ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR

L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Fusionnée avec

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par Le Verrier en 1864)

RECONNUES D'UTILITÉ PUBLIQUE

CONGRÈS DE SAINT-ÉTIENNE

1897

M. Juan J. DURAN-LORIGA

NOTES DE GÉOMÉTRIE

PARIS

U SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION

28, RUE SERPENTE, 28

(Hôtel des Sociétés savantes)

ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Fusionnée avec

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE SAINT-ÉTIENNE — 1897

M. Juan J. DURAN-LORIGA

Commandant d'Artillerie, à La Corogne.

NOTES DE GÉOMÉTRIE

[K 2 d]

— *Séance du 7 août 1897* —

INTRODUCTION

Dans deux notes publiées dans le Journal de M. de Longchamps (voyez J.-E. 1896, page 78, et janvier, février et mars 1897), nous avons fait une étude élémentaire des cercles que nous avons nommés « cercles radicaux et anti-radicaux » et nous manifestions l'espoir que son introduction systématique dans la géométrie, en particulier dans la « géométrie du triangle », conduira à des faits intéressants. Mais, pour obtenir immédiatement l'équation des susdits cercles, il est très avantageux de connaître, non seulement les équations dans les coordonnées barycentriques des cercles remarquables, mais aussi celles des points remarquables *considérés comme des cercles evanouissants*, et c'est le sujet principal du modeste travail que j'ai l'honneur de présenter au Congrès de Saint-Etienne.

Nous regrettons que le temps nous fasse défaut pour faire connaître diverses propriétés que nous avons trouvées dans l'application à la géométrie du triangle de la considération des cercles radicaux et anti-radicaux, et que nous publierons ultérieurement.

NOTATIONS

α, β, γ	coordonnées barycentriques absolues.
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$	» » relatives.
x, y, z	» normales.
ρ_a, ρ_b, ρ_c	» tripolaires.
p	demi-périmètre du triangle de référence.
S	surface » »
(C)	cercle du centre C.
P_A	puissance de A par rapport à un cercle

$$\sigma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$$

Pour les points et cercles remarquables, les notations usuelles.

ABRÉVIATIONS

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 \quad ab + bc + ac = l^2 \quad a^4 + b^4 + c^4 = q^4$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = n^4 \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2p_a \quad a^2 + c^2 - b^2 = 2p_b$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2p_c$$

GÉNÉRALITÉS

1. Soient les équations barycentriques de deux cercles

$$(C) \qquad (\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - \Sigma a^2\beta\gamma = 0$$
$$(C') \qquad (\alpha + \beta + \gamma)(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) - \Sigma a^2\beta\gamma = 0$$

L'équation du cercle radical de (C) et (C') est

$$(\rho) \quad (\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{u + u'}{2}\alpha + \frac{v + v'}{2}\beta + \frac{w + w'}{2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0$$

et celle du cercle anti-radical de (C) par rapport à (C')

$$(\rho_1) \ (\alpha + \beta + \gamma)[(2u' - u)\alpha + (2v' - v)\beta + (2w' - w)\gamma] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Plus généralement, si nous appelons *cercle radical d'ordre q* de

(C) par rapport à (C') (q entier ou fractionnaire) le cercle tel que le rapport des puissances a une valeur q, on aura l'équation

$$(\rho_q) \quad (\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{qu'-u}{q-1}\alpha+\frac{qv'-v}{q-1}\beta+\frac{qw'-w}{q-1}\gamma\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

l'hypothèse $q=-1$ dans cette équation donne le cercle radical : $q=2$, le cercle anti-radical, et finalement $q=1$ (après (d'avoir chassé le dénominateur ($q-1$)) l'axe radical.

Remarques — 1° Si dans l'équation (C) on change le signe des paramètres u, v et w l'équation

$$(\alpha+\beta+\gamma)[-u\alpha-v\beta-w\gamma]-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

représente le cercle anti-radical de (C) par rapport au cercle circonscrit. Par suite, si dans chacune des équations des cercles remarquables du triangle on change le signe des paramètres, on obtiendra tour à tour des cercles remarquables (réels ou imaginaires) en correspondance, qui sont les anti-radicaux des premiers par rapport au cercle circonscrit : de même, si l'on multiplie les paramètres par un facteur h, on obtient le cercle radical d'ordre $\dfrac{h}{h-1}$ de (O) par rapport à (C).

Enfin, on voit aisément que si l'on ajoute h^2 aux susdits paramètres, le cercle qu'on obtient se dérive de (C) au moyen des deux transformations suivantes : 1° Cercle anti-radical (ρ) de (O) par rapport à (C) ;

1° Cercle radical de (ρ) et du cercle qui a pour équation

$$(\alpha+\beta+\gamma)[2h^2\alpha+2h^2\beta+2h^2\gamma]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

qui est un cercle concentrique avec le cercle circonscrit et son rayon ρ' a pour valeur

$$\rho'=\sqrt{R^2-2h^2}.$$

2° Pour déterminer les coordonnées du centre d'un cercle, dont l'équation a la forme donnée par M. de Longchamps, nous obtenons les formules

$$\frac{\alpha}{p_b w+p_c v+a^2(p_a-u)}=\frac{\beta}{p_c u+p_a w+b^2(p_b-v)}$$
$$=\frac{\gamma}{p_b u+p_a v+c^2(p_c-w)}.$$

Ayant le centre, on peut en déduire le rayon puisque la puissance du centre égale (au signe près), le carré du rayon.

2. Equations en coordonnées barycentriques de quelques points remarquables *considérés comme des cercles-points.*

On peut voir aisément que l'équation barycentrique d'un *cercle évanouissant* dont les coordonnées du centre sont α_1, β_1, γ_1 peut s'écrire

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\rho_a{}^2\alpha + \rho_b{}^2\beta + \rho_c{}^2\gamma) - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

dans laquelle

$$\rho_a{}^2 = \frac{(\beta_1 + \gamma_1)(c^2\beta_1 + b^2\gamma_1) - a^2\beta_1\gamma_1}{\sigma^2} \ldots \quad \rho_b{}^2 = \ldots \quad \rho_c{}^2 = \ldots$$

Faisons application à quelques points remarquables.

1° Centre de gravité [G] de l'aire du triangle

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{1}$$

$$\rho_a{}^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{g} \ldots \qquad \rho_b{}^2 = \ldots \qquad \rho_c{}^2 = \ldots$$

on a donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{2m^2 - 3a^2}{g}\cdot\alpha + \frac{2m^2 - 3b^2}{g}\cdot\beta + \frac{2m^2 - 3c^2}{g}\cdot\gamma\right]$$
$$- \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

2° Point de Lemoine [K]

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}$$

$$\rho_a{}^2 = \frac{b^2c^2(2m^2 - 3a^2)}{m^4} \ldots \qquad \rho_b{}^2 = \ldots \qquad \rho_c{}^2 = \ldots$$

par suite

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2(2m^2-3a^2)}{m^4}\cdot\alpha + \frac{a^2c^2(2m^2-3b^2)}{m^4}\beta + \frac{a^2b^2(2m^2-3c^2)}{m^4}\cdot\gamma\right]$$
$$- \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

3° Orthocentre [H].

$$\frac{\alpha}{p_b \cdot p_c} = \frac{\beta}{p_a \cdot p_c} = \frac{\gamma}{p_a \cdot p_b}$$

$$\rho_a{}^2 = \frac{p_a{}^2(c^2p_c{}^2 + b^2p_b{}^2 + 2p_ap_bp_c)}{(2n^2 - q^2)^2} \ldots \qquad \rho_b{}^2 = \ldots \qquad \rho_c{}^2 = \ldots$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{p_a{}^2(c^2p_c{}^2 + b^2p_b{}^2 + 2p_ap_bp_c)}{(2n^2 - q^2)^2}\cdot\alpha + \ldots\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

4° Centre du cercle circonscrit [O].

$$\frac{\alpha}{a^2 p_a} = \frac{\beta}{b^2 p_b} = \frac{\gamma}{c^2 p_c}$$

$$\rho_a^2 = \rho_b^2 = \rho_c^2 = R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{2n^4 - q^4}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{a^2 b^2 c^2}{2n^4 - q^4}\alpha + \frac{a^2 b^2 c^2}{2n^4 - q^4}\beta + \frac{a^2 b^2 c^2}{2n^4 - q^4}\gamma\right] - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0.$$

5° Point réciproque de l'orthocentre [H_2].

$$\frac{\alpha}{p_a} = \frac{\beta}{p_b} = \frac{\gamma}{p_c}$$

$$\rho_a^2 = \frac{a^2(m^4 - 4b^2c^2)}{m^4} \dots \qquad \rho_b^2 = \dots \qquad \rho_c^2 = \dots$$

nous avons donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{a^2(m^4 - 4b^2c^2)}{m^4}\alpha + \frac{b^2(m^4 - 4a^2c^2)}{m^4}\beta + \frac{c^2(m^4 - 4a^2b^2)}{m^4}\gamma\right]$$
$$- \Sigma a^2 \beta\gamma = 0.$$

6° Point de Brocard [Ω_1].

$$\frac{\alpha}{a^2 c^2} = \frac{\beta}{a^2 b^2} = \frac{\gamma}{b^2 c^2}$$

$$\rho_a^2 = \frac{b^4 c^2}{n^4} \dots \qquad \rho_b^2 = \dots \qquad \rho_c^2 = \dots$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^4 c^2}{n^4}\alpha + \frac{a^2 c^4}{n^4}\beta + \frac{a^4 b^2}{n^4}\gamma\right] - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0.$$

7° Point de Brocard [Ω_2].

$$\frac{\alpha}{a^2 b^2} = \frac{\beta}{b^2 c^2} = \frac{\gamma}{a^2 c_2}$$

$$\rho_a^2 = \frac{b^2 c^4}{n^4} \dots \qquad \rho_b^2 = \dots \qquad \rho_c^2 = \dots$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^2 c^4}{n^4}\alpha + \frac{a^4 c^2}{n^4}\beta + \frac{a^2 \beta^4}{n^4}\gamma\right] - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0.$$

8° Centre du cercle inscrit [I].

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}$$

$$\rho_a^2=\frac{bc\,(p-a)}{p}\ \ldots \qquad \rho_b^2=\ldots \qquad \rho_c^2=\ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{bc\,(p-a)}{p}\alpha+\frac{ac\,(p-b)}{p}\beta+\frac{ab\,(p-c)}{p}\gamma\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

9° Point direct de Jérabek [J_γ].

$$\frac{\alpha}{ba}=\frac{\beta}{bc}=\frac{\gamma}{ac}$$

$$\rho_a^2=\frac{bc^2\,[(a+b)\,(b^2+c^2)-a^2]}{t^2}\ \ldots \qquad \rho_b^2=\ldots \qquad \rho_c^2=\ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{bc^2\,[(a+b)\,(b^2+c^2)-a^2]}{t^2}\alpha+\ldots\right]-\Sigma\,a^2\beta\gamma=0.$$

10° Point rétrograde de Jérabek [J_β]

$$\frac{\alpha}{ac}=\frac{\beta}{ab}=\frac{\gamma}{bc}$$

$$\rho_a^2=\frac{b^2c\,[(a+c)\,ac+b^2)-a^2]}{t^2}\ \ldots \qquad \rho_b^2=\ldots \qquad \rho_c^2=\ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c\,[(a+c)\,(ac+b^2)-a^2]}{t^2}\alpha+\ldots\right]-\Sigma\,a^2\,\beta\gamma=0.$$

11° Point D. Centre d'homologie du triangle de référence ABC avec le premier triangle de Brocard

$$\frac{\alpha}{b^2c^2}=\frac{\beta}{a^2c^2}=\frac{\gamma}{a^2b^2}$$

$$\rho_a^2=\frac{a^2\,[(b^2+c^2)\,(b^2+c^2)-a^2b^2c^2]}{n^2}\ \ldots \qquad \rho_b^2=\ldots \qquad \rho_c^2=\ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{a^2\,[\,b^2+c^2)\,(b^2+c^2)-a^2b^2c^2]}{n^2}\alpha+\ldots\right]-\Sigma\,n^2\,\beta\gamma=0$$

12° Point D_2 (inverse de D)

$$\frac{\alpha}{a^4} = \frac{\beta}{b^4} = \frac{\gamma}{c^4}$$

$$\rho_a^2 = \frac{b^2c^2\,[(b^4+c^4)(b^4+c^4) - a^2b^2c^2]}{n^2} \quad \ldots \qquad \rho_b^2 = \ldots \qquad \rho_c = \ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2\,[(b^4+c^4)(b^4+c^4) - a^2b^2c^2]}{n^2}\,\alpha + \ldots\right] - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

13° Sommet A du triangle de référence

$$\rho_a^2 = 0 \;\ldots\quad \rho_b^2 = \beta_c^2 = b^2$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,[c^2\beta + b^2\gamma] - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

14° Sommet B

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,[c^2\alpha + a^2\gamma] - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

15° Sommet C

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,[b^2\alpha + a^2\beta] - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

16° Milieu du côté a [A']

$$\rho_a^2 = \frac{2m^2 - 3a^2}{4} \;\ldots\quad \rho_b^2 = \rho_c^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{2m^2-3a^2}{4}\,\alpha + \frac{a^2}{4}\,\beta + \frac{a^2}{4}\,\gamma\right] - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

17° Milieu du côté b [B']

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2}{4}\,\alpha + \frac{2m^2-3b^2}{4}\,\beta + \frac{b^2}{4}\,\gamma\right] - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

18° Milieu du côté c [C']

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{c^2}{4}\,\alpha + \frac{c^2}{4}\,\beta + \frac{2m^2-3c^2}{4}\,\gamma\right] - \Sigma\, a^2\beta\gamma = 0.$$

19° Pieds de hauteurs A″, B″, C″

Point [A″]

$$\frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{p_c} = \frac{\gamma}{p_b}$$

$$\rho_a^2 = \frac{2n^2 - q^2}{4a^2} \quad \ldots \quad \rho_b^2 = \frac{p_b^2}{a^2} \quad \ldots \quad \rho_c^2 = \frac{p_c^2}{a^2}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{2n^2 - q^2}{4a^2}\alpha + \frac{p_b^2}{a^2}\beta + \frac{p_c^2}{a^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

20° Point [B″]

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{p_b^2}{b^2}\alpha + \frac{2n^2 - q^2}{4b^2}\beta + \frac{p_c^2}{b^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

21° Point [C″]

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{p_a^2}{c^2}\alpha + \frac{p_c^2}{c^2}\beta + \frac{2n^2 - q^2}{4c^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

22° Pieds des bissectrices intérieures A‴, B‴, C‴

Point [A‴]

$$\frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

$$\rho_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \quad \ldots \quad \rho_b^2 = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} \quad \ldots \quad \rho_c^2 = \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}\alpha + \frac{a^2c^2}{(b+c)^2}\beta + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

23° Point [B‴]

$$\rho_a^2 = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} \quad \ldots \quad \rho_b^2 = \frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2} \quad \ldots \quad \rho_c^2 = \frac{a^2b^2}{(a+c)^2}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}\alpha + \frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}\beta + \frac{a^2b^2}{(a+c)^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

24° Point [C‴]

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}\alpha + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}\beta + \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Pieds des bissectrices extérieures A'^{e}, B'^{e}, C'^{e}

25° Point A'^{e}

$$\frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{+b} = \frac{\gamma}{-c}$$

$$\rho_a^2 = \frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2} \quad \ldots \quad \rho_b^2 = \frac{a^2c^2}{(b-c)^2} \quad \ldots \quad \rho_c^2 = \frac{a^2b^2}{(b-c)^2}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}\alpha + \frac{a^2c^2}{(b-c)^2}\beta + \frac{a^2b^2}{(b-c)^2}\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma = 0$$

26° Point $[B'^{e}]$

$$\rho_a^2 = \frac{b^2c^2}{(c-a)^2} \quad \ldots \quad \rho_b^2 = \frac{4ac(p-a)(p-c)}{(c-a)^2} \quad \ldots \quad \rho_c^2 = \frac{a^2b^2}{(c-a)^2}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2}{(c-a)^2}\alpha + \frac{4ac(p-a)(p-c)}{(c-a)^2}\beta + \frac{a^2b^2}{(c-a)^2}\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma = 0$$

27° Point $[C'^{e}]$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2}{(a-b)^2}\alpha + \frac{a^2c^2}{(a-b)^2}\beta + \frac{4ab(p-a)(p-b)}{(a-b)^2}\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

28° Pieds des symédianes A^{e}, B^{e}, C^{e}

Point $[A^{e}]$

$$\frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}$$

$$\rho_a^2 = \frac{b^2c^2(2m^2-3a^2)}{(b^2+c^2)^2} \quad \ldots \quad \rho_b^2 = \frac{a^2c^4}{(b^2+c^2)^2} \quad \ldots \quad \rho_c^2 = \frac{a^2b^4}{(b^2+c^2)^2}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2(2m^2-3a^2)}{(b^2+c^2)^2}\alpha + \frac{a^2c^4}{(b^2+c^2)^2}\beta + \frac{a^2b^4}{(b^2+c^2)^2}\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

29° Point $[B^{e}]$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^4}{(a^2+c^2)^2}\alpha + \frac{a^2c^2(2m^2-3b^2)}{(a^2+c^2)^2}\beta + \frac{a^4b^2}{(a^2+c^2)^2}\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

30° **Point [C']**

$$(\alpha+\beta\gamma)\left[\frac{b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}\alpha+\frac{a^2c^2}{(a^2+b^2)^2}\beta+\frac{a^2b^2(2m^2-3c^2)}{(a^2+b^2)^2}\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

31° **Point de Nagel [V]**

$$\frac{\alpha}{b+c-a}=\frac{\beta}{a+c-b}=\frac{\gamma}{a+b-c}$$

$$\rho_a^2=\frac{a[p(b^2+c^2)-bc(b+c)-a(p-b)(p-c)]}{4p^2}\ \ldots\ \rho_b^2=\ldots\ \rho_c^2=\ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{a[p(b^2+c^2)-bc(b+c)-a(p-b)(p-c)]}{p^2}\alpha+\ \ldots\right.$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

32° **Centre de gravité du périmètre du triangle [I_c]**

$$\rho_a^2=\frac{a(2p_a-bc)}{8p}\ \ldots\quad \rho_b^2=\ \ldots\quad \rho_c^2=\ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{a(2p_a-bc)}{8p}\alpha+\ \ldots\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

33° **Point réciproque du centre du cercle inscrit [I_0]**

$$\frac{\alpha}{bc}=\frac{\beta}{ac}=\frac{\gamma}{ab}$$

$$\rho_a^2=\frac{a^2[(b+c)(b^2+c^2)-a^2bc]}{t^2}\ \ldots\quad \rho_b^2=\ldots\quad \rho_c^2=\ldots$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{a^2[(b+c)(b^2+c^2)-a^2bc]}{t^2}\alpha+\ldots\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

Premier triangle de Brocard A_1, B_1, C_1

34° **Point [A_1]**

$$\frac{\alpha}{a^2}=\frac{\beta}{c^2}=\frac{\gamma}{b^2}$$

$$\rho_a^2=\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2)-a^2b^2c^2}{m^4}\ \ldots\quad \rho_b^2=\frac{a^2[(a^2+b^2)(b^2+c^2)-b^4]}{m^4}$$

$$\rho_c^2=\frac{a^2[(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4]}{m^4}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2)-a^2b^2c^2}{m^4}\alpha=\ldots\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

35° Point [B_1]

$$\frac{\alpha}{c^2}=\frac{\beta}{b^2}=\frac{\gamma}{a^2}$$

$$\rho a^2=\frac{b^2\left[(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4\right]}{m^4}\;\ldots\;\rho b^2=\frac{(a^2+c^2)(a^4+c^4)-a^2b^2c^2}{m^4}$$

$$\rho c^2=\frac{b^2\left[(b^2+c^2)(a^2+c^2)-c^4\right]}{m^4}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2\left[(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4\right]}{m^4}\alpha+\ldots\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

36° Point [C_1]

$$\frac{\alpha}{b^2}=\frac{\beta}{a^2}=\frac{\gamma}{c^2}$$

$$\rho a^2=\frac{c^2\left[(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4\right]}{m^4}\;\ldots\;\rho b^2=\frac{c^2\left[(a^2+b^2)(b^2+c^2)-b^4\right]}{m^4}$$

$$\rho c^2=\frac{(a^2+b^2)(a^4+b^4)-a^2b^2c^2}{m^4}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{c^2\left[(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4\right]}{m^4}\alpha+\ldots\right]-\Sigma a^2\beta\gamma=0.$$

3. **Equations générales des cercles en coordonnées barycentriques.**

Dans les comptes rendus de l'AFAS (Congrès de Toulouse), M. Vigarié a donné les équations barycentriques (forme de M. de Longchamps) de divers cercles remarquables du triangle, mais on ne trouve dans cet intéressant travail les équations (dans la susdite forme) des cercles de Lemoine, Brocard, Tucker et Taylor. Nous allons donc déterminer les équations des cercles remarquables.

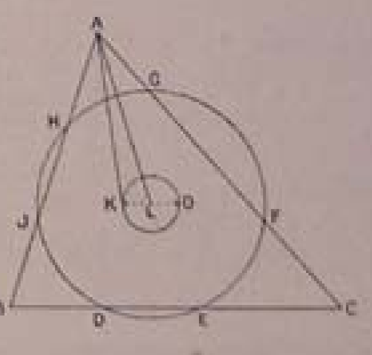

FIG. 1.

1° Premier cercle de Lemoine (K_1 (*fig. 1*)

Nous avons

$$\frac{BD}{c^2}=\frac{DE}{a^2}=\frac{Eb}{b^2}$$

d'où

$$BD=\frac{ac^2}{a^2+b^2+c^2}\;\ldots\;BE=\frac{BD\,(a^2+c^2)}{c^2}=\frac{a\,(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

par suite

$$P_B = BD.\quad BE = \frac{a^2c^2(a^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

de même

$$P_A = \frac{b^2c^2(b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}\cdots\quad P_C = \frac{(a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

l'équation est donc

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2(b^2+c^2)}{m^4}\alpha + \frac{a^2c^2(a^2+c^2)}{m^4}\beta + \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{m^4}\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma = 0$$

2° Cercle de Brocard (L) (*fig. 1*)

on a

$$P_A = \overline{AL}^2 - \overline{LK}^2$$

or

$$\overline{LK}^2 = \frac{\overline{OK}^2}{4} = \frac{R^2}{4} - \frac{3a^2b^2c^2}{4(a^2+b^2+c^2)}$$

on a aussi

$$\overline{AK}^2 = \frac{2b^2c^2(b^2+c^2) - a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

donc

$$P_A = \overline{AL}^2 - \overline{LK}^2 = \frac{\overline{AO}^2 + \overline{AK}^2}{2} - 2\overline{LK}^2 = \frac{b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

on a de même

$$P_B = \frac{a^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\cdots\quad P_C = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

nous avons donc l'équation

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{b^2c^2}{m^2}\cdot\alpha + \frac{a^2c^2}{m^2}\cdot\beta + \frac{a^2b^2}{m^2}\cdot\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

3° Cercles de Tucker.

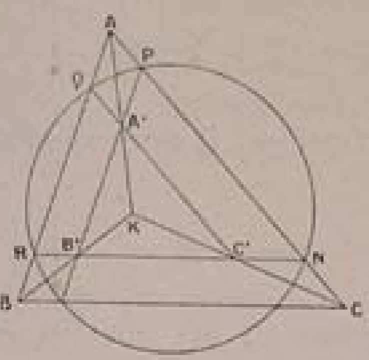

Fig. 2.

On a

$$\frac{KA'}{KA} = \frac{KB'}{KB} = \frac{KC'}{KC} = K$$

Les coordonnées de K sont

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}$$

par suite

$$NC = \frac{a^2 b\,(1 - K)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

de même

$$AP = \frac{bc^2\,(1 - K)}{a^2 + b^2 + c^2} \ldots AQ = \frac{b^2 c\,(1 - K)}{a^2 + b^2 + c^2} \ldots BR = \frac{a^2 c\,(1 - K)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

donc

$$AN = b - \frac{a^2 b\,(1 - K)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{b\,(b^2 + c^2 + a^2 K)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

d'où l'on tire

$$P_A = \frac{b^2 c^2\,(b^2 + c^2 + a^2 K)\,(1 - K)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

on aura de même P_B et P_C

On a donc l'équation suivante des cercles de Tucker

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^2 c^2\,(b^2 + c^2 + a^2 K)\,(1 - K)}{m^4}\,\alpha + \ldots\right] - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0. \quad (1)$$

Remarque. — L'équation que l'on donne généralement des cercles de Tucker (voyez Mathesis 1889 sup., par M. Vigarié, p. 20) est en coordonnées normales

$$\Sigma \frac{yz}{b^2 c^2} - \lambda \Sigma x \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right) x = 0. \quad (2)$$

dans laquelle

$$\lambda = \frac{AA'}{(a^2 + b^2 + c^2)\,AK}$$

on a donc entre λ et K la relation

$$\lambda = \frac{1 - K}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{ou} \quad K = 1 - \lambda (a^2 + b^2 + c^2)$$

Applications. — 1° Premier cercle de Lemoine. Il correspond au cas où

$$\lambda = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

dans l'équation (2) ou $K = 0$ dans l'équation (1) que nous avons trouvée.

On a donc pour équation du premier cercle de Lemoine

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^2c^2(b^2+c^2)}{m^2}\alpha + \frac{a^2c^2(a^2+c^2)}{m^2}\beta + \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{m^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

qui est la même équation que nous avons obtenue antérieurement.

2° Deuxième cercle de Lemoine (K_2). Il correspond à l'hypothèse

$$\lambda = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

nous faisons donc $K = -1$ dans l'équation (1) ce qui donne

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^2c^2p_a}{m^2}\alpha + \frac{a^2c^2p_b}{m^2}\beta + \frac{a^2b^2p_c}{m^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Remarque. — Si dans l'équation (1) on fait

$$K = -\frac{b^2 + c^2}{a^2}, \; K = -\frac{a^2 + c^2}{b^2} \text{ et } K = -\frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

successivement, on trouve les trois cercles suivants dont les équations sont assez simples

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2}\beta + \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{c^2(b^2 - a^2)}{b^2}\alpha + \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2}\gamma\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[\frac{b^2(c^2 - a^2)}{c^2}\alpha + \frac{a^2(c^2 - b^2)}{c^2}\beta\right] - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Chacun de ces cercles passe évidemment par un sommet du triangle de référence.

3° Cercle de Taylor. C'est aussi un cas particulier des cercles de Tucker, il correspond à l'hypothèse

$$\lambda = \frac{1}{4\,R^2}$$

nous faisons par suite

$$K = 1 - \frac{m^2}{4\,R^2}$$

dans l'équation (1) et il en résulte pour l'équation du cercle de Taylor

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[4S^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\alpha+4S^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\beta+4S^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{4R^2}\right)\gamma\right]$$
$$-\Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Remarque sur les cercles de Tucker. — 4° On voit aisément que les cercles de Tucker peuvent se déduire des suivants

$$\text{(C)} \qquad (\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\,\frac{b^2c^2\,(2\,a^2+b^2+c^2)\,(1-K)}{m^2} - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

$$\text{(C')} \qquad (\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\,\frac{b^2c^2\,(1-K)}{m^2} - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

en trouvant le cercle radical d'ordre $\dfrac{2-K}{1-K}$ de (C) par rapport à (C').

En particulier si $K = 0$, on déduit que le cercle anti-radical (ordre 2) du cercle

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\,\frac{b^2c^2\,(2a^2+b^2+c^2)}{m^2} - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

par rapport au cercle de Brocard, est le premier cercle de Lemoine.

Si nous considérons maintenant les cercles

$$(C) \qquad (\alpha + \beta + \gamma)\Sigma \frac{b^2c^2(b^2+c^2)(K-1)}{m^2} - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

$$(C') \qquad (\alpha + \beta + \gamma)\Sigma \frac{b^2c^2(K-1)}{m^2} - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

nous voyons que le cercle radical d'ordre $\frac{K}{K-1}$ de (C) par rapport à (C') a pour équation (au signe près des paramètres u, v, w) l'équation d'un cercle de Tucker, c'est-à-dire que le cercle radical dont nous parlons est le cercle anti-radical d'un cercle de Tucker par rapport au cercle circonscrit.

En particulier si $K = 2$, il en résulte que le cercle anti-radical du premier cercle de Lemoine par rapport au cercle de Brocard est le cercle anti-radical d'un cercle de Tucker (celui qui correspond à $K = 2$) par rapport au cercle circonscrit.

Nous terminons ce travail, citant une propriété évidente des cercles radicaux qui nous a été communiquée par notre excellent ami, le savant professeur de Milan, M. V. Retali, c'est la suivante :

Le lieu du milieu des cordes que la tangente à la conique contrevariante intercepte dans deux cercles, est le cercle radical, c'est-à-dire que, étant donnés deux cercles (O) et (O'), le cercle radical est la podaire, par rapport à O (ou O'), de la conique contrevariante.

SAINT-ÉTIENNE, SOCIÉTÉ DE L'IMP. THÉOLIER — J. THOMAS ET Cie