Asociación Española
para el Progreso
de las Ciencias

Congreso de Zaragoza

Notas de Geometría

por D. Juan J. Durán y Loriga

Imprenta de Eduardo Arias
San Lorenzo, 5, Madrid

NOTAS DE GEOMETRÍA

POR

D. JUAN J. DURÁN Y LORIGA

COMANDANTE DE ARTILLERÍA RETIRADO

(Leídas en la sesión del 27 de Octubre de 1908.)

Presentaba el profesor *Davis*, en 1888, la *Geometría reciente del triángulo*, ante la *Asociacion for the improvement of geometrical Teaching* como un planeta nuevo y extraño al que se dirigían multitud de telescopios desde los diversos países civilizados para observarlo cuidadosamente, y en efecto, nada más oportuno, añadiremos nosotros, que valerse en aquella ocasión de un símil astronómico. Las investigaciones en esta rama de la Geometría, que nosotros propondríamos se la llamara *Triangulogía*, constituyen, en verdad, una especie de Astronomía. El plano del triángulo forma, en efecto, un verdadero *mundo sidéreo*, en el que se descubren de día en día nuevos astros; el *baricentro* ó *centro de gravedad* desempeña el papel de *Sol* de este sistema planetario; los puntos se agrupan formando importantes *constelaciones*; pero, por fortuna para el cultivador de esta parte de la Ciencia, su *observatorio astronómico* es sumamente sencillo: nada de *círculo ecuatorial*, *telescopios*, *círculos murales*, *anteojos meridianos*, etc., etc.; le basta un papel y un lápiz para instalar su *pequeño observatorio*, como, *por excepción*, le bastó al gran *Leverrier* para descubrir el planeta *Neptuno*.

Veamos en qué consiste este precioso trozo de la Geometría, llamado, como antes hemos dicho, *Geometría reciente del triángulo*.

Desde muy antiguo se han considerado en el plano del triángulo (con unos ú otros nombres) ciertos puntos y líneas á él ligados, gozando de propiedades notables, por ejemplo, las *alturas*, *bisectrices*, *me-*

dianas, *mediatrices* (perpendiculares en los medios de los lados) etcétera, entre los elementos rectilíneos: *ortocentro*, *baricentro*, *centros de los círculos inscriptos y exinscriptos*, etc., entre los puntos, y asimismo, *círculo circunscripto*, *círculos inscriptos y exinscriptos*, *círculo de los nueve puntos (ó de Euler)*, etc., entre los elementos curvilíneos; lo que permitió, por su mutuo enlace, enunciar multitud de teoremas, á cuyo estudio van unidos los nombres de los grandes matemáticos, no sólo de la antigüedad, sino de los tiempos modernos, como *Newton*, *Fermat*, *Torricelli*, *Euler*, *Gauss*, *Steiner*, etc. Mas es lo cierto que estas investigaciones constituían sólo hechos y propiedades aisladas, no formaban rama aparte de la *Geometría*, faltaba ese encadenamiento que más tarde le dió relativa autonomía, dentro de la Ciencia de la extensión.

Al celebrarse el año 1873, por *L'Association Française pour l'avancement des Sciences* su Primer Congreso Matemático, en Lyon, hizo notar el ingeniero francés, *Sr. Lemoine*, el importante papel que desempeña un punto, ya anteriormente considerado por *L'huiller* (1809), que lo dedujo por la condición de que la suma de los cuadrados de sus distancias á los lados del triángulo sea un mínimo. Las diversas propiedades de que este punto goza y que le hacen el más notable después del *centro de gravedad*, han motivado el que diversos geómetras hayan dado con él independientemente, tomando distintos puntos de partida, y con frecuencia sin conocer á primera vista que se trataba del mismo punto. En la Memoria citada tomó el *Sr. Lemoine* como idea inicial un caso particular de la siguiente propiedad, muy conocida (que no es más que una consecuencia de un teorema de *Mac Laurin* y *Brainkenridge*): «el lugar geométrico de los puntos, tales que sus *pedales* pasan por un punto fijo, es una cónica circunscripta al triángulo.» El geómetra francés quiso averiguar en qué caso esta cónica es un círculo, dando esto lugar á la obtención de tres puntos (polos de los lados del triángulo respecto del círculo circunscripto) que, unidos á los vértices, dan, por la intersección de estas rectas, el hoy llamado *punto de Lemoine* (los alemanes le llaman *punto de Grebe*, por haberlo encontrado este geómetra en 1847) que, como digimos, es el mismo obtenido por *L'huiller* partiendo de la propiedad de mínimo antes citada, así como también había llegado á él *Hossard*, por la circunstancia de que las rectas que lo unen con los vértices del triángulo dividen los lados opuestos en segmentos proporcionales á los cuadrados de los lados adyacentes. El *Sr. Lemoine* añadió en la Memoria citada la curiosísima propiedad de que las rectas trazadas por dicho punto en direcciones *paralelas ó antiparalelas* á los lados producen dos grupos de seis puntos concíclicos que forman parte de los hoy llamados *primero y segundo círculo de Lemoine*.

Estos resultados, unidos á los de una cuestión propuesta en 1875 por el geómetra francés, *Sr. Brocard*, en los *Nouvelles Annales de Mathematiques*, á saber: encontrar en el plano del triángulo un punto Ω, tal que se efectúen las igualdades

$$\Omega AB = \Omega BC = \Omega CA$$

y que condujo á dos puntos Ω_1 y Ω' *(puntos de Brocard)*, aunque ya anteriormente obtenidas por *Crelle* (1816), y á un círculo notable *(círculo de Brocard)*, llamaron seriamente la atención de los geómetras sobre este estudio sistemático de los elementos ligados al triángulo, constituyendo rama aparte de la Geometría, de la que se consideran como fundadores los citados *Sres. Lemoine* y *Brocard*, y á los que con justicia debe unirse el nombre del eminente geómetra belga, *Sr. Neuberg*, quien hizo importantísimas investigaciones, notables trabajos de unificación y terminología y, en fin, extendió al *tetraedro* varias propiedades en una Memoria admirable. Citar los nombres de los que después consagraron su inteligencia á estos estudios, sería tarea larga; pero no podemos dejar de consignar aquí los numerosísimos resultados que obtuvo nuestro excelente amigo el geómetra francés *Sr. Longchamps* (hoy fallecido), quien, por otra parte, contribuyó al desarrollo de esta Geometría con la favorable acogida que dispensó á los trabajos que se enviaban á su Revista *Journal de Mathemathiques*, relativos á estas investigaciones.

Actualmente la Geometría reciente del triángulo, con un corto vocabulario sabiamente elegido, puede nombrar millares de puntos, y en correspondencia con éstos, un número verdaderamente enorme de rectas y curvas notables; debe, sin embargo, saberse que la misión de esta Geometría no es exclusivamente descubrir propiedades del triángulo, pues se utiliza ventajosamente para el estudio de las curvas, considerándolo *como de referencia*, y empleando las coordenadas *trilineales* ó *normales* y muy en particular las baricéntricas, que, además de la ventaja de la homogeneidad, como las anteriores, tienen la de la sencilla expresión que afecta la ecuación de la *recta del infinito*.

En todas las naciones se cultiva hoy con interés esta parte de la Ciencia por los geómetras más eminentes, teniendo por desgracia que exceptuar á la nuestra, donde estos estudios son poco conocidos y cultivados. Seríamos dichosos si esta ocasión que nos proporciona la invitación recibida de la *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias* para que enviemos algún trabajo al Congreso de Zaragoza, que tanto agradecemos y tanto nos honra, sirviera para despertar en el elemento joven de nuestra patria la afición á esta preciosa rama de la Geometría. Nos proponemos hacer un estudio *de conjunto* de algunas investigaciones que hemos hecho sobre estos asuntos y dado á conocer en Revistas y Congresos extranjeros, pero añadiendo hechos nuevos, aunque no tantos como hubiéramos deseado, entre otros motivos, por el escaso tiempo de que hemos podido disponer.

NOTA PRIMERA

SOBRE LOS TRIÁNGULOS ISOGONOLÓGICOS.

(Véase nuestra Memoria del Congreso de Montauban 1902.)

1. Sea ABC el triángulo fundamental y $A'B'C'$ otro triángulo tal que las perpendiculares bajadas de A, B, C, sobre $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ concurran en un punto L; se sabe que en este caso acontece que las perpendiculares bajadas de A', B', C' sobre BC, CA, AB concurren en un punto L' (*Steiner*, obras completas, pág. 157) y á estos triángulos se les ha llamado *ortológicos*. L y L' son los centros de ortología, y llamaremos á L primer centro y á L' el segundo. Del mismo modo si el hecho que ocurre para las *perpendiculares* sucede para las *paralelas* á los lados, se dice que los triángulos son *paralelógicos* (*L. Ripert*, Congreso de Ajaccio 1901) y á los puntos obtenidos P y P' llamaremos *primero y segundo centro de paralelogía*.

En esta Nota nos proponemos estudiar el caso de dos triángulos ortológicos, en los que el primer centro de ortología cae sobre la circunferencia ABC, y fácilmente se ve que entonces se efectúa: 1.º, que el segundo centro cae sobre la $A'B'C'$; 2.º, que los triángulos son paralelógicos con los centros P y P' sobre las circunferencias circunscriptas; 3.º, que son inversamente semejantes; 4.º, que las rectas trazadas por A, B, C, formando ángulos iguales con $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ concurren sobre la circunferencia ABC (ó inversamente).

Á causa de esta última propiedad hemos llamado *triángulos isogo-*

nológicos (1) á los que siendo ortológicos tienen los centros de ortología sobre las circunferencias circunscriptas.

Sean

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

las coordenadas baricéntricas de los vértices A', B', C' respecto del triángulo de referencia ABC.

Hemos encontrado (*Montauban* 1902) que en *coordenadas absolutas*, ó al menos *del mismo peso*, las condiciones de isogonología son:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \alpha_1-\alpha_2 & \beta_2-\beta_1 & 0 \\ \alpha_3-\alpha_1 & 0 & \gamma_1-\gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \alpha_1-\alpha_2 & \beta_2-\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2-\beta_3 & \gamma_3-\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si el triángulo $A'B'C'$ se da por las ecuaciones de sus lados,

$$\begin{array}{ll} (B'C')\ldots\ldots\ldots\ldots & l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0 \\ (C'A')\ldots\ldots\ldots\ldots & l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0 \\ (A'B')\ldots\ldots\ldots\ldots & l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma = 0 \end{array}$$

las condiciones de isogonología son:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ m_3-n_3 & l_3-n_3 & 0 \\ n_2-m_2 & 0 & l_2-m_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ m_3-n_3 & l_3-n_3 & 0 \\ 0 & n_1-l_1 & m_1-l_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si se da la dirección de un lado, las de los otros quedan determinadas.

Si se conocen dos vértices, queda determinado el tercero.

Si se dan tres puntos sobre los lados de $A'B'C'$, los vértices de éste describirán cónicas (circunferencias), puesto que se forman haces homográficos.

Correlativamente, si se dan tres rectas sobre las cuales están los vértices de $A'B'C'$, los lados de este triángulo envuelven cónicas.

Si se fija un vértice y el otro se mueve sobre una recta, el lugar del tercero es una recta.

---

(1) El *Sr. Neuberg* ha demostrado que basta que dos triángulos sean *inversamente semejantes* para que sean *isogonológicos;* pero hemos introducido este neologismo, con el cual no está conforme el eminente Profesor belga (véase *Mathesis* 1903), para recordar la propiedad citada.

Se pueden construir triángulos á la vez isogonológicos y homológicos á ABC; la solución es fácil: basta construir un triángulo cualquiera *inversamente semejante á* ABC y en seguida otro homotético con éste y trihomológico á ABC, problema conocido.

2. Un caso particular interesante que hemos considerado en la Memoria de *Montauban*, pero que en ésta ampliamos con hechos nuevos, sucede cuando el triangulo $A'B'C'$ está formado por tres *rectas isobáricas*, al que llamaremos, por abreviar, un *triángulo isobárico*; entonces las condiciones de isogonología se reducen á la sola igualdad

$$a^2(\beta_1-\gamma_1)+b^2(\alpha_1-\beta_1)+c^2(\gamma_1-\alpha_1)=0,$$

cuya interpretación geométrica viene á ser que el *punto semirecíproco* del *polo baricéntrico* de GA' esté sobre la *recta de Longchamps*.

El lugar de A' tiene por ecuación:

$$(b^2-c^2)\,\alpha+(a^2-b^2)\,\beta+(c^2-a^2)\,\gamma=0,$$

es decir, es la recta que une el vértice A_1 del *primer triángulo de Brocard* al centro de gravedad.

Análogamente, la condición para que la recta $B'C'$ forme triángulos isobáricos é isogonológicos con el de referencia es

$$a^2(n_1-m_1)+b^2(m_1-l_1)+c^2(l_1-n_1)=0,$$

y la envolvente de $B'C'$ es el punto que tiene por *ecuación tangencial*

$$(c^2-b^2)\,u+(b^2-a^2)\,v+(a^2-c^2)\,w=0,$$

ó las coordenadas puntuales

$$\alpha:\beta:\gamma=c^2-b^2:b^2-a^2:a^2-c^2,$$

es decir, el *punto al infinito* del lado B_1C_1 *del primer triángulo de Brocard*.

Resulta, pues, que los *triángulos isobáricos é isogonológicos* con el de referencia son *homotéticos al primer triángulo de Brocard*, siendo el *centro de homotecia* el *centro de gravedad*; son *trihomológicos* con el de de referencia (como todos los formados por rectas isobáricas), obtendremos, por consiguiente, una serie de triángulos que tienen ciertas analogías con el *primer triángulo de Brocard*, y que hemos llamado por esta razón *triángulos brocardianos*.

La expresión general de las coordenadas de los vértices de estos triángulos, en función de dos parámetros variables p y q (claro está que se podría emplear uno sólo y ponemos dos por simetría), es para el vértice A'

$$\alpha : \beta : \gamma = [q(a^2 - c^2) + p(b^2 - a^2)] : [p(b^2 - c^2)] : [q(b^2 - c^2)]$$

para B' y C' los puntos isobáricos de A'.

El triángulo de *Brocard* corresponde á la hipótesis

$$p = \lambda c^2 \quad q = \lambda b^2.$$

El centro de gravedad es un caso particular de estos triángulos *(triángulo evanescente)* que corresponde á la hipótesis $p = q$.

Existen tres triángulos brocardianos inscriptos correspondientes respectivamente á las hipótesis

$$p = 0 \quad q = 0 \quad p(a^2 - b^2) = q(a^2 - c^2).$$

Del mismo modo hay tres circunscriptos al de referencia, correspondiente á cada una de las hipótesis

$$\lambda = a^4 - b^2c^2 \quad \lambda = c^4 - a^2b^2 \quad \lambda = b^4 - a^2c^2$$

en la ecuación

$$(b^2c^2 - a^4 + \lambda)\alpha + (a^2b^2 - c^4 + \lambda)\beta + (a^2c^2 - b^4 + \lambda)\gamma = 0,$$

que representa el lado variable $B'C'$ de los triángulos brocardianos.

Los lados de los triángulos que se obtienen, por ejemplo, por la primera hipótesis pasan por el punto de *Steiner* y sus isobáricos.

Se obtiene también, mediante el supuesto

$$p = c^4 - a^2b^2 \quad \text{y} \quad q = b^4 - a^2c^2,$$

un triángulo importante entre los brocardianos, cuyos lados son la *recta recíproca* de la de *Longchamps* y sus isobáricos, y sus vértices los *puntos semirecíprocos* de los *armónicamente asociados* al *eje de homología* de ABC y el *primer triángulo de Brocard*.

Los ejes de homología del triángulo en cuestión y el fundamental, forman el *grupo isobárico* correspondiente á la *recta de Lemoine*, y los centros de homología el *punto armónicamente asociado á la recta de Brocard* y sus isobáricos.

3. Conviene ahora, para el estudio completo de los triángulos *brocardianos*, puntos notables, círculos circunscriptos, etc., resolver la cuestión siguiente que, con alguna otra ya considerada anteriormente, constituyen ampliaciones de nuestra Memoria de *Montauban*, de la que, por otra parte, hemos suprimido otros puntos allí tratados.

Dado el centro de homotecia G (baricentro) y dos puntos correspondientes M' y M (por sus coordenadas), encontrar:

Primero, la relación de homotecia; segundo, las coordenadas antiguas, en función de las nuevas, é inversamente.

1.º Se tiene

$$\frac{GM'}{GM} = \frac{K-\alpha'}{K-\alpha} = \rho,$$

siendo K, α', α las coordenadas baricéntricas *absolutas* de G, M' y M respecto del lado BC y ρ la razón de homotecia. Respecto del lado AC se obtendría análogamente:

$$\frac{K-\beta'}{K-\beta} = \rho,$$

de donde resulta la propiedad:

$$\frac{K-\alpha'}{K-\alpha} = \frac{K-\beta'}{K-\beta} = \frac{K-\gamma'}{K-\gamma} = \rho.$$

Si el centro de homotecia no fuese el baricentro, K sería distinto en cada una de las relaciones anteriores.

De las últimas igualdades se deduce:

$$\frac{\beta'-\alpha'}{\beta-\alpha} = \rho,$$

expresión que permite encontrar la razón de homotecia.

Si el centro de homotecia no fuese el de gravedad, K no desaparecería, pero el procedimiento sería el mismo.

2.º Una vez calculado ρ se tiene:

$$\alpha = \frac{K(\rho - 1) + \alpha'}{\rho}$$

y análogamente:

$$\beta = \frac{K(\rho - 1) + \beta'}{\rho} \qquad \gamma = \frac{K(\rho - 1) + \gamma'}{\rho},$$

substituyendo estos valores en una ecuación

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

del sistema (M) resultará una transformada

$$\varphi(\alpha', \beta', \gamma') = 0$$

en el sistema (M').

Observemos que á las fórmulas anteriores puede darse la forma

$$\alpha = \frac{\frac{S}{3}[(\rho + 2)\alpha' + (\rho - 1)(\beta' + \gamma')]}{\rho}$$

y análogamente β y γ, pero como la ecuación donde hemos de substituir es homogénea, podemos tomar sencillamente valores proporcionales, y las fórmulas de transformación son finalmente:

$$\alpha = (\rho + 2)\alpha' + (\rho - 1)(\beta' + \gamma') \quad \beta = (\rho + 2)\beta' + (\rho - 1)(\alpha' + \gamma')$$
$$\gamma = (\rho + 2)\gamma' + (\rho - 1)(\alpha' + \beta').$$

Si hacemos aplicación de las anteriores fórmulas al paso del sistema de que forma parte el *primer triángulo de Brocard*, al formado *por la recta semirecíproca de la de Longchamps y sus isobáricas*, se llegaría al resultado.

Razón de homotecia:

$$\rho = \frac{m^4}{q^4 - n^4}.$$

Fórmulas de transformación:

$$\alpha = q^4\alpha' + n^4(\beta' + \gamma')$$
$$\beta = q^4\beta' + n^4(\alpha' + \gamma')$$
$$\gamma = q^4\gamma' + n^4(\alpha' + \beta')$$

habiendo hecho, según costumbre,

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 \qquad a^4 + b^4 + c^4 = q^4 \qquad a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = n^4.$$

Si lo que se desea es no transformar una línea, sino encontrar las coordenadas del nuevo punto M' en función de las del M, se despejarán α', β', γ' en función de α, β, γ, y se tendrá:

$$\alpha' = \alpha\rho - K(\rho - 1) \qquad \beta' = \beta\rho - K(\rho - 1) \qquad \gamma' = \gamma\rho - K(\rho - 1)$$

4. Hemos dicho que los *triángulos brocardianos* son triplemente homológicos con el de referencia; tratemos de encontrar el lugar de los centros de homología (por ejemplo, el primer centro).

Sin gran dificultad se obtiene para sus coordenadas en función de un parámetro variable λ

$$\alpha[(l+\lambda)^2 - (m+\lambda)(n+\lambda)] = \beta[(n+\lambda)^2 - (m+\lambda)(l+\lambda)] =$$
$$= \gamma[(m+\lambda)^2 - (l+\lambda)(n+\lambda)],$$

habiendo hecho, por abreviar,

$$l = b^2c^2 - a^4 \qquad m = a^2b^2 - c^4 \qquad n = a^2c^2 - b^4.$$

La eliminación de λ da el siguiente curioso resultado:

$$(c^2 - b^2)\beta\gamma + (a^2 - b^2)\alpha\gamma + (b^2 - a^2)\alpha\beta = 0,$$

es decir, la *hipérbole de Kiepert*, que, según se sabe, *es equilátera, circunscripta al triángulo de referencia* y pasa por el *baricentro, ortocentro, punto de Tarry* y otros varios puntos notables.

Para el lugar geométrico del *segundo centro de paralelogía* del triángulo variable $A'B'C'$ y el de referencia, hemos obtenido:

$$(c^2 - b^2)\alpha + (a^2 - c^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0,$$

esto es, *la recta armónicamente asociada al punto de Steiner.*

Se puede observar que el segundo centro de paralelogía y el primero de homología describen líneas recíprocas.

Tratemos ahora de encontrar la envolvente de los *ejes de homología* de los *triángulos brocardianos* respecto del fundamental.

El lado variable $B'C'$ puede representarse por la ecuación:

$$(l+\lambda)\alpha+(m+\lambda)\beta+(n+\lambda)\gamma=0,$$

teniendo l, m, n la significación que antes hemos dicho.

El eje variable de homología (primer eje) tiene por ecuación:

$$\frac{\alpha}{l+\lambda}+\frac{\beta}{n+\lambda}+\frac{\gamma}{m+\lambda}=0.$$

Para encontrar la envolvente habrá que eliminar λ entre la anterior ecuación y su derivada respecto de λ, llegando por cálculos algo largos, pero no difíciles, á la ecuación:

$$\sqrt{(b^2-c^2)\alpha}+\sqrt{(c^2-a^2)\beta}+\sqrt{(a^2-b^2)\gamma}=0.$$

Resulta, pues, que la envolvente de los primeros ejes de homología de ABC *y los triángulos brocardianos es la parábola de Kiepert;* sabido es que el foco de esta parábola notable *es el inverso del recíproco del punto de Steiner* y está sobre la *circunferencia circunscripta.*

Considerando el *centro de gravedad* como *triángulo límite* de la serie de los *brocardianos*, puede considerarse que sus lados son paralelos á los del *triángulo de Brocard*, deduciéndose la siguiente propiedad:

Las paralelas trazadas por G *á los lados del primer triángulo de Brocard encuentran los lados del de referencia en tres puntos colineales.*

Más generalmente:

Si por el centro de gravedad de un triángulo se trazan paralelas á tres rectas isobáricas, cortan los lados de aquél, convenientemente elegidos, en tres puntos que están en línea recta.

Creemos que los resultados á que hemos llegado son suficientemente interesantes para justificar el estudio que hemos hecho de los que hemos llamado *triángulos brocardianos.*

NOTA SEGUNDA

1. La ecuación de un círculo en *coordenadas baricéntricas* es de la forma:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\rho_a\alpha+\rho_b\beta+\rho_c\gamma)-\Sigma a^2\beta\gamma=0,$$

en la que los parámetros p_a, p_b, p_c son las potencias de los vértices dèl triángulo respecto de dicho círculo. El conocimiento de estas cantidades permite determinar geométricamente el centro, pues se ve fácilmente, que no es otra cosa que el *centro radical* de los círculos descriptos desde A, B, C con los radios respectivos $\sqrt{p_a}$, $\sqrt{p_b}$, $\sqrt{p_c}$.

Aún cabe otra interpretación geométrica, consecuencia de observar que es el recíproco del centro radical de los *círculos semiderivados* del propuesto, entendiendo por tales, los tres que se obtienen cambiando sucesivamente de signo cada uno de los parámetros (véase nuestra Memoria del Congreso de Nantes 1899).

Es evidente que á cada círculo del plano se puede hacer corresponder el punto que tiene por coordenadas p_a, p_b, p_c y al que hemos llamado, por evitar perífrasis, *punto adjunto al círculo*. La recíproca no es cierta: el conocimiento del *punto adjunto* no da á conocer el círculo, sólo determinará una recta, lugar geométrico de los centros de los círculos que tienen por adjunto el punto dado y que se obtendrá bajando desde el *circuncentro* la perpendicular á la recta

$$p_a \alpha + p_b \beta + p_c \gamma = 0,$$

que viene á ser el eje radical común al *círculo circunscripto* y á los círculos en cuestión. Para que el círculo quede completamente determinado, es forzoso adjuntar un dato, que pudiera ser el *peso de dicho punto*, es decir, dar, además de las coordenadas relativas p_a, p_b, p_c, el valor de la suma $p_a + p_b + p_c$.

Así, por ejemplo, el *círculo de Longchamps* quedará conocido sabiendo que el punto adjunto es el *punto de Lemoine y que el peso de este punto es m^2*. El círculo de Brocard tiene por punto adjunto el *recíproco del punto de Lemoine y peso* $\dfrac{n^4}{m^2}$.

Puede suceder que, en lugar de conocer las coordenadas del *punto adjunto*, se conozca una recta, sobre la cual se mueve dicho punto y entonces sale como consecuencia otra sobre la cual ha de estar el centro del círculo. Así, por ejemplo, se deduce sin dificultad que si el punto adjunto se mueve sobre una recta pasando por G, el centro del círculo está en otra pasando por O *(circuncentro)*.

En particular: 1.º, si el punto adjunto se mueve sobre la recta GK, el centro describe *la recta de Euler;* 2.º, si camina el citado punto en la recta que une G al *recíproco del punto de Lemoine*, el centro se mueva en el *diámetro de Brocard*.

2. La consideración del *punto adjunto* unida á la propiedad citada, que el centro de un círculo es *centro radical* de los descriptos desde los vértices, con los radios $\sqrt{\rho_a}$, $\sqrt{\rho_b}$, $\sqrt{\rho_c}$, nos ha conducido á algunos resultados curiosos; citaremos entre ellos los siguientes:

1.º Si para tres círculos de centros A, B, C, cuyas distancias representaremos por a, b, c y los radios r_1, r_2, r_3, se efectúa la relación

$$\frac{r^2_1 - r^2_3}{r^2_1 - r^2_2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2},$$

el *centro radical* de dichos círculos describe la *recta de Euler* del triángulo que forman los centros

2.º Si la relación es:

$$\frac{r^2_1 - r^2_3}{r^2_1 - r^2_2} = \frac{b^2\,(a^2 - c^2)}{c^2\,(a^2 - b^2)},$$

el centro radical se mueva sobre el *diámetro de Brocard.*

3.º En general, se realiza:

$$\frac{r^2_1 - r^2_3}{r^2_1 - r^2_2} = \frac{b^2\alpha_1 + (a^2 - c^2)\,\beta_1 - b^2\gamma_1}{c^2\alpha_1 - c^2\beta_1 + (a^2 - b^2)\,\gamma_1},$$

el centro radical está sobre la recta que une el *circuncentro* al punto que tiene por coordenadas α_1, β_1, γ_1.

3. Lo anteriormente expuesto basta para hacer ver las curiosas consecuencias que se deducen del estudio de los *parámetros* que figuran en la *ecuación baricéntrica* de un círculo; pero aún resaltará más la importancia de un estudio sistemático cuando éste se dirija á modificar convenientemente dichos parámetros para obtener una serie ilimitada, por decirlo así, de *círculos notables del triángulo*, deducidos, según las leyes que vamos á exponer, de otros círculos y aun de puntos notables, según hicimos en las Memorias que hemos presentado en los Congresos de *Nantes* y *Saint-Etienne.*

Consideremos de nuevo la ecuación de un círculo Σ en coordenadas baricéntricas:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\,(\rho_a\,\alpha + \rho_b\,\beta + \rho_c\,\gamma) - \Sigma a^2\beta\gamma = 0;$$

podemos deducir de éste otros dos, Σ' y Σ'', cuyas potencias, respecto de los vértices A, B, C del triángulo fundamental, sean, respectivamente, p_b, p_c, p_a, y p_c, p_a, p_b. Diremos que Σ' es el *primer asociado* y Σ'' *el segundo asociado* á Σ. Se ve fácilmente que el *centro radical* de los tres círculos $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ es el *centro de gravedad* de ABC, y, por consiguiente, si uno de ellos pasa por G (centro de gravedad), también pasan los otros dos. He aquí un papel importante que el baricentro desempeña relativamente á los círculos notables del triángulo.

La ecuación del círculo ortotómico de $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$, es:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \Sigma \frac{b^2 + c^2 - (p_a + p_b + p_c)}{3} \alpha - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0,$$

y su radio tiene por expresión

$$\delta = \frac{1}{3} \sqrt{3(p_a + p_b + p_c) - m^2}.$$

Claro está que de esta fórmula se deduce que si para varios círculos se efectúa

$$p_a + p_b + p_c = \text{constante},$$

todos estos círculos y sus asociados tienen el mismo *círculo ortotómico*.

Fácil es construir geométricamente los *círculos asociados* ó uno dado; basta observar que su centro (refiriéndose, por ejemplo, al *primer asociado*), es el *centro radical* de los descriptos desde A, B, C, como centro con los radios respectivos;

$$\sqrt{p_b} = Bt', \quad \sqrt{p_c} = Ct'', \quad \sqrt{p_a} = At; \quad Bt', \quad Ct'', \quad At,$$

son las tangentes trazadas de B, C, A al círculo Σ. Por otra parte, el círculo es ortotómico á los $(A), (B), (C)$.

La anterior construcción es realizable aunque los parámetros p_a, p_b, p_c sean negativos, pues si bien los círculos $(A), (B), (C)$ son imaginarios, en este caso, se puede encontrar su centro radical.

Una construcción análoga puede emplearse para el *segundo asociado* y los *semiasociados*, de que hablaremos más adelante, y hasta para los *asociados y semiasociados* á un *punto notable*, considerado como círculo de radio nulo *(círculo evanescente)*, que también trataremos después.

4. La aplicación de la teoría anterior á los *círculos notables* conduce á diversas propiedades; citaremos por ejemplo las siguientes:

1.ª El *círculo circunscripto*, y más generalmente todo círculo concéntrico con él, coincide con sus asociados.

2.ª El *círculo de Brocard* y sus asociados tienen por *ejes radicales* las rectas que unen el *baricentro* al *punto de Lemoine* y á los *puntos directo y retrógrado de Brocard*.

3.ª Para el grupo que forman el *círculo de M' Cay* y sus asociados resultan como ejes radicales las medianas.

4.ª Para los *círculos de Neuberg* resultan también las medianas, y el *eje radical* del *círculo ortotómico* y el circunscripto, es la transversal recíproca del eje de homología de ABC y el *segundo triángulo de Brocard*.

5.ª Para el *círculo conjugado* resultan la *polar trilineal* del *punto de Steiner* y sus isobáricas; así como el *eje radical* del *ortotómico* y el *circunscripto* es la *polar trilineal del ortocentro*.

6.ª Para los *círculos de Tucker* (y por consiguiente para los de *Lemoine* y *Taylor)*, se obtienen como ejes radicales las rectas que unen el *baricentro* á los *puntos directo, recíproco y retrógrado de Brocard*, etcétera etc.

5. Para obtener los *círculos asociados* á *puntos notables*, considerados como círculos de radio nulo, basta observar (véase nuestra Memoria de Saint-Etienne) que si llamamos ρ_a, ρ_b, ρ_c á las *coordenadas tripolares* de dicho punto, su *ecuación* podrá escribirse así:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\rho^2_a\,\alpha+\rho^2_b\,\beta+\rho^2_c\,\gamma)-\Sigma\, a^2\beta\gamma=0,$$

y por consiguiente sus *círculos asociados* serán:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\rho^2_b\,\alpha+\rho^2_c\,\beta+\rho^2_a\,\gamma)-\Sigma\, a^2\beta\gamma=0$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\rho^2_c\,\alpha+\rho^2_a\,\beta+\rho^2_b\,\gamma)-\Sigma\, a^2\beta\gamma=0.$$

Haciendo aplicación á varios *puntos notables* se obtienen resultados más ó menos interesantes, citaremos por ejemplo los siguientes:

1.º Los *círculos asociados* al *circuncentro* se reducen á este mismo punto.

2.º Los asociados al *centro de gravedad* tienen por *eje radical* la recta que une dicho punto con el de Lemoine.

3.º Para el *centro del círculo inscripto* resulta que el eje radical de *sus asociados* pasa por su recíproca, y la combinación de aquel punto con los círculos asociados da por *ejes radicales* rectas que pasan, respectivamente, por el *punto directo* y el *punto inverso de Jérabek*.

4.° Para el *recíproco del ortocentro* resulta la recta que une el *baricentro* con el *punto de Lemoine* y sus *isobáricas*, etc., etc.

6. Anteriormente hemos hablado de los *círculos semiasociados*, y vamos á decir ahora á cuáles hemos dado este nombre.

Si en la ecuación de un círculo Σ *(ó de un círculo punto)* se invierten *sólo dos* de los parámetros, se obtendrán tres nuevos círculos Σ_1, Σ_2, Σ_3, que tendrán, respectivamente, por ecuaciones

$$(\alpha+\beta+\gamma)(p_a\alpha+p_c\beta+p_b\gamma)-\Sigma a^2\beta\gamma=0,$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(p_c\alpha+p_b\beta+p_a\gamma)-\Sigma a^2\beta\gamma=0;$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(p_b\alpha+p_a\beta+p_c\gamma)-\Sigma a^2\beta\gamma=0,$$

y les llamamos *primero, segundo y tercero semiasociado* á Σ.

Se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

1.ª Los círculos *semiasociados* tienen por *centro radical* el *baricentro.*

2.ª Los *ejes radicales* de un círculo y sus *semiasociados* son las *medianas.*

3.ª Los ejes radicales de los *círculos semiasociados* Σ_1, Σ_2, Σ_3 son las rectas *semirecíprocas* de los relativos á un círculo respecto de sus *asociados.*

4.ª Un círculo cualquiera, sus *asociados* y sus semiasociados tienen el mismo *círculo ortotómico.*

7. También hemos considerado en la *Memoria de Nantes* otra clase de derivación, consistente en el cambio de signo, ya de los tres parámetros, ya de uno de ellos, obteniéndose los que hemos llamado *círculos derivados* y *círculos semiderivados.*

Respecto de los primeros, diremos que son las *antiradicales* (véase más adelante) de Σ respecto del *círculo circunscripto.* Así, por ejemplo, el *círculo derivado* del de Longchamps tiene por centro el *ortocentro* de ABC y su radio es $2R$, es decir, que está circunscripto al *triángulo anticomplementario* del fundamental.

En lo que toca á los segundos, si los representamos por δ_1, δ_2, δ_3, podemos decir que los *ejes radicales* de los *pares* (Σ, δ_1), (Σ, δ_2), (Σ, δ_3) son los lados del triángulo y, por consiguiente, los *centros radicales* de los *triples* $(\Sigma, \delta_1, \delta_2)$, $(\Sigma, \delta_1, \delta_3)$, etc., son los vértices.

El centro radical de $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ es el punto que tiene por coordenadas

$$\alpha p_a=\beta p_b=\gamma p_c,$$

Así, los *círculos semiderivados del de Longhchamps* tienen por cen-

tro radical el punto *recíproco del de Lemoine*. Para el *círculo polar conjugado* resulta el *ortocentro*. El de *Brocard* da el *punto de Lemoine*.

Asimismo para los *puntos notables*, por ejemplo, el *centro radical* de los *círculos semiderivados* del punto *retrógrado de Brocard* es el *factoriano* de este punto y el de *Lemoine*, etc. Se ve también que los *círculos semiderivados* de *uno cualquiera* concéntrico con el *circunscripto* tienen por *centro radical* el *baricentro* del triángulo fundamental.

8. Así como hemos obtenido, en lo anteriormente expuesto, círculos deducidos de *un solo elemento*, círculo ó punto, en lo que sigue, bajo el nombre de *círculos radicales* y *antiradicales*, deben ser dos los elementos conocidos.

Se sabe que el lugar geométrico de los puntos tales que la *relación de potencias*, respecto de dos circunferencias fijas, conserva un valor constante $\frac{m}{n}$ es *una circunferencia*. Si suponemos $m = -n$, esta línea será el lugar geométrico de los puntos de *potencias iguales* y de *signo contrario*, que por una analogía natural la hemos llamado (*Journal de Longchamps*, 1896 y *Progreso Matemático*, 1897) *circunferencia radical* ó *círculo radical* de los propuestos.

Llamemos P_o y $P_{o'}$ las potencias de un punto P respecto de dos círculos de centros o y o'. Se tendrá $P_o + P_{o'} = 0$, y, por consiguiente, si llamamos l y l' á las distancias de P á los centros, y R y R' á los radios, se tendrá:

$$l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2,$$

el centro del círculo en cuestión es, pues, el medio de oo' y su radio ρ se determinará por la fórmula

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2},$$

siendo d la distancia de los centros de los círculos dados.

Fácil es ver que si los círculos son tangentes, ya exteriores ó interiores, secantes ó interiores, el *círculo radical* es siempre real, pero si son exteriores podrá ser real ó imaginario.

Para la construcción geométrica del *círculo radical* de dos *secantes* ó *tangentes*, basta observar que se conoce inmediatamente el centro y uno de los puntos de la circunferencia. Si son *concéntricos*, el *círculo radical* tendrá el mismo centro que éstos y su radio lo dará la fórmula

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

En el caso de *círculos exteriores ó interiores*, se puede determinar por medio de las consideraciones que vamos á exponer:

Consideremos tres círculos o, o', o''; llamemos $\pi_{oo'}$ el círculo radical de o y o', $\pi_{oo''}$ el de o y o''; si sus circunferencias se cortan se tendrá en los puntos de intersección:

$$P_o = -P_{o'} \qquad P_o = -P_{o''},$$

y, por consiguiente,

$$P_{o'} = P_{o''},$$

es decir, que el *eje radical* de o' y o'' es el mismo que el de $\pi_{oo'}$ y $\pi_{oo''}$. Cuando los *círculos radicales* son imaginarios subsiste el hecho, que también puede demostrarse analíticamente, como haremos más adelante.

Lo expuesto da el medio de construir el *círculo radical* de dos exteriores (real ó imaginario) ó de dos interiores. Córtense por una tercera o'' y determínese la *radical* de o y o', después el *eje radical* de o' y o''; se tendrá así uno ó dos puntos de la que se quiere determinar y cuyo centro es conocido. Es preciso elegir convenientemente el *círculo auxiliar* para que el *eje* y la *circunferencia radical* se corten.

El eminente profesor *J. Neuberg* nos indicó la construcción siguiente: Córtense por una tercera que marque los puntos F, G y F', G', las cuerdas FG y $F'G'$ se cortarán en un punto K. Desde K como centro, con un radio igual á la tangente trazada desde K al círculo O, descríbase el círculo (K). El radio del círculo que se busca es igual á la tangente (real ó imaginaria) trazada desde el *medio de la línea de centro* al círculo (K).

En el caso particular de ser las *circunferencias dadas ortogonales*, se ve fácilmente que la *radical pasa por sus centros*. La recíproca es cierta.

Si las ecuaciones de dos circunferencias son

$$C = 0 \quad C' = 0,$$

la *circunferencia radical* tendrá por ecuación

$$C + C' = 0.$$

Fácil es ahora demostrar analíticamente lo que ya hemos manifestado: que si se tienen *tres circunferencias o, o', o''* y las agrupamos de *dos* en *dos*, el eje radical de las *circunferencias radicales* de dos grupos lo es del tercero.

Se tiene, en efecto:

$$\text{Circunferencia radical de..} \left\{ \begin{array}{l} C = 0 \\ C' = 0 \end{array} \right\} \text{ es } C + C' = 0;$$

$$\text{Eje radical de..........} \left\{ \begin{array}{l} C + C' = 0 \\ C + C'' = 0 \end{array} \right\} \text{ es } C' - C'' = 0,$$

$$\text{Circunferencia radical de..} \left\{ \begin{array}{l} C = 0 \\ C'' = 0 \end{array} \right\} \text{ es } C + C'' = 0,$$

$$\text{Eje radical de..........} \left\{ \begin{array}{l} C' = 0 \\ C'' = 0 \end{array} \right\} \text{ es } C' - C'' = 0.$$

9. La consideración de *circunferencias radicales* en la *Geometría del triángulo*, haciendo aplicación á sus elementos notables *(círculos ó puntos)*, puede ser útil, ya *como medio de demostración*, ya *para investigar*.

Tratemos, por ejemplo, de demostrar *que las circunferencias descriptas sobre las medianas de un triángulo como diámetros tienen por ejes radicales las alturas*. En efecto, si sobre los lados de un triángulo como diámetros se describen circunferencias, las radicales de éstas son las descriptas sobre las medianas, y por consiguiente, los *ejes radicales* de las últimas son los mismos que los de las primeras, es decir, *las alturas*. Tenemos así *seis* circunferencias que tienen por *centro radical común* el *ortocentro*.

Consideremos como segunda aplicación las circunferencias descriptas desde los medios de los lados con radios iguales á las medianas correspondientes, á las que hemos llamado (por las razones expuestas en el *Progreso Matemático*, volumen V, pág. 70), *circunferencias potenciales*.

Es evidente que estas circunferencias tienen por diámetros las *medianas* del *triángulo anticomplementario*, y por consiguiente, son las *radicales* de las descriptas sobre los lados de este último triángulo, resultando como consecuencia que las *circunferencias descriptas desde los vértices de un triángulo con radios iguales á los lados opuestos, tienen por circunferencias radicales las potenciales de dicho triángulo*. Resulta, pues, un segundo grupo de *seis circunferencias con el mismo centro radical*.

Siendo el *círculo de Longchamps ortotómico* á los que antes hemos mencionado *descriptos desde los vértices como centros*, deducimos de lo anteriormente expuesto que las circunferencias radicales de estos *tres círculos* y el *primero* son las que tienen por diámetros los segmentos comprendidos *entre los vértices del triángulo dado* y el *ortocentro* de su *anticomplementario*.

Para terminar esta parte relativa á *círculos radicales*, haremos notar, con nuestro excelente amigo, el sabio Profesor de Milán, V. Retali, que *el lugar de los medios de las cuerdas que la tangente á la cónica contravariante intercepta en dos circunferencias, es la circunferencia radical*, es decir, que, dados dos círculos (o) y (o'), el *círculo radical es la polar con relación á* o *(ú* o'*) de la cónica contravariante*.

10. La consideración de *círculos radicales* nos lleva por una pendiente natural á la cuestión siguiente: Dadas dos circunferencias (o) y (ρ), determinar otra (o'), que, unida á la primera, dé por circunferencia radical la segunda. A dicha circunferencia ó círculo lo llamaremos circunferencia (ó círculo) *antiradical* de (o) respecto de (ρ). Es evidente, en vista de lo anteriormente expuesto, que para obtener la *circunferencia antiradical* de (o) respecto de (ρ), bastará tomar una distancia $\rho o' = o\rho$ y así se tendrá su centro o'; en cuanto al radio, tendrá por valor:

$$R' = \sqrt{2(\rho^2 + d^2) - R^2}\,;$$

para que la circunferencia sea real, tendrá que efectuarse

$$d > \sqrt{\frac{R^2 - 2\rho^2}{2}}\,,$$

y en el caso de ser

$$2(\rho^2 + d^2) = R^2,$$

se reducirá á un círculo punto.

Si la circunferencia (ρ) se reduce á un punto ρ, el *radio de la antiradical* tendrá por valor

$$R' = \sqrt{2d^2 - R^2}\,,$$

y la *antiradical* será *real*, *círculo punto* ó imaginaria, según se efectúe

$$2d \gtreqless R\sqrt{2}\,.$$

De la expresión que da el valor de R' se deduce:

$$2(R^2 + R'^2) = \overline{oo'}^2.$$

Resultando que los puntos de contacto de las tangentes comunes á una circunferencia (o) y su *antiradical* (o'), respecto de un punto ρ, están *cuatro á cuatro sobre dos rectas, que cortan la línea de centros en el pie de la polar del punto respecto de la circunferencia, y las tangentes dirigidas de un punto cualquiera de estas rectas á* (o) y (o'), *están en relación armónica.*

Si permaneciendo (o) fija, ρ se mueve sobre oo', la envolvente de los *círculos antiradicales* es una *hipérbola equilátera.*

Si las dos circunferencias degeneran en puntos, la *antiradical será siempre real*, obteniéndose su centro como anteriormente, y su radio tendrá por valor $d\sqrt{2}$, llamando d á la distancia de los dos puntos. La hipérbola antes considerada degenera en sus asíntotas.

En la Memoria que hemos publicado en el *Journal de Longchamps* hemos estudiado, como aplicación de lo anterior, las *circunferencias antiradicales* de un vértice del triángulo fundamental respecto de otro, en el orden A, B, C, obteniendo tres círculos (C_1), (A_1), (B_1), que gozan de algunas propiedades interesantes. Citaremos por ejemplo las siguientes:

1.ª Tienen por *centro radical* el punto O. 2.ª Su *círculo ortotómico* es el *circunscripto*. 3.ª Las polares de O respecto de estos círculos pasan por los vértices del *triángulo tangencial*, es decir, el formado por los *puntos asociados* al *punto de Lemoine*. 4.ª Si se traza por C una cuerda cualquiera mn en el círculo (A_1) (y análogamente para los otros) los puntos m, n, B y A_1 son concíclicos. 5.ª Las polares de uno de los puntos de Brocard respecto de las circunferencias que estudiamos pasan por el punto diametralmente opuesto de la *circunferencia adjunta* correspondiente. 6.ª Análogamente para los *centros isógonos* y los círculos de Torricelli. 7.ª Los *ejes radicales* de los *círculos de Neuberg* y los (A_1), (B_1), (C_1) pasan por los vértices del primer *triángulo de Brocard*. 8.ª Las *polares* del punto de Tarry respecto de estos círculos concurren en el *punto de Steiner*. 9.ª Los centros forman un triangulo que es *triplemente homológico* con el fundamental.

Por último, la ecuación baricéntrica de estos círculos, por ejemplo, el (A_1) es:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[(2b^2 - c^2)\alpha + 2a^2\beta - a^2\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

11. Los *ejes radicales*, *círculos radicales* y *círculos antiradicales*, son un caso particular de lo que podríamos llamar *círculo radical de orden q* de los círculos (C) y (C'), es decir, el lugar geométrico de los puntos tales, que la relación de potencias tiene un valor q *(entero ó fraccionario)*. Si las ecuaciones de (C) de (C') son respectivamente

$$(C)\ldots\ldots\quad (\alpha+\beta+\gamma)(l\alpha+m\beta+n\gamma)-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$
$$(C')\ldots\ldots\quad (\alpha+\beta+\gamma)(l'\alpha+m'\beta+n'\gamma)-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

el *círculo radical de orden q* que llamaremos (ρ_q), tendrá por ecuación:

$$(\rho_q)\ldots\ldots(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{ql'-l}{q-1}\alpha+\frac{qm'-m}{q-1}\beta+\frac{qn'-1}{q-1}\gamma\right]-$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma=0,$$

la hipótesis $q=-1$, da el *círculo radical*; $q=2$, el *círculo antiradical*, y finalmente, $q=1$ (después de haber suprimido el denominador $(q-1)$), el *eje radical.*

Para el caso de que los elementos de que se parte sean *círculos-puntos*, al tratar de encontrar los *círculos radicales* y *antiradicales*, ó los otros círculos anteriormente considerados, se hace preciso conocer la ecuación de los primeros en *coordenadas baricéntricas:* en nuestra Memoria de *Saint-Etienne* hemos dado dichas ecuaciones para *36 puntos notables* del plano del triángulo.

Citemos tres ó cuatro como ejemplo:

Centro de gravedad (G):

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{2m^2-3a^2}{q}\alpha+\frac{2m^2-3b^2}{q}\beta+\frac{2m^2-3c^2}{q}\gamma\right]-$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

Punto de Lemoine (K):

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2(2m^2-3a^2)}{m^4}\alpha+\frac{a^2c^2(2m^2-3b^2)}{m^4}\beta+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2b^2(2m^2-3c^2)}{m^4}\gamma\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

Punto de Brocad (Ω_1):

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^4c^4}{n^4}\alpha+\frac{a^4c^4}{n^4}\beta+\frac{a^4b^4}{n^4}\gamma\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

. . . .

. . . .

Ya hemos dicho anteriormente lo que representan las cantidades m^2 y n^4.

NOTA TERCERA

1. Otra aplicación que hemos hecho á la Geometría del triángulo es consecuencia de una transformación geométrica que hemos ideado y dado el nombre de *Transformación por rectas isobáricas*, que dimos primero á conocer en la Revista italiana *Le Matematiche* y después bajo otra forma, y con más extensión, en la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid* (tomo VI, número 6).

Consiste la citada transformación en reemplazar en un *triángulo isobárico* (ya hemos dicho que llamamos así á un triángulo en el que los vértices son puntos isobáricos) cada vértice por el lado opuesto, y recíprocamente. Así, á la recta que tiene por ecuación

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

se substituye el punto cuyas coordenadas son

$$\alpha:\beta:\gamma=l^2-mn:m^2-ln:n^2-lm$$

y al punto que tiene por coordenadas α_1, β_1, γ_1 se substituye la recta que tiene por ecuación

$$(\alpha^2{}_1-\beta_1\gamma_1)\,\alpha+(\beta^2{}_1-\alpha_1\gamma_1)\,\beta+(\gamma^2{}_1-\alpha_1\beta_1)\,\gamma=0.$$

Es evidente que á los lados del triángulo fundamental corresponden los vértices opuestos y, recíprocamente, que á toda recta pasando por el *baricentro* le corresponde este punto, y finalmente, que á la *recta del infinito corresponden puntos en el infinito.*

2. De otra manera puede interpretarse nuestra transformación. Volvamos á considerar la recta R que tiene por ecuación baricéntrica

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

y hallaremos su polo respecto de la elipse imaginaria

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

que tiene por centro el *baricentro* del triángulo de referencia.

Obtendremos así el punto M

$$\alpha : \beta : \gamma = l : m : n.$$

Si ahora transformamos el punto así obtenido por una *inversión de Hirst*, siendo *la cónica de los puntos dobles la elipse de Steiner circunscripta*, resultará el punto M'

$$\alpha : \beta : \gamma = l^2 - mn : m^2 - ln : n^2 - lm$$

la transformación hace, pues, corresponder á la recta R el punto M' y recíprocamente.

3. Si consideramos en general una curva cuya ecuación baricéntrica sea

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

la condición para que la recta

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

le sea tangente, ó en otros términos, la *ecuación tangencial* de la curva será de la forma

$$\varphi(u, v, w) = 0.$$

El punto correspondiente á la recta, es

$$\alpha : \beta : \gamma = u^2 - vw : v^2 - uw : w^2 - uv,$$

y eliminando los parámetros u, v, w, entre estas últimas ecuaciones y la

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

se tendrá el lugar geométrico de los puntos correspondientes á las tangentes de

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

es decir, la transformada de la curva propuesta; para hacer esta eliminación basta observar que siendo u, v, w, proporcionales respectivamente á $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\gamma^2 - \alpha\beta$, resta substituir sus valores en la $\varphi = 0$, obteniéndose para la transformada

$$\varphi(\alpha^2 - \beta\gamma, \beta^2 - \alpha\gamma, \gamma^2 - \alpha\beta) = 0.$$

Si la curva dada es de la clase n resultará una ecuación de grado $2n$, pero podrá rebajarse; así, por ejemplo, si la curva toca la *recta del infinito*, como á esta recta corresponden puntos en el infinito, la ecuación de la transformada contendrá el factor $\alpha + \beta + \gamma$; análogamente aparecerán los correspondientes á las *tangentes imaginarias* si existen trazadas desde el baricentro.

Podémos proceder inversamente, es decir, en lugar de obtener la curva transformada, como lugar de puntos, considerarla como *envolvente de rectas*.

Volvamos á considerar la curva que tiene por ecuación

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

la recta correspondiente al punto (α, β, γ) tiene por coordenadas tangenciales

$$u : v : w = \alpha^2 - \beta\gamma : \beta^2 - \alpha\gamma : \gamma^2 - \alpha\beta,$$

y eliminando α, β, γ, tendremos la ecuación

$$f(u^2 - vw, v^2 - uw, w^2 - uv) = 0,$$

que será en coordenadas tangenciales la transformada de

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

4. Supongamos que la recta R pase por un punto fijo $M_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ y vamos á encontrar el lugar geométrico del punto correspondiente, ó en otros términos, tratemos de encontrar la línea transformada de un haz de rectas de vértice M_1. Se tendrá:

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = 0,$$

y eliminando l, m, n entre esta ecuación y las de las *isobáricas* de R, resulta

$$\alpha_1 \alpha^2 + \beta_1 \beta^2 + \gamma_1 \gamma^2 - \alpha_1 \beta\gamma - \beta_1 \alpha\gamma - \gamma_1 \alpha\beta = 0,$$

que representa una elipse, puesto que

$$\Delta_1 = -\frac{3}{4}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)^2 < 0,$$

degenerando en dos rectas imaginarias, pasando por el baricentro cuando el vértice del haz coincide con dicho punto.

Si el punto fijo está en el infinito, el lugar correspondiente se descompone en una recta pasando por el baricentro y la recta del infinito.

Las cónicas representadas por la ecuación anterior pasan por el centro de gravedad del triángulo y tienen sus centros sobre la recta que une M_1 con su complementario. Además, los ejes son paralelos. La polar de M_1 respecto de las cónicas es la recta correspondiente al punto en la transformación considerada.

Si en particular M_1 es el punto K (punto de Lemoine), la elipse correspondiente tiene por eje mayor el segmento GH_0 (H_0), es el recíproco del ortocentro ó el anticomplemento de K, siendo la tangente en G la *transversal recíproca* del eje de homología de ABC y el *segundo triángulo de Brocard* $A_2B_2C_2$, y por consiguiente, paralela á la *recta de Longchamps*. El eje menor es paralelo á la *transversal recíproca* del *eje de homología* de ABC y del *primer triángulo de Brocard*. La polar de K respecto de la cónica es naturalmente paralela al eje menor.

Si el vértice del haz es el pié de *una mediana*, por ejemplo, M_1 (0, 1, 1), resulta para ecuación de la transformada

$$\beta^2 + \gamma^2 - \alpha(\beta + \gamma) = 0,$$

que se ve fácilmente representa la *elipse de Steiner inscripta* en el triángulo formado por las *intermedianas* $A'C'$, $A'B'$ y la paralela á BC trazada por A.

Finalmente, si M_1 coincide con el vértice A, resulta

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 0,$$

que representa la *elipse de Steiner* circunscripta al triángulo BCA_1 simétrico del propuesto respecto del medio de BC.

La consideración de nuevos puntos, nos llevaría seguramente á resultados interesantes.

A la ecuación de la cónica correspondiente al punto M_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ puede dársele la forma

$$L^2_1 - L_2 L_3 = 0,$$

siendo $L_1 = 0$ la ecuación de la recta correspondiente á M_1 y $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, las de sus isobáricas. Resulta, pues, que dicha cónica hace respecto del triángulo formado por M_1 y sus *isobáricas* el mismo papel que la $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ respecto del triángulo fundamental. Este hecho, que podía preverse, permite determinar con facilidad, geométricamente, sus elementos.

5. Consideremos ahora, correlativamente, en lugar de varias rectas en haz, *varios puntos en línea recta*, ó, en otros términos, vamos á encontrar la transformada de la recta L_1, que tiene por ecuación

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Se ve *à priori* que la transformada es una cónica.

En efecto, cuando el punto M_1 recorre dicha recta, el M', que tiene por coordenadas

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha^2_1 - \beta_1\gamma_1 : \beta^2_1 - \alpha^2_1\gamma_1 : \gamma^2_1 - \alpha_1\beta_1$$

describe la cónica

$$\Sigma l\alpha^2 - \Sigma l\beta\gamma = 0,$$

y, por consiguiente, la recta

$$\Sigma(\alpha^2_1 - \beta_1\gamma_1)\alpha = 0,$$

polar de M' respecto de la elipse imaginaria

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

envolverá otra cónica.

Para encontrar su ecuación, bastará seguir el procedimiento que hemos empleado en las Memorias citadas, y de este modo se llega á la ecuación:

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 - 4\,(m\alpha + n\beta + l\gamma)\,(n\alpha + l\beta + m\gamma) = 0,$$

ó bien

$$L^2_1 - 4\,L_2 L_3 = 0,$$

representando por $L_1 = 0$ la ecuación de la recta dada y por $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, las de sus isobáricas. La ecuación obtenida demuestra que la transformada es una *parábola* que toca las rectas $L_2 = 0$ y $L_3 = 0$ sobre la $L_1 = 0$. Las coordenadas de los puntos de contacto son:

$$(L_1 L_3)\ldots\ldots \quad \alpha : \beta : \gamma = m^2 - ln : n^2 - lm : l^2 - mn$$
$$(L_1 L_2)\ldots\ldots \quad \alpha : \beta : \gamma = n^2 - lm : l^2 - mn : m^2 - ln$$

puntos isobáricos del correspondiente á L_1.

Resulta, pues, que la cónica obtenida es una *parábola de Artz* del triángulo formado por L_1 y sus isobáricas, triángulo que es *triplemente homológico* del propuesto y con el mismo baricentro. Si lo representamos por $A_1 B_1 C_1$, se ve fácilmente que la dicha parábola toca la recta que une los puntos medios b_1 y c_1 de $A_1 C_1$ y $A_1 B_1$ y que la dirección conjugada á $B_1 C_1$ es la *mediana* $A_1 a_1$; ésta es, pues, la dirección del *eje*. El *foco* es el punto de intersección de la recta $A_1 K_1$ (siendo K_1 el *punto de Lemoine* del nuevo triángulo), con el círculo circunscripto al *triángulo* $A_1 b_1 c_1$.

Para la ecuación de la *directriz* y coordenadas del foco hemos obtenido:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0$$
$$\alpha : \beta : \gamma = 2\,lP - n\,Q - mR : 2\,m\,Q - lR - n\,P : 2\,n\,R - m\,P - l\,Q.$$

Habiendo hecho en las expresiones anteriores:

$$P = mc^2 + nb^2 - lbc \cos A$$
$$Q = na^2 + lc^2 - mac \cos B$$
$$R = lb^2 + ma^2 - nab \cos C$$

Para la ecuación del eje resulta una forma algo más complicada, pero fácil de deducir de las anteriores.

Si consideramos el caso particular de ser $m = n = 0$, es decir, en que la recta considerada es el lado BC del triángulo fundamental, entonces se obtiene la *parábola de Artz* $\alpha^2 - 4\beta\gamma = 0$, y análogamente para los otros dos lados.

Podemos, pues, decir: *que si un triángulo inscripto en el de referencia tiene por vértices tres puntos isobáricos, la envolvente de sus lados está formada por las tres parábolas de Artz del primer grupo.*

Resulta, por consiguiente, que las *parábolas de Artz* son un caso particular de las que hemos obtenido, y que su existencia es debida á la propiedad de que goza el triángulo fundamental de ser un *triángulo isobárico*, como sucede al $L_1 L_2 L_3$ antes considerado, y más generalmente á los que sirven de fundamento á la transformación que hemos ideado.

Debemos observar que dadas en general dos rectas, sólo se pueden encontrar en ellas dos puntos (uno sobre cada recta) que sean isobáricos uno de otro (un punto y su primer isobárico), pero si las rectas son isobáricas, entonces á cada punto de una de las rectas corresponde en la otra su isobárico. Las *parábolas de Artz generalizadas*, á que hemos llegado, se han obtenido, en suma, por la siguiente generación:

Dadas dos rectas isobáricas L_1 *y* L_2, *la envolvente de las rectas que unen pares de puntos isobáricos, elegidos uno en cada una de ellas, es una parábola representada por la ecuación*

$$L^2{}_1 - 4\, L_2 L_3 = 0.$$

En particular, si las dos rectas isobáricas son dos lados del triángulo de referencia, se obtienen las parábolas de Artz.

Este resultado se explica fácilmente, pues las dichas rectas de unión dividen los lados del triángulo en partes proporcionales, que es cabalmente la generación por la cual llegó su autor á determinarlas.

6. Si consideramos una recta

$$L = l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

y sus dos isobáricas L' y L'', puesto que la ecuación de una *cónica circunscripta* al triángulo $L\,L'\,L''$ es

$$p\,L\,L' + q\,L\,L'' + r\,L'\,L'' = 0,$$

resulta para la *elipse de Steiner circunscripta* á dicho triángulo

$$\Sigma lm\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\Sigma l^2 + \Sigma lm)\,(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) = 0.$$

Si

$$lm + mn + ln = 0,$$

es decir, si el *polo baricéntrico* de L está sobre la *elipse de Steiner circunscripta al triángulo fundamental*, la ecuación anterior se reduce á

$$\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0,$$

de modo que la *elipse de Steiner circunscripta* al triángulo de las isobáricas $L L' L''$ coincide con la *elipse de Steiner* del triángulo fundamental. Podemos, pues, decir, que *cuando el polo baricéntrico de una recta cae sobre la elipse de Steiner circunscripta, el triángulo formado por ella y sus isobáricas queda inscripto en dicha elipse.*

Por otra parte, se ve facilmente que si el *polo baricéntrico* cumple la condicion anterior, la envolvente de la recta correspondiente es la *elipse de Steiner inscripta;* resulta, pues, que si una recta *toca la elipse de Steiner inscripta*, el triángulo formado por ella y sus isobáricas apoya sus vértices en la de *Steiner circunscripta*. Es, por otra parte, evidente que cuando una recta satisface la circunstancia anterior, lo mismo sucede con sus isobaricas, puesto que siendo los *polos baricéntricos puntos isobáricos*, todos estarán en la elipse circunscripta al estar uno de ellos. Se tienen, pues, ∞^1 triángulos inscriptos en una de las elipses y circunscriptos á la otra.

7. Para terminar esta *Nota* citaremos dos de las aplicaciones de la transformación expuesta, ó *cónicas notables* del triángulo, que hemos hecho en otra ocasión.

Sea, en primer lugar, la elipse

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

ya considerada anteriormente.

Por el procedimiento explicado resulta para la transformada la *cuártica*

$$\alpha^2(\alpha^2 - 6\,\beta\gamma) + 4\,\alpha(\beta^3 + \gamma^3) - 3\,\beta^2\gamma^2 = 0,$$

que tiene por *ecuación paramétrica*

$$\alpha : \beta : \gamma = 3\,p^2 : 1 - 2\,p^3 : p^4 - 2\,p.$$

Esta *cuártica* está caracterizada por las propiedades siguientes, como nos hizo notar nuestro excelente amigo el sabio Profesor de *Milán Sr. Virginio Retali.*

Si G es el *baricentro* del triángulo fundamental y G_1 y G_2 los puntos en el *infinito* de la *elipse de Steiner*, la *cuártica* (que es *tricuspidal*), tiene por *cúspides* los citados puntos; las *tangentes cuspidales* son las rectas AG, AG_1 y AG_2; la *cuártica*, siendo de *tercera clase*, tiene *una sola bitangente*, que es la recta BC, siendo B y C los puntos de contacto. Por último, si se proyecta la *elipse de Steiner* según *una circunferencia*, la *cuártica* se proyectará en una *cardioide*.

Sea como segunda aplicación encontrar la transformada de las cónicas circunscriptas al triángulo, que, como tales, tienen por ecuación

$$l\beta\gamma + m\alpha\gamma + n\alpha\beta = 0.$$

El empleo del método conduce á la *ecuación tangencial*

$$F(u, v, w) = \Sigma l v^2 w^2 - \Sigma l u (v^2 + w^2) + uvw \Sigma l n = 0,$$

de la cual podría deducirse la puntual, eliminando u, v, w entre las ecuaciones

$$F'_u : F'_v : F'_w = \alpha : \beta : \gamma$$

y la

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

La curva obtenida es *una séstica* que tiene por *tangentes dobles* los lados del triángulo GG_1G_2, anteriormente considerado, y toca la *elipse de Steiner circunscripta* en cuatro puntos, tres de los cuales son las intersecciones de *dicha elipse* con las *cevianas del baricentro*.

Aquí damos fin á esta *Nota*, y á todo el trabajo, faltos de tiempo para exponer otras ideas que se nos ocurren; pero no queremos dejar de consignar la satisfacción que sentimos al escribir hoy, en el idioma patrio, lo que anteriormente habíamos dado á la imprenta en lengua extranjera.

La Coruña, Septiembre, 1908.