tendrán, pues, todos los puntos análogos, encontrando la intersección de la circunferencia de radio oe_1 con las perpendiculares levantadas á las alturas en el *circuncentro* del triángulo.

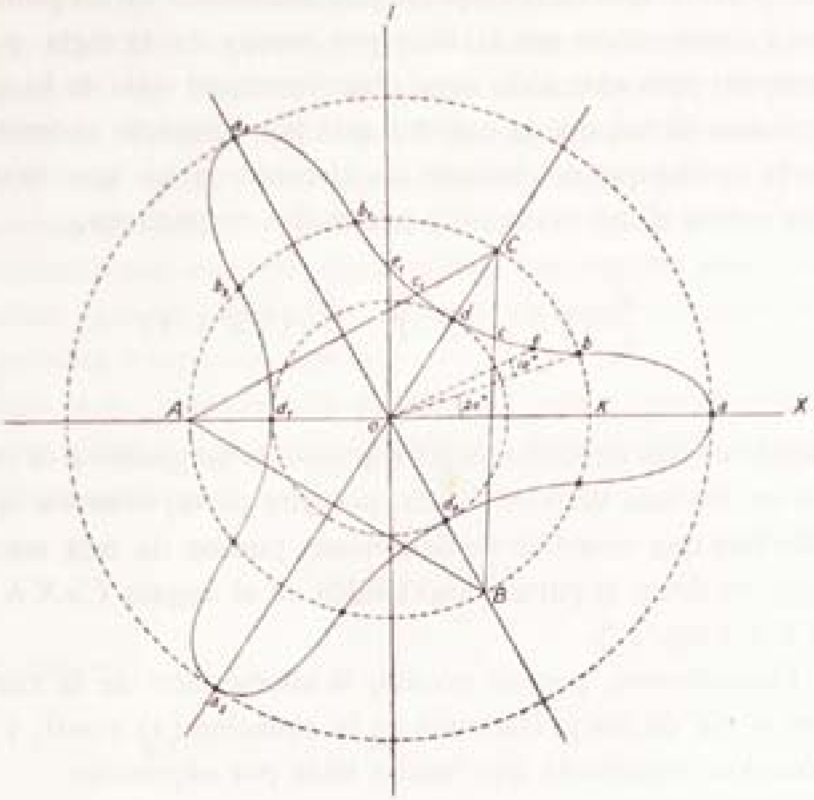

Figura 2.ª

La intersección de la curva con el lado BC se obtendrá haciendo

$$x = \frac{R}{2}$$

pues la apotema del triángulo equilátero es igual á la mitad del radio, y de este modo se obtiene:

$$\overline{Lc}^2 = \frac{R^2(4\sqrt{6} - 9)}{4}$$

y por consiguiente

$$\overline{oc}^2 = R\sqrt{2}.R(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

es decir, que *oc es media proporcional entre el lado del cuadrado y el exceso sobre éste del del triángulo equilátero, ambos inscriptos en el circuncíclo del triángulo dado*. La circunferencia descripta desde o como centro, con este radio marcará en su encuentro, con los lados de dicho triángulo, otros *seis* puntos de la curva. No debe extrañar que se hayan encontrado por la *Geometría elemental* varios puntos de la curva, pues sus vectores forman con el *eje polar* ángulos que son tercera parte de otros, cuya trisección es posible.

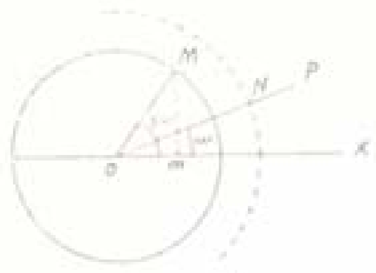

Figura 3.ª

Procediendo en la misma forma se podrán encontrar nuevos puntos; pero vamos á dar una construcción general, *aunque aproximada*, para encontrar todos los que se deseen. De la ecuación (2) deducimos:

$$R \cos 3\omega = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{R^2}{\rho} - \frac{R^4}{\rho^3}\right).$$

El segundo miembro puede construirse fácilmente por medio de terceras proporcionales, una vez fijado ρ gráficamente, y se obtendrá un segmento que llamaremos l, y la ecuación se reducirá á:

$$R \cos 3\omega = l$$

y si tomamos una longitud $om = l$ (fig. 3.ª), y levantamos la perpendicular mM en la circunferencia de radio R, se tendrá el ángulo 3ω, y dará un punto de la cuártica la intersección N de la circunferencia de radio ρ con el vector oP que forma el ángulo ω. Como ya dijimos, esta construcción es aproximada, pues exige dividir un ángulo en tres partes iguales.

Para obtener los puntos de *inflexión* de la curva, habrá que encontrar la ecuación de la *hessiana*, cuya intersección con la propuesta dará exclusivamente los puntos de *inflexión*, ya que, según hemos dicho, esta curva no tiene puntos dobles.

De la ecuación de la curva, *una vez homogenizada*, deducimos:

$$
\begin{aligned}
f'_x &= 4x^3 + 4xy^2 + 6zy^2 - 6x^2z + 2xz^2 \\
f'_y &= 4y^3 + 4x^2y + 12xyz + 2yz^2 \\
f'_z &= -2x^3 + 6xy^2 + 2zx^2 + 2zy^2 - 4z^3 \\
f''_{x^2} &= 12x^2 + 4y^2 - 12xz + 2z^2 \\
f''_{xy} &= f''_{yx} = 8xy + 12yz \\
f''_{xz} &= f''_{zx} = 6y^2 - 6x^2 + 4xz \\
f_{y^2} &= 12y^2 + 4x^2 + 12xz + 2z^2 \\
f''_{yz} &= f''_{zy} = 12xy + 4yz \\
f''_{z^2} &= 2x^2 + 2y^2 - 12z^2
\end{aligned}
$$

Y por consiguiente, la ecuación de la *hessiana* será:

$$
\begin{vmatrix}
6x^2 + 2y^2 - 6xz + z^2 & 4xy + 6yz & 3y^2 - 3x^2 + 2xz \\
4xy + 6yz & 6y^2 + 2x^2 + 6xz + z^2 & 6xy + 2yz \\
3y^2 - 3x^2 + 2xz & 6xy + 2yz & x^2 + y^2 - 6z^2
\end{vmatrix} = 0
$$

que después de cálculos, verdaderamente largos, nos llevó definitivamente á la siguiente ecuación para la *hessiana*

$$
\left\{
\begin{aligned}
&42y^6 - (108x^2 + 18xz + 405z^2)\,y^4 + (342x^4 - 11x^3z + \\
&+ 540x^2z^2 - 912xz^3 - 165z^4)\,y^2 + 6x^6 + 6x^5z + 45x^4z^2 - \\
&\qquad - 276x^3z^3 + 267x^2z^4 - 72xz^5 + 6z^6 = 0
\end{aligned}
\right.
$$

las 24 soluciones comunes á esta ecuación y á la (1) nos darían las coordenadas de los puntos de *inflexión*; pero ya comprenderá el lector que hemos renunciado á esta investigación, *completamente teórica*, al tratarse, como en este caso, de curvas cuya ecuación es complicada, más que por su grado, por el número de términos que la constituye.

El *radio de curvatura* de la curva que estudiamos no afecta forma sencilla en general; vamos, sin embargo, á determinarlo, para luego hacer aplicación á los vértices de la curva.

Derivando la ecuación (1) respecto á x, se obtiene:

$$4x^3 + 4xy^2 + 4x^2y.\frac{dy}{dx} + 4y^3.\frac{dy}{dx} -$$
$$-6x^2 + 6y^2 + 12xy.\frac{dy}{dx} + 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Volviendo á derivar respecto á x, resulta:

$$12x^2 + 4y^2 + \overset{16}{8}xy.\frac{dy}{dx} + 4x^2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x^2y.\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$+12y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y^3.\frac{d^2y}{dx^2} - 12x + \overset{24}{12}y.\frac{dy}{dx} +$$
$$+12x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12xy\frac{d^2y}{dx^2} + 2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y.\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

De la primera, deducimos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 - 4xy^2 + 6x^2 - 6y^2 - 2x}{4x^2y + 4y^3 + 12xy + 2y}$$

y de la segunda, resulta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-12x^2 - 4y^2 + 12x - 2 + \frac{dy}{dx}\left[-16xy - 24y\right] + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[-4x^2 - 12y^2 - 12x - 2\right]}{4x^2y + 4y^3 + 12xy + 2y}$$

Substituyendo estos valores en la conocida expresión del *radio de curvatura*, poniendo en la segunda derivada el valor obtenido, para la primera y hechas reducciones, se encuentra:

$$\rho = \frac{\left[y^2(4x^2+4y^2+12x+2)^2+(4x^3+4xy^2-6x^2+6y^2+2x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y2(4x^2+4y^2+12x+2)^2\left[-12x^2-4y^2-12x+2+(16x+24)(4x^3+4xy^2-6x^2+6y^2+2x)\right]- \atop -(4x^2+12y^2+12x+2)(4x^3+4xy^2-6x^2+6y^2+2x)^2}$$

haciendo $y = 0$, se obtiene

$$\rho = \frac{(4x^3-6x^2+2x)^3}{-(4x^2+12x+2)(4x^3-6x^2+2x)^2} = -\frac{2x^3-3x^2+x}{2x^2+6x+1}$$

si además hacemos

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

tendremos el *radio de curvatura* en el vértice de la derecha; hechos los cálculos y restableciendo el radio, resulta en valor absoluto

$$\rho = \frac{R}{62}(40-14\sqrt{5}) = \frac{R}{31}(20-7\sqrt{5})$$

Para el vértice de la izquierda se obtendría

$$\rho = \frac{R}{62}(40+14\sqrt{5}) = \frac{R}{31}(20+7\sqrt{5})$$

Vamos á encontrar también la ecuación de la cuártica en *coordenadas baricéntricas*, que realmente es en este caso la forma más natural y elegante de resolver el problema; pero no la que debe preferirse, por prestarse mal estas coordenadas á todo lo que atañe á *propiedades métricas*.

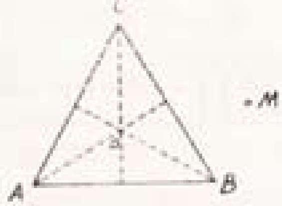

Figura 4.ª

Representemos, según costumbre, por S el área del *triángulo fundamental*, y por α, β, γ las coordenadas de un punto cualquiera M (fig. 4.ª) del lugar geométrico. Sabemos que la distancia d entre dos puntos está dada por la fórmula

$$d^2 = -\frac{1}{S^2} \cdot \Sigma a^2 (\beta_1 - \beta_0)(\gamma_1 - \gamma_0)$$

En este concepto, la distancia MA del punto M al vértice $A\ (S, o, o)$ será, teniendo en cuenta que en el caso en que estamos $a = b = c$:

$$\overline{MA}^2 . S^2 = - a^2 [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (\beta + \gamma) . S]$$

y análogamente

$$\overline{MB}^2 . S^2 = - a^2 [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (\alpha + \gamma)\, S]$$

$$\overline{MC}^2 . S^2 = - a^2 [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (\alpha + \beta)\, S]$$

$$\overline{MO}^2 . S^2 = - a^2 \left[\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \frac{S^2}{3}\right].$$

La ecuación del lugar será, suprimiendo en los denominadores el factor común $-\dfrac{a^2}{S^2}$, y representando por ω la expresión $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$:

$$\frac{1}{\omega - (\beta + \gamma)\, S} + \frac{1}{\omega - (\alpha + \gamma)\, S} + \frac{1}{\omega - (\alpha + \beta)\, S} = \frac{9}{3\omega - S^2}$$

y quitando denominadores

$$\left\{\begin{aligned} & [\omega - (\alpha + \gamma)\, S]\, [\omega - (\alpha + \beta)\, S]\, [3\omega - S^2] + \\ & + [\omega - (\beta + \gamma)\, S]\, [\omega - (\alpha + \beta)\, S]\, [3\omega - S^2] + \\ & + [\omega - (\beta + \gamma)\, S]\, [\omega - (\alpha + \gamma)\, S]\, [3\omega - S^2] = \\ & = 9\, [\omega - (\beta + \gamma)\, S]\, [\omega - (\alpha + \gamma)\, S]\, [\omega - (\alpha + \beta)\, S] \end{aligned}\right.$$

ó bien desarrollando los cálculos y teniendo en cuenta que

$$\alpha + \beta + \gamma = S \quad \text{y} \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \omega,$$

resulta

$$S^4 - 6\omega S^2 + 9 S \alpha\beta\gamma + 3\omega^2 = 0 \ldots\ldots \quad (3)$$

y por último, substituyendo de nuevo las cantidades S y ω por sus valores, se obtiene para ecuación de la cuártica:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^3(\beta + \gamma) - 2\beta^3(\alpha + \gamma) - 2\gamma^3(\alpha + \beta) - \\ - 3(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) - 3\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \ldots\ldots (4)\end{array}\right.$$

Esta ecuación (4), y mejor aún bajo la forma (3), prueba de nuevo que la cuártica es *bitangente* á la *recta del infinito*, pues, siendo la ecuación de dicha recta, en este sistema de coordenadas,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

ó bien

$$S = 0,$$

la intersección de dicha recta y la cuártica es la misma que la de

$$\left\{\begin{array}{l}\omega^2 = 0 \\ S = 0\end{array}\right.$$

que son los *puntos cíclicos*, puesto que la ecuación $\omega = 0$, que en un triángulo cualquiera representa la *elipse de Steiner circunscripta*, en este caso particular que tratamos, de un triángulo equilátero, representa la *circunferencia circunscripta*, y como tal, pasando por los puntos circulares del infinito.

Hemos tratado el problema que motivó este trabajo, *en el plano*, y ahora vamos á generalizarlo *para el espacio*.

El problema será el siguiente:

Encontrar los puntos del espacio igualmente iluminados por tres focos luminosos colocados en los vértices de un triángulo equilátero, y DE IGUAL INTENSIDAD, *que por otro de intensidad* SUMA, *situado en su centro.*

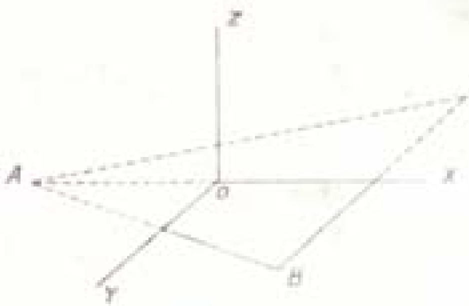

Figura 5.ª

Conservando las notaciones anteriores, la ecuación del problema será evidentemente:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(x+R)^2+y^2+z^2}+\frac{1}{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\left(y-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2}+\\&+\frac{1}{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\left(y+\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2}=\frac{3}{x^2+y^2+z^2}\end{aligned}\right.$$

y desarrollando los denominadores, resulta:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{x^2+y^2+z^2+2Rx+R^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2-Rx-R\sqrt{3}\,y+R^2}+\\&+\frac{1}{x^2+y^2+z^2-Rx+R\sqrt{3}\,y+R^2}=\frac{3}{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}\right.$$

Haciendo por abreviar:

$$x^2+y^2+z^2=H \quad \text{»} \quad x^2+y^2+z^2+R^2=L$$

se obtiene

$$\frac{1}{L+2Rx}+\frac{1}{L-Rx-R\sqrt{3}\,y}+\frac{1}{L-Rx+R\sqrt{3}\,y}=\frac{3}{H}$$

pero de las igualdades

$$x^2+y^2+z^2=H \quad \text{»} \quad x^2+y^2+z^2+R^2=L$$

se deduce

$$L-H=R^2 \quad \text{»} \quad 3L-H=2(x^2+y^2+z^2)+3R^2$$

y sustituyendo estos valores y haciendo operaciones, se obtiene:

$$x^4+y^4-z^4+2x^2y^2-2Rx^3+6Rxy^2+R^2(x^2+y^2)-$$
$$-2R^2z^2-R^4=0$$

á cuya ecuación se puede dar la forma

$$(x^2+y^2)^2-2Rx(x^2-3y^2)+R^2(x^2+y^2)-$$
$$-(Z^2+R^2)^2=0 \ldots\ldots \qquad (1)$$

que es la ecuación de la superficie que traduce la propiedad geométrica del enunciado, y que, según se ve, es de *cuarto orden*.

Vamos á encontrar la intersección de la superficie con los planos coordenados ¿ para $Z=0$, resulta:

$$(x^2+y^2)^2-2Rx(x^2-3y^2)+R^2(x^2+y^2)-R^4=0$$

que es la cuártica que hemos estudiado en la primera parte de este trabajo, como naturalmente debía suceder.

Para $y = 0$, se obtiene la ecuación

$$x^4 - Z^4 + R^2 x^2 - 2 R x^3 - 2 R^2 Z^2 - R^4 = 0$$

que, aunque de cuarto grado, no representa una *cuártica* propiamente dicha, puesto que su primer miembro se descompone en los dos factores siguientes:

$$[x^2 - Rx - (Z^2 + R^2)]\,[x^2 - Rx + (Z^2 + R^2)] = 0$$

el primer factor igualado á cero da la *hipérbola equilátera*, que tiene por ecuación

$$Z^2 - x^2 + Rx + R^2 = 0$$

y el segundo es un *círculo imaginario*, que tiene por centro el pie de la altura del triángulo relativa al vértice A, y por radio

$$\frac{R\sqrt{-3}}{2}.$$

En cuanto á la hipérbola, tiene por centro el mismo punto, y su eje real tiene por valor $R\sqrt{5}$.

La intersección de la superficie con el plano Zy se obtendrá haciendo $x = 0$, y resulta la cuártica

$$(Z^2 + R^2)^2 - y^4 - R^2 y^2 = 0$$

cuyos puntos *en el infinito* son los *puntos cíclicos*, y los *puntos del infinito* situados sobre las bisectrices del ángulo $I o Z$, evidentemente tiene por centro el origen de coordenadas y por asíntotas las bisectrices de los ejes.

Vamos ahora á encontrar la intersección de la superficie con un plano cualquiera pasando por el eje de las Z; tendremos que hacer en la ecuación (1) $y = Kx$, y resultará para *la proyección* de la sección sobre el plano xz (fig. 6.ª):

$$\begin{cases} (1 + K^2)^2 x^4 - Z^4 - 2R(1 - 3K^2)x^3 + \\ + R^2(1 + K^2)x^2 - 2R^2 Z^2 - R^4 = 0 \ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

pero lo que verdaderamente interesa es, no la proyección de la sección, sino la *línea misma* en el plano Zot que produce

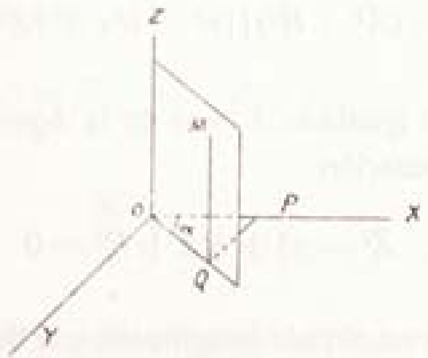

Figura 6.ª

la sección: he aquí el procedimiento que hemos seguido y que primero expondremos de un modo general.

Sea la ecuación de la proyección de la sección sobre el plano xZ

$$f(Zx) = 0$$

si llamamos α el ángulo que forma la traza del plano en cuestión, con la parte positiva del eje de las x, se tendrá $K = tg\alpha$; pero en el triángulo rectángulo oPQ (fig. 6.ª), se verifica

$$oP = oQ \cos\alpha$$

es decir,

$$x = t\cos\alpha = \frac{t}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{t}{\sqrt{1 + K^2}}$$

poniendo este valor en $f(Z, x) = 0$ resultará $\varphi(Z, t) = 0$, que es la ecuación de la intersección que se desea.

Aplicando esto á la ecuación que antes hemos obtenido, resulta para la sección *en el plano Zot*:

$$Z^4 - t^4 + 2\,R K'\,t^3 + 2\,R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \; \ldots.. \; (3)$$

habiendo llamado K', á la cantidad

$$\frac{1 - 3\,K^2}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se obtienen, pues, de un modo general, *cuárticas* que pasan por los puntos cíclicos y por los *puntos en el infinito* de las bisectrices del ángulo de los ejes.

Se puede comprobar la exactitud de la ecuación (3), deduciendo de ella, como caso particular, las secciones que ya hemos obtenido directamente causadas por los planos Zx y Zy, y que corresponden, respectivamente, á las hipótesis $K = 0$ y $K = \infty$.

La primera nos da, teniendo presente que entonces $K' = 1$ y la variable t se convierte en x,

$$Z^4 - x^4 + 2\,R x^3 + 2\,R^2 Z^2 - R^2 x^2 + R^4 = 0$$

que es la misma que ya hemos obtenido.

Al hacer $K = \infty$, K' se convierte en $\frac{\infty}{\infty}$, y para salvar la indeterminación hallaremos el cociente de las *derivadas* respecto á K, que es

$$K' = \frac{-6\,K}{3\,K\,(1 + K^2)} = \frac{-2}{1 + K^2} = 0 \; (\text{para } K = \infty\,)$$

haciendo, pues, esta hipótesis en la ecuación (3) se obtiene, teniendo en cuenta que ahora t es y,

$$(Z^2 + R^2)^2 - y^2\,(y^2 + R^2) = 0$$

también conforme con lo obtenido anteriormente.

Volviendo á considerar la cuártica (3)

$$Z^4 - t^4 + 2RK^1 t^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \ldots\ldots \quad (3)$$

Vamos á determinar las *asíntotas* de la curva general que representa. Sus *coeficientes angulares* se obtendrán haciendo $t = 1$ y $Z = a$, en los términos de cuarto grado ó igualando el resultado cero. Esto es, escribiendo la ecuación

$$a^4 - 1 = 0$$

que da para a los cuatro valores

$$a = +1 \quad » \quad a = -1 \quad » \quad a = +\sqrt{-1} \quad » \quad a = -\sqrt{-1}$$

que responden los dos primeros á *asíntotas reales*, y los otros á las imaginarias, de que prescindiremos.

Las *ordenadas en el origen*, resultarán de la ecuación

$$4a^3 b + ZRK' = 0$$

que da

$$b = \frac{-RK'}{2a^3}$$

para $a = 1$, resulta:

$$b = \frac{-RK'}{2} = \frac{-R(1 - 3K^2)}{2(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

para $a = -1$, se obtiene:

$$b = \frac{RK'}{2} = \frac{R(1 - 3K^2)}{2(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Las *asintotas reales*, tienen, pues, por ecuaciones

$$Z = t - \frac{R(1-3K^2)}{2(1+K^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad Z = -t + \frac{R(1-3K^2)}{2(1+K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Es decir, que son paralelas á las bisectrices del ángulo Zot en sus distintas posiciones, ó lo que es lo mismo, forman ángulos de 45°, la una con la parte positiva y la otra con la negativa del eje de las Z; además cortan á dicho eje en puntos equidistantes del origen, como es natural, dada la simetria de la superficie respecto al plano xoy.

Al girar el plano Zot alrededor de oZ, estas asintotas engendrarán *dos superficies regladas*, que tendrán como *directriz rectilínea* el eje de las Z, y como *cono director* el que se obtendria trazando por el origen rectas formando ángulos de 45° con la parte positiva y negativa del eje de las Z, superficies que serán *asintóticas* de la que estudiamos.

Tratemos de encontrar la ecuación de dichas superficies, por ejemplo, para la *primera asintota*.

La proyección de dicha recta sobre el plano xoz se obtendrá haciendo

$$t = x\sqrt{1+K^2}$$

en la

$$Z = t - \frac{R(1-3K^2)}{2(1+K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y resulta

$$2Z(1+K^2)^{\frac{3}{2}} = 2(1+K^2)^2 x - R(1-3K^2)$$

se obtendrá, pues, el *lugar geométrico*, eliminando K entre esta última ecuación y la $y = Kx$ y así resulta

$$2Z\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}=2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2 x-R\left(1-\frac{3y^2}{x^2}\right)$$

ó bien

$$2Z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=2(x^2+y^2)^2-R(x^2-3y^2)x \;\ldots\ldots\; (4)$$

Si se hubiese partido de la otra asíntota, se obtendrá la ecuación:

$$2Z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=-2(x^2+y^2)^2+R(x^2-3y^2)x \;\ldots\ldots\; (5)$$

Estas superficies se cortan sobre el plano xoy según la curva que tiene por ecuación

$$2(x^2+y^2)^2=R(x^2-3y^2)x$$

ó sea en *coordenadas polares:*

$$\rho=\frac{R}{2}\cos 3\,\omega$$

que es la curva llamada *rosácea*, que viene á ser el lugar geométrico de las intersecciones con el citado plano de las asíntotas de una y otra clase.

Este hallazgo curioso de la curva *rosácea* para el lugar geométrico de las trazas de las asíntotas, nos lleva por una pendiente natural á decir dos palabras sobre estas curvas, no sólo interesantes, sino hasta *agradables*, bajo el punto de vista *estético*.

Fueron estudiadas por primera vez por Guido-Grandi en el primer tercio del siglo XVIII y son *curvas algébricas* siempre que el coeficiente de ω sea *racional;* cuando dicho coeficiente es *entero*, la curva tiene tantas *ramas* como indica este coeficiente si es *impar*, y el *doble* en el caso de ser *par*, cuando es fraccionario, y *supuesto irreducible*, el número de ramas es igual al *numerádor* ó á su *doble*, según que los términos de la fracción sean de la *misma* ó *distinta* paridad. Estas curvas son *cuadrables*, pero la *rectificación* depende de las *integrales elípticas*, de aquí el que se les aplique un teorema análogo al célebre de Fagnano, como ocurre con otras curvas: el *caracol de Pascal*, la *curva de los senos*, etc., etcétera.

Pueden consultarse sobre estas curvas las obras de nuestros ilustres amigos los Sres. Gómes Teixeira y Brocard, *Tratado de curvas especiales* y *Curvas Geométricas*, así como un trabajo, muy interesante, que publicó en Mathesis en 1894, nuestro también excelente amigo el sabio geómetra italiano señor Pirondini, en donde dió á conocer un curioso procedimiento mecánico para la descripción de estas curvas.

Terminada la anterior digresión, volvamos á considerar la superficie (4) y tratemos de encontrar su intersección con el cilindro recto que tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2$$

esto es, el que tiene por sección recta, según el plano xy, la circunferencia circunscripta al triángulo. Haremos en la ecuación (4)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y se tendrá

$$2\, Z R^3 = 2\, R^4 - R\,(4x^2 - 3\, R^2)\, x$$

las *proyecciones*, pues, de la curva intersección sobre los planos xy y xz tienen por ecuaciones

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y

$$2\, Z R^2 + x\,(4\, x^2 - 3\, R^2) = 2\, R^3.$$

Así, pues, la superficie (4) puede engendrarse por una recta que resbala sobre esta curva y el eje de las Z, formando un ángulo constante de 45° con la parte positiva de dicho eje.

Volviendo á considerar la curva

$$Z^4 - t^4 + 2RK' t^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \;..... \;(3)$$

que representa la sección de la superficie (1) por un plano cualquiera que pasa por el eje de las Z, es muy fácil darse cuenta de las variaciones que va experimentando en sus distintas posiciones; para esto será conveniente poner el parámetro K' en función del ángulo que llamaremos ω, que forma su traza ot sobre el plano xy con el eje de las x. Tenemos

$$K' = \frac{1 - 3K^2}{(1+K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pero evidentemente $K = tg\omega$, y substituyendo este valor resulta

$$K' = \frac{1 - 3\,tg^2\,\omega}{(1 + tg^2\,\omega)^{\frac{3}{2}}} = \cos^3\omega - 3\cos\omega\,(1 - \cos^2\omega) =$$
$$= 4\cos^3\omega - 3\cos\omega = \cos 3\,\omega.$$

La ecuación (3) toma, por consiguiente, la forma (fig. 7.ª).

$$Z^4 - t^4 + 2R\cos 3\,\omega\, t^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \;..... \;(3)$$

Al variar ω de cero á 30°, el coeficiente de t^3 pasa por todos los valores *absolutos* posibles; para el primer valor, dicho coeficiente es igual á $2R$, y para el último, cero. Como la *abscisa en el origen* de las asíntotas es

$$\frac{R}{2} \cdot \frac{1 - 3K^2}{(1+K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

se convertirá, en vista de la anterior transformación, en

$$\frac{R}{2} \cos 3\,\omega;$$

y, por consiguiente, las asíntotas cortarán al plano del triángulo en el punto P (fig. 7.ª) cuando el ángulo $\omega = 0$, y en el punto o para $\omega = 30°$ trazando la media rama de *rosácea* pso, tangente en o á la recta ot'. Al variar ω de 30° á 60° el coeficiente de t^3 variará de *cero* á $-2R$, pasando su *valor absoluto* por todos los que antes tomó; pero es evidente que si antes dos valores $Z = h \cdot t = K$ verificaban la ecuación (3), ahora lo verificarán $Z = -h \cdot t = -K$; es decir, que la misma sección se presentará en forma simétrica de antes, esto es, las ramas estarán invertidas. La *abscisa en el origen* de la asíntota variará de cero á $-\frac{R}{2}$ marcando la media rama $os'r$. De 60° á 90° se reproducirán las secciones como entre 30° y 60°; la traza de la asíntota marcará la media hoja $rs''o$. De 90° á 120° los hechos se verificarán como entre 30° y 60°, y así sucesivamente. Podemos, pues, considerar 12 *zonas*, de ellas 6 iguales, y otras 6 en que las secciones, si bien iguales entre sí, aparecen en forma simétrica de las anteriores respecto á los ejes móviles. En todo el giro las trazas de las asíntotas marcarán las *tres hojas de rosácea*, según se ve en la figura 7.ª. También se ve que para

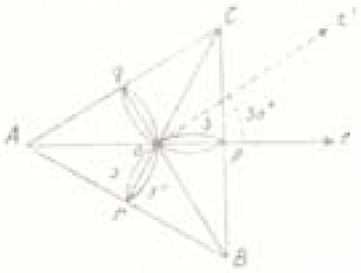

Figura 7.ª

los ángulos 0° — 60° — 120°, es decir, cuando las trazas del plano secante sobre el xy son las alturas del triángulo, la cuártica se descompone en dos factores, siendo el real una *hipérbola equilátera.* En cambio, cuando ω toma los valores 30° — 90° — 150°, es decir, cuando la traza es paralela á los lados del triángulo, desaparece el coeficiente de t^3, y la cuártica tiene por centro el del triángulo, reduciéndose su ecuación á

$$Z^4 - t^4 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \,..... \qquad (4)$$

ó bien

$$(Z^2 + R^2)^2 - t^2 (t^2 + R^2) = 0 \,..... \qquad (4)$$

ó en coordenadas polares

$$\cos 2\,\omega = \frac{\rho^2 + 2}{2\,\rho^4 + 3\,\rho^2}.$$

La curva que representa esta ecuación (4) se puede construir por la geometría elemental, pues despejando Z se tiene

$$Z = \pm\sqrt{-R^2 \pm \sqrt{t^4 + R^2 t^2}}$$

dos valores de *Z son siempre imaginarios*, y para que los otros dos sean reales, es necesario y suficiente que

$$t^4 + R^2 t^2 \gtreqless R^4$$

ó bien

$$t \gtreqless \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

considerando, *en esta hipótesis*, sólo el valor absoluto de Z se le puede dar la forma

$$Z = \sqrt{t\sqrt{t^2 + R^2} - R^2}$$

expresión que se puede construir por la geometría elemental una vez fijada *gráficamente* la *abscisa* t. No se olvide que, según hemos dicho, las *asíntotas* de esta *cuártica* son las bisectrices de los ángulos que forman los ejes oZ y ot.

Hemos visto que las secciones que producen los planos que tienen por trazas las alturas, ó cuando éstas son paralelas á los lados, *tienen centro* que son respectivamente los vértices ó el centro de la *rosácea* que hemos considerado, y se ocurre investigar si otros planos, pasando por oZ, podrán también producir curvas con centro. Si lo tienen, evidentemente estará sobre el eje ot, y, por consiguiente, todo se reduce á trasladar el eje de las Z para ver si pueden desaparecer los coeficientes de los términos, en los que t entra con exponente impar. La ecuación tomará la forma

$$Z^4 - (t+h)^4 + 2K'(t+h)^3 + 2Z^2 - (t+h)^2 + R^4 = 0$$

los coeficientes de t^3 y t son

$$-4h + 2K' \qquad \text{y} \qquad -4h^3 + 6K'h^2 - 2h$$

que igualados á *cero* dan

$$h = \frac{K'}{2} \qquad \text{y} \qquad K'^4 - 3K'^2 + 2 = 0$$

de donde

$$K'^2 = 1 \qquad \text{ó} \qquad K' = \pm 1$$

luego

$$\cos 3\omega = \pm 1$$

y por consiguiente,

$$\omega = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ \text{ y } 150^\circ$$

que son precisamente las secciones que anteriormente hemos considerado, y por lo tanto *las únicas*, pasando por oZ que tienen centro.

Aquí damos fin; pero quizás insistamos sobre este problema que hemos estudiado, dándole aún un carácter más general.

La Coruña, Octubre de 1909.

PUBLICADO EN LA «REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID».—NOVIEMBRE DE 1909.