TEORÍA ELEMENTAL

DE LAS

FORMAS ALGEBRAICAS

CON ARREGLO AL PROGRAMA DE INGRESO

EN LA

ESCUELA GENERAL DE INGENIEROS Y ARQUITECTOS

POR

D. JUAN J. DURÁN Y LORIGA,

CAPITÁN DE ARTILLERÍA.

PRECIO: CINCO PESETAS.

SEGOVIA
IMPRENTA DE ONDERO,
Juan Bravo, 40 y 42.

1889

Á Mr. A. G. Greenhill,

MAYOR DE LA REAL ARTILLERÍA INGLESA,
MIEMBRO DE LA REAL SOCIEDAD DE LONDRES,
ETC., ETC.

Homenaje al ilustre artillero y sabio matemático, saludo cariñoso al amigo:

JUAN J. DURÁN.

PRÓLOGO.

La práctica de la preparación para el ingreso en la Escuela General de Ingenieros y Arquitectos nos ha puesto de manifiesto la necesidad de un tratado elemental de la teoría de las formas algebraicas. Las obras que se ocupan de esta importante teoría, aparte de las que por la forma de exposición no son propias para la enseñanza, tratan el asunto con mucha más extensión de la que se exige en el programa de la citada Escuela. El alumno tropieza con el grave inconveniente de tener que estudiar extractando y á ello se debe el que se le presente en general difícil esta parte de su examen de ingreso.

En este tratado que tenemos la honra de ofrecer al público se encierra todo lo que el programa pide y dentro de los límites que hemos juzgado convenientes para que el estudio no sea deficiente. Si responde al buen deseo que nos ha impulsado á escribirlo, quedará sobradamente recompensada nuestra tarea.

TEORÍA ELEMENTAL DE LAS FORMAS.

CAPÍTULO I.

PRELIMINARES.

1. Si consideramos el polinomio homogéneo

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

y sustituímos á las variables x é y otras dos x_1 é y_1 ligadas á las primeras por las relaciones

$$x = mx_1 + ny_1$$

$$y = px_1 + qy_1$$

dicho polinomio se convierte en el siguiente:

$$a(mx_1 + ny_1)^2 + b(mx_1 + ny_1)(px_1 + qy_1) + c(px_1 + qy_1)^2,$$

que ordenado respecto á x_1 se reduce á

$$(am^2 + bmp + cp^2)x_1^2 + (2amn + 2cpq + bnp + bmq)x_1y_1 +$$

$$+ (an^2 + bnq + cq^2)y_1^2,$$

ó $Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2$

y pudiéramos proponernos investigar si existe alguna función, tal como $\varphi(a, b, c)$, de los coeficientes primitivos, con la cual se verifique

$$\varphi(A, B, C) = \pi(m, n, p, q)\,\varphi(a, b, c)$$

siendo $\pi(m, n, p, q)$ una constante formada con los coeficientes de la sustitución. De este modo, si $\varphi(a, b, c)$ indica, por ejemplo, una propiedad característica del polinomio dado, esta propiedad subsistirá en el trasformado, si su índole es tal que no sea contrariada por la presencia de la constante que hemos representado por la función π.

El estudio de esta clase de funciones hecho por primera vez por *Boole* el año 1847, al establecer que la resultante de las derivadas parciales de una función homogénea goza de la propiedad de invariancia (aparte un factor constante) que hemos asignado á la función φ, dió origen á una *Nueva Álgebra* constituida por notables trabajos de Cayley, Sylvester, Hermite, Clebsch, Aronhold y otras eminencias, y que hoy se conoce generalmente con el nombre de *Teoría de las formas*.

2. Entendemos por forma, una función de cualquier número de variables, algebraica, entera y homogénea respecto á dichas variables; por ejemplo, las siguientes expresiones:

$$ay^2+bxy+cx^2,\ ax^3+bx^2y,\ ax^2+by^2+$$
$$+cz^2+dxy+exz+fyz \text{ etc.}$$

Se llama grado de una forma, el de la función que la representa y según conste de dos, tres, cuatro etc., variables se denomina binaria, ternaria, cuaternaria, etc. La forma general de una binaria del grado enésimo es:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a^n y^n$$

que aparte de los coeficientes puede representarse por la potencia $(x+y)^n$.

Por razones que más adelante daremos, se ha convenido en acompañar á los anteriores coeficientes, los de la potencia de un binomio que se eleva á un grado igual al de la forma y en este concepto la anterior se escribirá así:

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + a_n y^n .$$

De un modo simbólico se representa la primera por el símbolo

$$(a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_n \between x, y)^n$$

y la segunda en esta forma

$$\left(a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_n\right)\left(x, y\right)^n$$

según propuso Mr. Cayley.

3. Es muy frecuente emplear una sola letra con distintos subíndices para representar las diversas variables, así á las x, y, z etc., sustituiremos x_1, x_2, x_3 etc., y en este caso se acostumbra á representar los coeficientes literales por una misma letra con subíndices correspondientes á los de las variables que afectan repitiendo el subíndice cuando se repite una variable. La binaria cuadrada se representará así:

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

y la ternaria cuadrada de este modo:

2

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\, a_{12}\, x_1 x_2 + 2\, a_{13}\, x_1 x_3 + 2\, a_{23}\, x_2 x_3.$$

De un modo general, una forma cuadrada de n variables, se puede representar simbólicamente en esta forma:

$$\Sigma\, a_{pq}\, x_p\, x_q \qquad (a_{pq} = a_{qp})$$

y una cúbica, también de n variables, así:

$$\Sigma\, a_{pqr}\, x_p\, x_q\, x_r \qquad (a_{pqr} = a_{rpq} = \text{etc.})$$

debiendo darse á los subíndices los valores 1, 2,... n y teniendo presentes las condiciones que encierran los paréntesis.

4. Siendo la teoría de las sustituciones lineales, la base del estudio que hemos de hacer sobre las funciones que llegaremos á conocer bajo los nombres de invariantes, covariantes, etc., de dicha teoría nos ocuparemos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO II.

SUSTITUCIONES LINEALES.

5. Supongamos que dada una función de varias variables (que por brevedad supondremos tres) $f(x, y, z)$ se trata de reemplazar dichas variables x, y, z por otras X, Y, Z, ligadas á las primeras por el mismo número de ecuaciones lineales, tales como:

$$(1) \quad \begin{cases} x = l_1 X + m_1 Y + n_1 Z \\ y = l_2 X + m_2 Y + n_2 Z \\ z = l_3 X + m_3 Y + n_3 Z \end{cases}$$

siendo constantes l_1, m_1, etc.

Esta transformación se llama *sustitución lineal*, siendo las constantes que hemos citado los *coeficientes de la sustitución* y el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

es decir, el denominador común de los valores de X, Y, Z, se llama *módulo de la sustitución*.

Si $\Delta = 1$, la sustitución se llama *unimodular*, y si se verifica

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

toma el nombre de *sustitución ortogonal*.

6. Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones homogéneas:

$$a_1\ x_1+a_2\ x_2+\ldots\ldots+a_n x_n=0$$

$$b_1\ x_1+b_2\ x_2+\ldots\ldots+b_n x_n=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_1\ x_1+l_2\ x_2+\ldots\ldots+l_n x_n=0$$

y hagamos en ellas la siguiente sustitución lineal

$$x_1=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\ldots\ldots+\alpha_n X_n$$

$$x_2=\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\ldots\ldots+\beta_n X_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n=\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2+\ldots\ldots+\lambda_n X_n$$

con lo que resultará el sistema

$$(a_1\alpha_1+a_2\beta_1+\ldots+a_n\lambda_1)X_1+(a_1\alpha_2+a_2\beta_2+\ldots+a_n\lambda_2)X_2+\ldots+$$
$$+(a_1\alpha_n+a_2\beta_n+\ldots+a_n\lambda_n)X_n=0$$

$$(b_1\alpha_1+b_2\beta_1+\ldots+b_n\lambda_1)X_1+(b_1\alpha_2+b_2\beta_2+\ldots+b_n\lambda_2)X_2+\ldots+$$
$$+(b_1\alpha_n+b_2\beta_n+\ldots+b_n\lambda_n)X_n=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(l_1\alpha_1+l_2\beta_1+\ldots+l_n\lambda_1)X_1+(l_1\alpha_2+l_2\beta_2+\ldots+l_n\lambda_2)X_2+\ldots+$$
$$+(l_1\alpha_n+l_2\beta_n+\ldots+l_n\lambda_n)X_n=0$$

y teniendo en cuenta la conocida regla para la multiplicación de determinantes, es fácil ver que se verifica la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1+\ldots+a_n\lambda_1 \ldots a_1\alpha_2+a_2\beta_2+\ldots+a_n\lambda_2\ldots \\ \qquad a_1\alpha_n+a_2\beta_n+\ldots+a_n\lambda_n \\ b_1\alpha_1+b_2\beta_1+\ldots+b_n\lambda_1\ldots b_1\alpha_2+b_2\beta_2+\ldots+b_n\lambda_2\ldots \\ \qquad b_1\alpha_n+b_2\beta_n+\ldots+b_n\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1\alpha_1+l_2\beta_1+\ldots+l_n\lambda_1\ldots l_1\alpha_2+l_2\beta_2+\ldots+l_n\lambda_2\ldots \\ \qquad l_1\alpha_n+l_2\beta_n+\ldots+l_n\lambda_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots a_n \\ b_1 & b_2 \ldots\ldots b_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ l_1 & l_2 \ldots\ldots l_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots\ldots \beta_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n \end{vmatrix}$$

lo que nos permite establecer el siguiente

TEOREMA.—*Si un sistema de ecuaciones homogéneas se transforma por medio de sustituciones lineales, el determinante de los coeficientes del transformado es igual al producto del determinante del sistema primitivo multiplicado por el módulo de transformación.*

7. Si se tienen dos funciones $f(x, y, z\ldots)$ y $F(x_1, y_1, z_1\ldots)$ y se sustituye á las primeras variables, otras X, Y, Z… y á las segundas X_1, Y_1, Z_1 etc., de tal modo que los coeficientes de la segunda sustitución son los mismos y están en el mismo orden que los de la primera, se dice que las sustituciones son

directas ó que las variables $x, y, z\ldots$, de una parte y $x_1, y_1, z_1\ldots$ de otra son *cogredientes*.

Si por el contrario, las primitivas variables (que por abreviar suponemos tres únicamente) se transforman por la sustitución (1) y las $x_1, y_1, z_1\ldots$ por medio de las siguientes relaciones:

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 = l_1\, x_1 + l_2\, y_1 + l_3\, z_1 \\ Y_1 = m_1\, x_1 + m_2\, y_1 + m_3\, z_1 \\ Z_1 = n_1\, x_1 + n_2\, y_1 + n_3\, z_1 \end{cases}$$

en las cuales el determinante de los coeficientes difiere del análogo del sistema (1) en estar cambiadas las líneas en columnas al expresar las nuevas variables en función de las primitivas, se dice que las sustituciones (1) y (2) son inversas una de otra ó que las variables x, y, z y x_1, y_1, z_1 son *contragredientes*.

Si expresamos los valores de x_1, y_1, z_1 en función de X_1, Y_1, Z_1 deduciremos, llamando L_1, L_2, L_3 etc., los complementos de l_1, l_2, l_3 etc., en el determinante $(l_1\ m_2\ n_3) = \Delta$,

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta\, x_1 = L_1\, X_1 + M_1\, Y_1 + N_1\, Z_1 \\ \Delta\, y_1 = L_2\, X_1 + M_2\, Y_1 + N_2\, Z_1 \\ \Delta\, z_1 = L_3\, X_1 + M_3\, Y_1 + N_3\, Z_1 \end{cases}$$

Ahora bien, los determinantes (l_1, m_2, n_3) y $(L_1\ M_2\ N_3)$ son evidentemente recíprocos y por esta razón las sustituciones (1) y (2) se llaman también *recíprocas*.

8. Entre las variables de dos sistemas contragredientes se verifica una sencilla relación digna de hacer notar.

Multipliquemos, en efecto, las (3) por x, y, z respectivamente y sumemos los resultados, lo que dará

$$\Delta (x x_1 + y y_1 + z z_1) = (L_1 x + L_2 y + L_3 z) X_1 +$$
$$(M_1 x + M_2 y + M_3 z) \; Y_1 + (N_1 x + N_2 y + N_3 z) Z_1$$

ó bien

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = X X_1 + Y Y_1 + Z Z_1$$

porque los cocientes de dividir por Δ los coeficientes de X_1 Y_1 Z_1 son precisamente los valores que se obtendrían en las ecuaciones (1) al despejar X, Y, Z.

9. Cuando se transforma una función u de x, y, z en otra de X, Y, Z, se pueden expresar las derivadas u con relación á las nuevas variables, linealmente, por medio de las derivadas con relación á las primitivas.

Tenemos efectivamente, observando que u es una función compuesta:

$$\frac{du}{dX} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dX} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dX} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dX}$$

Pero de las relaciones (1) se deduce:

$$\frac{dx}{dX} = l_1, \quad \frac{dy}{dX} = l_2, \quad \frac{dz}{dX} = l_3$$

por lo tanto

$$\frac{du}{dX} = l_1 \frac{du}{dx} + l_2 \frac{du}{dy} + l_3 \frac{du}{dz}$$

Se tiene análogamente

$$\frac{du}{dY} = m_1 \frac{du}{dx} + m_2 \frac{du}{dy} + m_3 \frac{du}{dz}$$

$$\frac{du}{dZ} = n_1 \frac{du}{dx} + n_2 \frac{du}{dy} + n_3 \frac{du}{dz}$$

luego los simbolos $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ y x, y, z son contragredientes, es decir, que al transformar linealmente x, y, z, dichos simbolos se transforman por la sustitución inversa.

Si en particular se consideran sólo dos variables es fácil ver que x é y son cogredientes con $\frac{du}{dy}$ y $-\frac{du}{dx}$.

Se tiene efectivamente

$$\begin{aligned} x &= l_1 X + m_1 Y \\ y &= l_2 X + m_2 Y \end{aligned} \qquad \Delta = (l_1\ m_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dX} &= l_1 \frac{du}{dx} + l_2 \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dY} &= m_1 \frac{du}{dx} + m_2 \frac{du}{dy} \end{aligned}\right\} \text{de donde} \left\{\begin{aligned} \Delta \frac{du}{dx} &= m_2 \frac{du}{dX} - l_2 \frac{du}{dY} \\ \Delta \frac{du}{dy} &= l_1 \frac{du}{dY} - m_1 \frac{du}{dX} \end{aligned}\right.$$

y por lo tanto

$$\Delta \frac{du}{dy} = l_1 \frac{du}{dY} + m_1 \left(- \frac{du}{dX}\right)$$

$$\Delta \left(- \frac{du}{dx}\right) = l_2 \frac{du}{dY} + m_2 \left(- \frac{du}{dX}\right)$$

igualdades que prueban lo que hemos enunciado.

10. Vamos ahora á ocuparnos de ver la forma que toma una

binaria al hacer una sustitución lineal para deducir resultados que hemos de utilizar más adelante.

Sea la forma binaria:

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + a_n y^n$$

y hagamos la sustitución

$$x = l_1 \mathrm{X} + m_1 \mathrm{Y}$$

$$y = l_2 \mathrm{X} + m_2 \mathrm{Y}$$

Convengamos en que la notación $(\quad)_{l_1\, l_2}$ indique que en la cantidad colocada dentro del paréntesis deben cambiarse las variables x é y por l_1 y l_2 respectivamente.

La fórmula de Taylor nos da:

$$f(l_1 \mathrm{X} + m_1 \mathrm{Y},\ l_2 \mathrm{X} + m_2 \mathrm{Y}) =$$

$$= (f)_{l_1 \mathrm{X},\, l_2 \mathrm{X}} + \left(\frac{d f}{d x} m_1 \mathrm{Y} + \frac{d f}{d y} m_2 \mathrm{Y}\right)_{l_1 \mathrm{X},\, l_2 \mathrm{X}} +$$

$$+ \frac{1}{2\,!} \left[\left(\frac{d f}{d x} m_1 \mathrm{Y} + \frac{d f}{d y} m_2 \mathrm{Y}\right)^2\right]_{l_1 \mathrm{X},\, l_2 \mathrm{X}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{p\,!} \left[\left(\frac{d f}{d x} m_1 \mathrm{Y} + \frac{d f}{d y} m_2 \mathrm{Y}\right)^p\right]_{l_1 \mathrm{X},\, l_2 \mathrm{X}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n\,!} \left[\left(\frac{d f}{d x} m_1 \mathrm{Y} + \frac{d f}{d y} m_2 \mathrm{Y}\right)^n\right]_{l_1 \mathrm{X},\, l_2 \mathrm{X}}$$

Observemos ahora, que por ser la función propuesta homogénea y del grado n, la sustitución de $l_1\mathrm{X}$ y $l_2\mathrm{X}$ por x é y le hará adquirir el factor X^n; que por ser el segundo paréntesis función homogénea del grado $(n-1)$, adquirirá por igual sustitución el factor X^{n-1} etc. etc. La expresión anterior se podrá por lo tanto escribir así:

$$f(l_1 X + m_1 Y, l_2 X + m_2 Y) = (f)_{l_1 l_2} X^n + \left(m_1 \frac{df}{dx} + \right.$$

$$\left. + m_2 \frac{df}{dy}\right)_{l_1 l_2} X^{n-1} Y + \frac{1}{2!}\left[\left(m_1 \frac{df}{dx} + m_2 \frac{df}{dy}\right)^2\right]_{l_1 l_2} X^{n-2} Y^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{p!}\left[\left(m_1 \frac{df}{dx} + m_2 \frac{df}{dy}\right)^p\right]_{l_1 l_2} X^{n-p} Y^p + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[\left(m_1 \frac{df}{dx} + m_2 \frac{df}{dy}\right)^n\right]_{l_1 l_2} Y^n$$

Esta es la expresión general del desarrollo.

11. Consideremos en particular la sustitución

$$x = X + m_1 Y$$

$$y = Y$$

y la función

$$f(x, y) = (a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)(x, y)^n$$

En esta hipótesis tendremos que hacer en la fórmula anterior

$$l_1 = 1, \quad l_2 = o, \quad m_2 = 1$$

y tendremos:

$$(f)_{l_1 l_2} = a_0, \quad \left(m_1 \frac{df}{dx} + m_2 \frac{df}{dy}\right)_{l_1 l_2} = n(a_1 + m_1 a_0)$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left(m_1\frac{df}{dx}+m_2\frac{df}{dy}\right)^2\right]_{t_1 t_2}=\binom{n}{2}(a_2+2a_1m_1+a_0m_1^2)$$

$$\frac{1}{3!}\left[\left(m_1\frac{df}{dx}+m_2\frac{df}{dy}\right)^3\right]_{t_1 t_2}=\binom{n}{3}(a_3+3a_2m_1+3a_1m_1^2+a_0m_1^3)$$

etc. etc. etc.

y por consiguiente

$$f(\mathrm{X}+m_1\mathrm{Y},\mathrm{Y})=a_0\mathrm{X}^n+\binom{n}{1}(a_1+m_1a_0)\mathrm{X}^{n-1}\mathrm{Y}+$$

$$+\binom{n}{2}(a_2+2a_1m_1+a_0m_1^2)\mathrm{X}^{n-2}\mathrm{Y}^2+$$

$$+\binom{n}{3}(a_3+3a_2m_1+3a_1m_1^2+a_0m_1^3)+\ldots+$$

$$+\binom{n}{p}(a_p+pa_{p-1}m_1+\binom{p}{2}a_{p-2}m_1^2+\ldots)+\ldots$$

Este desarrollo puede expresarse de un modo simbólico muy fácil de retener. Convengamos para ello en que la expresión $(a+m_1)^{(p)}$ indique que debe hacerse el desarrollo de $(a+m_1)^p$ por la fórmula del binomio y después reemplazar por subíndices los exponentes de a, considerando el término que carezca de esta letra, como si la tuviese con el exponente cero, por ejemplo $(a+m_1)^{(2)}$, se obtendrá desarrollando

$$(a+m_1)^2=a^2+2a_1m_1+m_1^2a^0,$$

y reemplazando por subíndices los exponentes de a, así:

$$(a+m_1)^{(2)}=a_2+2a_1m_1+a_0m_1^2.$$

Con este convenio se tendrá:

$$f(X+m_1 Y, Y) = (a+m_1)^{(0)} X^n + \binom{n}{1} (a+m_1)^{(1)} X^{n-1} Y +$$

$$+ \binom{n}{2} (a+m_1)^{(2)} X^{n-2} Y^2 + \ldots + \binom{n}{p} (a+m_1)^{(p)} X^{n-p} Y^p + \ldots$$

Podemos también observar, comparando los coeficientes de iguales potencias en la forma y su desarrollo, que a_0 no varía,

a_1	se convierte en		$a_1 + a_0 m_1$		
a_2	»	»	» $a_2 + 2 a_1 m_1 + a_0 m_1^2$		
a_3	»	»	» $a_3 + 3 a_2 m_1 + 3 a_1 m_1^2 + a_0 m_1^3$		
etc. »	»	»	etc.	etc.	etc.

Esta observación nos será útil en la teoría de invariantes y conviene por lo tanto tenerla presente.

12. Vamos ahora á demostrar algunos teoremas relativos á las sustituciones lineales.

Teorema. *En una sustitución ortogonal la suma de los cuadrados de los elementos del módulo, pertenecientes á una misma vertical, es igual á uno y la suma de productos de los elementos de dos verticales es nula.*

Consideremos la sustitución ya empleada anteriormente

$$x = l_1 X + m_1 Y + n_1 Z$$

$$y = l_2 X + m_2 Y + n_2 Z$$

$$z = l_3 X + m_3 Y + n_3 Z$$

y sumemos los cuadrados de estas igualdades, lo que dará

$$x^2+y^2+z^2=(l_1^2+l_2^2+l_3^2)\,X^2+(m_1^2+m_2^2+m_3^2)Y^2+$$
$$+(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\,Z^2+2\,(l_1\,m_1+l_2\,m_2+l_3\,m_3)\,X\,Y+$$
$$+2\,(l_1\,n_1+l_2\,n_2+l_3\,n_3)\,X\,Z+2\,(m_1\,n_1+m_2\,n_2+m_3\,n_3)\,Y\,Z$$

Ahora bien, para que la sustitución sea ortogonal tiene que verificarse

$$x^2+y^2+z^2=X^2+Y^2+Z^2$$

y por lo tanto

$$(4)\begin{cases} l_1^2+l_2^2+l_3^2=1 & l_1\,m_1+l_2\,m_2+l_3\,m_3=0 \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2=1 & l_1\,n_1+l_2\,n_2+l_3\,n_3=0 \\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 & m_1\,n_1+m_2\,n_2+m_3\,n_3=0 \end{cases}$$

que es lo que queriamos demostrar.

Corolario.—*El cuadrado del módulo de una sustitución ortogonal es igual á uno y por lo tanto este módulo á más uno ó menos uno.*

Basta observar, para demostrar este corolario, que si se forma el cuadrado del módulo se obtendrá un determinante en el que los elementos de la diagonal principal son suma de cuadrados de los elementos de una misma vertical de dicho módulo y por lo tanto iguales á uno, según el teorema anterior, y los demás elementos producto de los de dos verticales y por lo tanto nulos, es decir que:

$$\Delta^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

Corolario. Si se cambian de signo todos los coeficientes de una sustitución ortogonal pertenecientes á una ó varias verticales, la sustitución seguirá siendo ortogonal, puesto que las relaciones (4) continuarán verificándose.

13. Teorema. *En una sustitución ortogonal, el producto del módulo por uno de sus elementos es igual al complemento algebraico de este elemento.*

Tenemos en efecto

$$(5) \qquad \Delta = l_1 L_1 + l_2 L_2 + l_3 L_3 + \ldots\ldots \text{etc.}$$

llamando L_1, L_2, L_3, etc. los complementos de l_1, l_2, l_3, etc.

Se tiene además según sabemos

$$(6) \qquad m_1 L_1 + m_2 L_2 + m_3 L_3 + \ldots\ldots = 0$$

y por ser la sustitución ortogonal

$$(7) \qquad m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 + \ldots\ldots = 0$$

Ahora bien: la coexistencia de las igualdades (6) y (7) exige que los coeficientes de m_1, m_2, m_3, etc. en ambas sean proporcionales, y se tendrá:

$$\frac{L_1}{l_1} = \frac{L_2}{l_2} = \ldots\ldots = K, \quad L_1 = l_1 K, \quad L_2 = l_2 K \text{ etc.}$$

y sustituyendo en la (5)

$$\Delta = l_1^2 K + l_2^2 K + \ldots\ldots = K (l_1^2 + l_2^2 + \ldots\ldots) = K$$

por ser el paréntesis igual á la unidad en la hipótesis establecida de considerar una sustitución ortogonal.

Tendremos por consiguiente

$$L_1 = l_1 \Delta, \; L_2 = l_2 \Delta \text{ etc.}$$

l, q, q, d

14. Ahora podemos generalizar el primer teorema (§ 11) demostrando el siguiente

Teorema.—*La suma de los cuadrados de los elementos de una línea cualquiera del módulo de una sustitución ortogonal es igual á uno, y el producto de los elementos correspondientes de dos paralelas es igual á cero.*

Ordenando el módulo según los elementos de la horizontal p, se tiene:

$$\Delta = l_p L_p + m_p M_p + n_p N_p + \ldots\ldots$$

y además

$$l_q L_p + m_q M_p + n_q N_p + \ldots = o$$

pero hemos demostrado anteriormente (§ 12) que

$$L_p = \Delta l_p, \quad M_p = \Delta m_p, \quad N_p = \Delta n_p, \quad \text{etc.}$$

luego sustituyendo, tendremos:

$$\Delta = \Delta (l^2{}_p + m^2{}_p + n^2{}_p + \ldots)$$

$$\Delta (l_q l_p + m_q m_p + n_q n_p + \ldots) = o$$

y por consiguiente

$$l^2{}_p + m^2{}_p + n^2{}_p + \ldots = 1, \quad l_q l_p + m_q m_p + n_q n_p + \ldots = o$$

l, q, q, d.

15. Debe observarse, que si en una forma n se hace una sustitución lineal y se convierte en n, al poner en esta última

los valores de sus variables en función de las primitivas, debe obtenerse otra vez la función u.

Si dicha sustitución es ortogonal, los valores de X, Y, Z, etc., en función de x, y, z, etc., deben ser

$$X = l_1\, x + l_2\, y + l_3\, z$$

$$Y = m_1\, x + m_2\, y + m_3\, z$$

$$Z = n_1\, x + n_2\, y + n_3\, z$$

pues basta para convencerse de ello, sustituir en vez de x, y, z sus valores (1) y obtendremos identidades, si se tienen presentes las relaciones (4). Este hecho viene á comprobar el Teorema del párrafo 13, pues teniendo que verificarse que

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

tendrá que ser en virtud de un teorema anterior (§ 11)

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \qquad l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2 = 0$$

....

....

Se ve así mismo que las condiciones necesarias y suficientes para que la sustitución sea ortogonal son las que estableció el teorema (§ 11), siendo las demás consecuencias de ellas, y como este número de relaciones para una sustitución del grado n (es decir en la que el módulo es de este grado), es igual al de combinaciones con repetición de n letras de dos en dos es decir $\frac{n\,(n+1)}{2}$ y n^2 el de coeficientes quedarán como arbitrarios

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

16. Estamos ya en el caso de ver como se determinan las coeficientes de una sustitución ortogonal en función de las $\frac{n(n-1)}{2}$ independientes y vamos á emplear el procedimiento usado por Mr. Salmon siguiendo el método indicado por el ilustre Hermite para la resolución del problema general de transformar una función de segundo grado en si misma.

Consideremos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
x &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots \\
y &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots \\
z &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + \ldots \\
Y &= a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + \ldots \\
Z &= a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

en las que suponemos se verifica $a_{pq} = - a_{qp}$ y $a_{pp} = 1$.

Sumemos las anteriores relaciones, dos á dos, miembro á miembro y en virtud de las que se verifican entre los coeficientes, resultará:

$$x + X = 2\,x_1 \quad y + Y = 2\,x_2 \quad z + Z = 2\,x_3 \quad \text{etc.}$$

Deduciendo del primer sistema de ecuaciones los valores de x_1 x_2 etc. y llamando Δ al determinante de los coeficientes y A_{11}, A_{12} etc., á los complementos de a_{11}, a_{12} etc. se tendrá:

$$\Delta x_1 = A_{11} x + A_{21} y + A_{31} z + \ldots$$
$$\Delta x_2 = A_{12} x + A_{22} y + A_{32} z + \ldots$$
$$\Delta x_3 = A_{13} x + A_{23} y + A_{33} z + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sustituyamos en lugar de x_1, x_2 etc., $\frac{x + X}{2}$, $\frac{y + Y}{2}$ etc., y se obtiene

$$(8)\left\{\begin{array}{l} \Delta X = (2 A_{11} - \Delta x) + 2 A_{21} y + 2 A_{31} z + \ldots \\ \Delta Y = 2 A_{12} x + (2 A_{22} - \Delta) y + 2 A_{32} z + \ldots \\ \Delta Z = 2 A_{13} x + 2 A_{2} y + (2 A_{31} - \Delta) z + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si resolvemos el segundo sistema de ecuaciones con relación á x_1 y_1 etc., se encuentra:

$$(9)\left\{\begin{array}{l} \Delta x_1 = A_{11} X + A_{12} Y + A_{13} Z + \ldots \\ \Delta x_2 = A_{21} X + A_{22} Y + A_{23} Z + \ldots \\ \Delta x_3 = A_{31} X + A_{32} Y + A_{33} Z + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

y como anteriormente

$$\Delta x = (2 A_{11} - \Delta) X + 2 A_{12} Y + 2 A_{13} Z + \ldots$$
$$\Delta y = 2 A_{21} X + (2 A_{22} - \Delta) Y + 2 A_{23} Z + \ldots$$
$$\Delta z = 2 A_{31} X + 2 A_{32} Y + (2 A_{33} - \Delta) Z + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De las (9) y (8) se deduce:

$$
(10)\left\{
\begin{array}{l}
x = b_{11}\,X + b_{12}\,Y + b_{13}\,Z + \ldots\ldots \\
y = b_{21}\,X + b_{22}\,Y + b_{23}\,Z + \ldots\ldots \\
z = b_{31}\,X + b_{32}\,Y + b_{33}\,Z + \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X = b_{11}\,x + b_{21}\,y + b_{31}\,z + \ldots \\
Y = b_{12}\,x + b_{22}\,y + b_{32}\,z + \ldots \\
Z = b_{13}\,x + b_{23}\,y + b_{33}\,z + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

habiendo representado por $b_{p\,p}$ la expresión $\dfrac{2\,A_{p\,p} - \Delta}{\Delta}$, y por $b_{p\,q}$ la $\dfrac{2\,A_{p\,q}}{\Delta}$

Es fácil ver que estas relaciones (10) representan sustituciones ortogonales, pues si sustituímos en las primeras los valores de las segundas, se tiene:

$$
\begin{aligned}
x = {} & (b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + \ldots)\,x + (b_{11}\,b_{21} + b_{12}\,b_{22} + b_{13}\,b_{23} + \ldots)\,y \\
& + (b_{11}\,b_{31} + b_{12}\,b_{32} + b_{13}\,b_{33} \ldots)\,z + \ldots \\
y = {} & (b_{21}\,b_{11} + b_{22}\,b_{12} + b_{23}\,b_{13} + \ldots)\,x + (b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 + \ldots)\,y \\
& + (b_{21}\,b_{31} + b_{22}\,b_{32} + b_{23}\,b_{33} + \ldots)\,z + \ldots \\
z = {} & (b_{31}\,b_{11} + b_{32}\,b_{12} + b_{33}\,b_{13} + \ldots)\,x + (b_{31}\,b_{21} + b_{32}\,b_{22} + b_{33}\,b_{23} + \ldots)\,y \\
& + (b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 + \ldots)\,z + \ldots
\end{aligned}
$$

lo que exige que se verifique

$$
\begin{array}{ll}
b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + \ldots = 1 & b_{11}\,b_{21} + b_{12}\,b_{22} + \ldots = 0 \\
b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 + \ldots = 1 & b_{21}\,b_{11} + b_{22}\,b_{12} + \ldots = 0 \\
b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 + \ldots = 1 & b_{31}\,b_{11} + b_{32}\,b_{12} + \ldots = 0 \\
& \vdots
\end{array}
$$

$$b_{11}\,b_{31}+b_{12}\,b_{32}+\ldots=0$$
$$b_{21}\,b_{31}+b_{22}\,b_{32}+\ldots=0$$
$$b_{31}\,b_{21}+b_{32}\,b_{22}+\ldots=0$$

por consiguiente la sustitución es ortogonal.

Observemos ahora que habiendo partido de un determinante simétrico del grado n hay en él n^2 elementos, pero, sólo quedarán arbitrarios $\frac{n(n-1)}{2}$ porque hay que restar de n^2 los n elementos de la diagonal, que tienen ya el valor uno, lo que da $n(n-1)$ y tomar la mitad de este número, por ser precisamente iguales y de signo contrario los elementos conjugados.

Como se ve este resultado está conforme con lo que hemos dicho anteriormente (§ 14).

Ejemplo.—Formar una sustitución ortogonal de segundo grado.

Tendremos en este caso un sólo elemento arbitrario que llamaremos l y se tendrá

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & l \\ -l & 1 \end{vmatrix}=1+l^2$$

$$A_{11}=1,\ A_{12}=l,\ A_{21}=-l,\ A_{22}=1,\ b_{11}=\frac{2-(1+l^2)}{1+l^2}=\frac{1-l^2}{1+l^2}$$

$$b_{12}=\frac{2\,l}{1+l^2},\quad b_{21}=\frac{-2\,l}{1+l^2},\quad b_{22}=\frac{1-l^2}{1+l^2}$$

La sustitución ortogonal de segundo grado, será por consiguiente

$$x=\frac{(1-l^2)}{1+l^2}\,X+\frac{2\,l}{1+l^2}\,Y$$
$$y=\frac{-2\,l}{1+l^2}\,X+\frac{1-l^2}{1+l^2}\,Y.$$

Ejemplo segundo.—Formar una sustitución ortogonal de tercer grado.

En este caso el número de elementos arbitrarios será

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

que llamaremos, l, m, n y se tendrá

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & l & -m \\ -l & 1 & n \\ m & -n & 1 \end{vmatrix} = 1 + l^2 + m^2 + n^2$$

$$A_{11} = 1 + n^2,\ A_{12} = l + m\,n,\ A_{13} = l\,n - m,\ A_{21} = m\,n - l$$

$$A_{22} = 1 + m^2,\ A_{23} = n + l\,m,\ A_{31} = m + l\,n,\ A_{32} = m\,l - n$$

$$A_{33} = 1 + l^2$$

$$b_{11} = \frac{2(1+n^2) - \Delta}{\Delta} = \frac{1 + n^2 - l^2 - m^2}{1 + l^2 + m^2 + n^2}$$

$$b_{12} = \frac{2(l + n\,m)}{1 + l^2 + m^2 + n^2},\ b_{13} = \frac{2(l\,n - m)}{1 + l^2 + m^2 + n^2}$$

$$b_{21} = \frac{2(m\,n - l)}{1 + l^2 + m^2 + n^2},\ b_{22} = \frac{2(1 + m^2) - \Delta}{\Delta} =$$

$$= \frac{1 + m^2 - l^2 - n^2}{1 + l^2 + m^2 + n^2},\ b_{23} = \frac{2(n + l\,m)}{1 + l^2 + m^2 + n^2}$$

$$b_{31} = \frac{2(m - l\,n)}{1 + l^2 + m^2 + n^2},\ b_{32} = \frac{2(m\,l - n)}{1 + l^2 + m^2 + n^2}$$

$$b_{33} = \frac{2(1 + l^2) - \Delta}{\Delta} = \frac{1 + l^2 - m^2 - n^2}{1 + l^2 + m^2 + n^2}$$

Estos valores de b son los coeficientes de la sustitución que se puede ya formar inmediatamente.

CAPÍTULO III.

DISCRIMINANTES.

17. Se llama discriminante de una forma la resultante de las derivadas de esta forma con relación á cada una de las variables: por ejemplo, el discriminante de la binaria cuadrada

$$u = a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2$$

será la resultante de las ecuaciones

$$u'_x = 2 a_0 x + 2 a_1 y$$

$$u'_y = 2 a_1 x + 2 a_2 y$$

es decir, de

$$a_0 x + a_1 y = o$$

$$a_1 x + a_2 y = o$$

por lo tanto, llamándole D, se tendrá:

$$D = a_0 a_2 - a_1^2$$

El de la binaria cúbica

$$u = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

será la resultante de las ecuaciones

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2 = o$$

$$a_1 x^2 + 2 a_2 x y + a_3 y^2 = o$$

y por consiguiente, adoptando el método dialítico de Silvester, se tendrá:

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 - \\ -3 a_1^2 a_2^2 + 4 a_1^3 a_3$$

Por último, el de la binaria bicuadrada

$$u = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6 a_2 x^2 y^2 + 4 a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

será la resultante de

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3 = 0$$

$$a_1 x^3 + 3 a_2 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_4 y^3 = 0$$

y por consiguiente

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

18. Teorema.—*Si una forma es del grado* n *y de* k *variables, el discriminante es una función homogénea de los coeficientes, del grado* k $(n - 1)^{k-1}$.

En efecto, siendo el discriminante, en la hipótesis hecha, la resultante de k ecuaciones del grado $(n - 1)$, debe contener los coeficientes de cada una de estas ecuaciones en un grado igual al producto de los grados de las $(k-1)$ restantes, es decir $(n-1)^{k-1}$ y como en cada una de ellas entran en primer grado y hay k, resulta para el grado del discriminante $k(n-1)^{k-1}$

l. q. q d.

Los ejemplos anteriores comprueban la exactitud de este teorema y á priori hubiera podido establecerse que los grados de los respectivos discriminantes debían ser

$$2(2-1)^{2-1}=2, \quad 2(3-1)^{2-1}=4, \quad 2(4-1)^{2-1}=6$$

como en efecto sucede

COROLARIO.—*El grado del discriminante de una forma binaria y del grado* n *tiene por expresión* $2(n-1)$.

19. TEOREMA.—*Si en la forma propuesta se da á los coeficientes literales subíndices iguales á los exponentes de una misma variable á la que multiplican, por ejemplo la* y *(como hemos venido haciendo), el peso del discriminante en cada término será constante é igual á* $n(n-1)^{k-1}$.

Se ha demostrado, en efecto, en la teoría de la eliminación; que si hay entre los subíndices de los coeficientes y exponentes de las variables la concordancia que establece el enunciado del teorema, la resultante resulta isobárica y de un peso igual al producto de los grados de las ecuaciones $m \times n \times p \times \ldots$ Ahora bien, es evidente que si en la primera, por ejemplo, de dichas ecuaciones el subíndice correspondiente á y^0, en lugar de ser cero es q, el de y^1 $q+1$, etc., con esta modificación se obtendrá por resultado el que los subíndices de la resultante aumentarán en tantas veces q como coeficientes de la primera ecuación se encuentran en cada termino de dicha resultante, esto es, $n \times p \times \ldots$ y por consiguiente cada termino será del peso

$$m \times n \times p \times \ldots \times q \times n \times p \times \ldots = (m+q)\; n \times p \times \ldots$$

Veamos ahora lo que ocurre al hallar el discriminante.

Empezamos por encontrar las k derivadas u_x, u_y, u_z ..... de la forma u que serán del grado $(n-1)$ y es claro que las u_y, u_z ... tendrán subíndices iguales al exponente de x pero en cambio la u_x tendrá los subíndices aumentados en una unidad respecto á dichos exponentes, puesto que aquellos no han variado y éstos han disminuido en uno: el razonamiento anterior nos demuestra que el peso de la resultante de estas derivadas ó sea el discriminante de la forma será igual al producto de los grados de las ecuaciones derivadas, esto es $(n-1)^k$ aumentado en el producto de q (que en este caso es uno) por los grados de todos menos la primera y se tendrá por consiguiente para el peso del discriminante

$$(n-1)^k + (n-1)^{k-1} = n\,(n-1)^{k-1}$$

l, q, q, d.

Corolario. — *El peso del discriminante de una forma binaria del grado* n *es* n (n—1).

Los ejemplos anteriores comprueban lo establecido

20 Teorema. *El discriminante de una forma cuadrada de cualquier número de variables es un determinante simétrico.*

Para convencerse de la exactitud de este teorema basta observar que en el determinante en cuestión, figurarán como elementos de la diagonal principal, los coeficientes de los cuadrados de las variables y que al derivar los otros términos las derivadas respecto á una cierta variable se reducen á los productos de los coeficientes de los términos en que ella entra por la otra variable que figura en el término, mientras que al derivar respecto á la otra variable queda el producto del mismo coeficiente por la variable que antes desaparecia.

En el determinante tiene pues que figurar dos veces un mismo coeficiente y facil es comprender que este coeficiente repetido formará dos elementos conjugados, asi por ejemplo, tenemos en la ternaria cuadrada.

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x z + 2 a_{23} y z$$

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = 0$$
$$a_{12} x + a_{22} y + a_{23} z = 0$$
$$a_{13} x + a_{23} y + a_{33} z = 0$$

y el discriminante será

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

que es simétrico en conformidad con lo que hemos establecido

21 Fijándonos ahora en particular en las formas binarias vamos á demostrar nuevas propiedades

Teorema.—*El discriminante de una forma binaria es igual á la resultante de la forma y su derivada respecto á una de las variables dividida por el coeficiente de la mayor potencia de dicha variable.*

Sea u la forma y u_1, u_2, sus derivadas respecto á x é y.

Por el teorema de Euler se tiene

$$n\, u = x\, u_1 + y\, u_2$$

Si sustituimos en esta igualdad las raices de $u_1 = o$ y expresamos con acentos los resultados de estas sustituciones se tendrán las igualdades

$$n\,u' = y'\,u'_2$$
$$n\,u'' = y''\,u''_2$$
$$n\,u''' = y'''\,u'''_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ahora bien el producto de los primeros miembros, aparte de los factores numéricos extraños, es la resultante de el de los segundos, teniendo en cuenta que el producto $y'\,y''\ldots = a_2$ (§ 21) es el resultado de multiplicar este coeficiente a_0 por la resultante de u_1 y u_2 es decir por la discriminante, luego

$$R_1 = a_0\,D \quad \text{ó bien} \quad D = \frac{R_1}{a_0}$$

De un modo análogo se demostraría el teorema en el caso de hallar la resultante de u_1 y u_2 y se tendrá:

$$R_2 = a_n\,D \quad \text{ó} \quad D = \frac{R_2}{a_n}$$

22. Vamos ahora á expresar el discriminante en función de las raíces pero creemos oportuno recordar antes lo que se dice al tratar de la resolución de ecuaciones homogéneas.

Sea la ecuación

$$(1) \quad a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1}\,y + a_2\,x^{n-2}\,y^2 + \ldots + a_{n-1}\,x\,y^{n-1} + a_n\,y^n = o.$$

Para hallar los valores de x é y que la verifican dividiremos por y^n y se tendrá

$$(2) \quad a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right) + a_n = o$$

Considerando á $\dfrac{x}{y}$ como incógnita tendrá esta última ecuación n raices que llamaremos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ y se tendrá por lo tanto:

$$\frac{x}{y} = \alpha_1 \quad \frac{x}{y} = \alpha_2 \quad \frac{x}{y} = \alpha_3 \ldots\ldots \frac{x}{y} = \alpha_n$$

y claro está que todos los valores de x é y que verifiquen estas igualdades serán raices de la propuesta la que tendrá por consiguiente infinitas soluciones, si bien las relaciones entre las raices apareadas serán en número finito.

De la ecuación (2) deducimos

$$a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right) + a_n =$$
$$a_0\left[\left(\frac{x}{y} - \alpha_1\right) \left(\frac{x}{y} - \alpha_2\right) \ldots\ldots \left(\frac{x}{y} - \alpha_n\right)\right]$$

y multiplicando ambos miembros por y_n se tendrá

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n =$$
$$a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots\ldots (x - \alpha_n y)$$

que será la expresión del primer miembro de una ecuación homogénea del grado n en función de las n relaciones distintas (en general) que existen entre sus raices, (que no son otra cosa que las raices de la ecuación con una incógnita que se obtiene haciendo en la propuesta $y = 1$).

23. Se puede aún hacer otra descomposición factorial que también utilizaremos. Observemos en efecto que si suponemos que á la incógnita y, le damos n valores, $y, y_2 y_3 \ldots y_n$ tales que se verifique $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \ldots y_n = a_0$ (lo cual puede siempre conseguirse) los valores de x quedarán ya fijos y podremos representarlos por $x_1\ x_2 \ldots x_n$ y fácil es ver que tendrá que verificarse

$x_1 . x_2 . x_3 \dots x_n = a_0$; de este modo las raices de la ecuación homogénea serán (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ y en función de estas cantidades tratamos de expresar el primer miembro de la ecuación.

Se tiene evidentemente

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \dots\dots +$$

$$a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right) + a_n = a_0\left[\left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_2}{y_2}\right)\dots\left(\frac{x}{y} - \frac{x_n}{y_n}\right)\right] =$$

$$a_0\left[\left(\frac{y_1 x - x_1 y}{y_1 y}\right)\left(\frac{y_2 x - x_2 y}{y_2 y}\right)\dots\left(\frac{y_n x - x_n y}{y_n y}\right)\right]$$

Multiplicando el primero y tercer miembro de la anterior igualdad por y_n y teniendo presente que $y_1 . y_2 . y_3 \dots y_n = a_0$, resulta:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = (y_1 x - x_1 y)(y_2 x - x_2 y) \dots (y_n x - x_n y).$$

24. Ya estamos en disposición de expresar el discriminante en función de los valores que anulan la forma y para ello utilizaremos las dos descomposiciones factoriales que acabamos de considerar, pero en lo que atañe á la primera debemos observar que pudiendo considerar como sistema de valores que anulan la forma los fijos de x é y iguales á la unidad y los n correspondientes de x puede establecerse

$$u = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n)$$

$$u_1 = a_0 [(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots + (x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots + (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots]$$

Ahora para hallar el discriminante dividirémos por a_0 la resultante de u y u_x sustituirémos pues en u_x las n raices de u, multiplicarémos los resultados é introduciremos el factor a_0^{n-1} por ser a_0 el primer coeficiente de u y $(n-1)$ el grado de u_x así se tendrá:

$$R = a_0^{n-1}\, a_0^{n}\, (\alpha_1 - \alpha_2)\, (\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_1)\, (\alpha_3 - \alpha_1) \ldots\ldots$$

y es fácil ver que si en la expresión de R hay un factor $(\alpha_p - \alpha_q)$ habrá otro $(\alpha_q - \alpha_p)$ y como el número de diferencias distintas será $\frac{n(n-1)}{2}$ tendremos que hacer este número de cambios de signo para poder darle á R la siguiente forma:

$$R = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, a_0^{2n-1}\, (\alpha_1 - \alpha_2)^2\, (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \ldots (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

y la discriminante será por consiguiente,

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, a_0^{2n-2}\, (\alpha_1 - \alpha_2)^2\, (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \ldots\ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

que lo mismo conviene á una forma binaria del grado n ó á una ecuación de este grado con una incógnita, pues se pasa de la primera á la segunda con la hipótesis $y = 1$.

Como el coeficiente a_0^{2n-2} no varía la cualidad del discriminante respecto al signo ó á su anulación (y esto es lo esencial en las aplicaciones) se suele prescindir de dicho coeficiente, diciendo sencillamente que el discriminante es igual al producto de los cuadrados de las diferencias de las raices, y el signo del resultado está marcado por la paridad ó imparidad de $\frac{n(n-1)}{2}$.

25. La otra descomposición factorial de la forma nos va á permitir obtener la expresión del discriminante en función de las raices $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)\ldots\ldots(x_n\ y_n)$.

Se tiene

$$u=(x y_1-y x_1)\ (x y_2-y x_2)\ldots\ldots(x y_n-y x_n)$$

$$u_x=y_1\ (x y_2-y x_2)\ (x y_3-y x_3)\ldots+y_2(x y_1-y x_1)\ (x y_3-y x_3)\ldots$$

Si sustituimos en u_x las raices de u y se forma el producto de estos resultados, se tendrá la resultante de u y u_x, pues debemos observar que si bien en la expresión de ésta se suele introducir el factor a_0^{n-1} no es precisa esta introducción cuando las raices son finitas como suponemos.

Haciendo la sustitución indicada, tendremos los siguientes resultados:

$$(u_x)_{x_1 y_1}=y_1\ (x_1 y_2-y_1 x_2)\ (x_1 y_3-y_1 x_3)\ldots$$

$$(u_x)_{x_2 y_2}=y_2\ (x_2 y_1-y_2 x_1)\ (x_2 y_3-y_2 x_3)\ldots$$

. . . .

. . . .

Multiplicando estas igualdades miembro á miembro y observando que cada factor entrará en el producto repetido dos veces aunque con distinto signo, tendremos:

$$R=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ y_1 y_2 y_3\ldots(x_1 y_2-y_1 x_2)^2\ (x_1 y_3-y_1 x_3)^2\ldots (x_2 y_3-y_2 x_3)^2\ldots$$

Si dividimos por $a_0=y_1 y_2 y_3\ldots$ tendremos la discriminante

$$D=\pm(x_1 y_2-y_1 x_2)^2\ (x_1 y_3-y_1 x_3)^2\ldots(x_2 y_3-y_2 x_3)\ldots (x_{n-1} y_n-y_{n-1} x_n)^2$$

26. EJEMPLO.—Sea la forma

$$6x^2 - 30xy + 36y^2$$

Tenemos $\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3,$

por lo tanto la primera expresión del discriminante, será:

$$D = (-1)^1 6^2 (2-3)^2 = -36.$$

La otra forma del discriminante, teniendo presente que

$x_1 = 4, \quad x_2 = 9$

es la siguiente:

$y_1 = 2, \quad y_2 = 3$

$$D = (-1)^1 (4.3 - 2.9)^2 = -36.$$

Si directamente se halla el discriminante, se tiene:

$$u_x = -12x - 30y$$

$$u_y = -30x + 72y$$

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -30 \\ -30 & 72 \end{vmatrix} = 864 - 900 = -36$$

que está conforme con los resultados obtenidos anteriormente.

27. TEOREMA.—*El discriminante del producto de dos formas es igual al producto de los discriminantes de éstas, por el cuadrado de la resultante.*

Sean las dos formas

$$u = (a_0\, a_1 \ldots a_n)\,(x, y)^n$$

$$v = (b_0\, b_1 \ldots b_p)\,(x, y)^p$$

sus discriminantes serán:

$$D = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2$$

$$D' = (x'_1 y'_2 - y'_1 x'_2)^2 (x'_1 y'_3 - y'_1 x'_3)^2 \ldots (x'_{p-1} y'_p - y'_{p-1} x'_p)^2$$

El producto de las dos formas tendrá por raíces las de una y otra, esto es:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n) \quad (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \ldots (x'_p, y'_p)$$

y por consiguiente el discriminante del producto se compondrá no sólo de los cuadrados que entran en D y D', sino también de expresiones análogas resultantes de combinar las raíces de u y v, y estas últimas forman el cuadrado de la resultante, se tendrá pues

$$D'' = D \,.\, D' \,.\, R^2$$

28. Consideremos el producto $(x - a)\,\varphi(x)$. Llamando b, c, d etc. las raíces de $\varphi(x)$, el dicho producto tendrá por raíces además de éstas la raíz a, luego su discriminante será

$$D = [(a-b)^2 \ (a-c)^2 \ldots] \ [(b-c)^2 \ (b-d)^2 \ldots]$$

el primer factor es evidentemente el cuadrado de $\varphi(a)$ y el segundo el discriminante de $\varphi(x)$, luego

$$D = [\varphi(a)]^2 \times \text{discriminante de } \varphi(x)$$

Si en particular se verifica $a = o$, se tiene la expresión $x \,.\, \varphi(x)$ y como $\varphi(o) = a_n$ resulta

$$D\,[x \,.\, \varphi(x)] = a_n{}^2 \,.\, D\,[\varphi(x)]$$

29. Teorema.—*El discriminante de la función*

$$u = (a_0 \, a_1 \ldots a_{n-1} \, a_n) \ (x_1, y)^n$$

es de la forma

$$a_n \varphi + a_{n-1}^2 \psi$$

siendo ψ el discriminante de

$$(a_0\ a_1 \ldots a_{n-1} \between x, y)^{n-1}$$

y φ una función de los coeficientes de u.

Es evidente que el mismo resultado debe obtenerse haciendo $a_n = o$ en la forma y hallando después el discriminante ó bién encontrando el discrimnante de u y haciendo en él la misma hipótesis

Si en la forma u hacemos $a_n = o$ se convierte en

$$\varphi\ (a_0\ a_1 \ldots a_{n-1} \between x, y)^{n-1}$$

y su discriminante será según la hipótesis y lo dicho anteriormente (§ 28)

$$a_{n-1}^2\ \psi$$

para que se obtenga pues el mismo resultado al hacer $a_n = o$ en el discriminante de u es preciso que sea de la forma

$$a_n \varphi + a_{n-1}^2 \psi$$

s. q. d.

Escolio. Debe notarse que hemos establecido el teorema suponiendo que la forma no tenia los coeficientes binomiales en otro caso no podriamos decir que al hacer $a_n = o$ en la forma

$$(a_0\ a_1 \ldots a_n)\ (x, y)^n$$

se convierte en

$$\varphi\ (a_0\ a_1 \ldots a_{n-1})\ (x . y)^{n-1}$$

pues los coeficientes que quedarian después de la hipótesis dicha no serian los binomiales de la forma del grado $(n-1)$.

30. Ejemplo.—Sea la forma binaria cúbica

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

su discriminante será

$$D = 27 a_0^2 a_3^2 + 4 a_0 a_2^3 + 4 a_1^3 a_3 - a_1^2 a_2^2 - 18 a_0 a_1 a_2 a_3$$

La forma cuya discriminante hemos llamado φ es en este caso

$$a_0 x^2 + a_1 x y + a_2 y^2$$

y por lo tanto

$$\psi = 4 a_0 a_2 - a_1^2.$$

Dándole á D la forma

$$D = a_3 (27 a_0^2 a_3 + 4 a_1^3 - 18 a_0 a_1 a_2) +$$
$$a_2^2 (4 a_0 a_2 - a_1^2) = a_3 \varphi + a^2 \psi$$

Se ve comprobado lo que se ha establecido en el anterior teorema.

Escolio.—En rigor, al hallar el discriminante de la cúbica que hemos considerado, se encuentra un valor triple del que hemos escrito: pero, ya anteriormente dijimos que estos factores numéricos deben siempre suprimirse.

31. Teorema.—*Si la ecuación*

$$u = (a_0 a_1 \ldots a_n)(x, y)^n = o$$

admite raices iguales, su discriminante es nulo, y reciprocamente.

La exactitud de este teorema es muy fácil de comprobar en las formas de segundo grado, pues si tenemos la ecuación

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2 = o$$

tendremos

$$x = \frac{-a_1 y \pm \sqrt{y^2 (a_1^2 - a_0 a_2)}}{a_0}$$

y evidentemente las raíces serán iguales si se verifica

$$a_1^2 - a_0 a_2 = o$$

y este es precisamante el discriminante de la binaria cuadrada.

Si en la forma se hace $y = 1$ se pasa á la ecuación de segundo grado con una incógnita y se deduce igual consecuencia.

En las ecuaciones de tercero y cuarto grado se puede hacer idéntica comprobación.

Vamos ahora á dar la demostración general del teorema.

Observemos en efecto que el discriminante de la forma en función de las raíces es el producto de factores del tipo $x_p y_q - y_p x_q$, y que si dos raíces tales como $(x_p y_p)$ y $(x_q y_q)$ son iguales se tendrá $\frac{x_p}{y_p} = \frac{x_q}{y_q}$ y por consiguiente

$$x_p y_q - y_p x_q = o$$

lo que hará que el discriminante sea nulo.

Recíprocamente, si el discriminante es nulo tendrá que serlo alguno de sus factores y se verificará:

$$x_p y_q - y_p x_q = o$$

lo que hará que se verifique $\frac{x_p}{y_p} = \frac{x_q}{y_q}$

Haciendo la hipótesis $y = 1$ la forma se convierte en una ecuación con una incógnita á las que por consiguiente es aplicable el teorema anterior.

Un sencillo razonamiento nos hubiese podido convencer de la exactitud del teorema anterior, pues si una forma tiene un factor cuadrado, las derivadas tendrán un factor común de primer grado y su resultante ó sea el discriminante de la forma tendrá por consecuencia que anularse.

32. Si una forma ternaria se puede expresar de este modo

$$X^2 \varphi + X Y \psi + Y^2 X$$

siendo X é Y funciones lineales de las variables de la forma, el discriminante debe ser nulo; porque cada término de las derivadas tiene como factor X ó Y y por consiguiente se anulará para los valores comunes á las ecuaciones $X=o$, $Y=o$.

Lo mismo podríamos establecer para una forma cuaternaria, cuyo discriminante sería nulo si dicha forma pudiese expresarse como función homogénea del segundo grado de tres funciones lineales de las variables y así sucesivamente.

Se han definido estos valores que anulan las derivadas de la forma llamándolas raices irregulares y vemos que la anulación del discriminante revela la existencia de tales raices.

CAPÍTULO IV.

INVARIANTES.

33. Decíamos al empezar este estudio que la propiedad descubierta por Boole de que el discriminante de una función goza de la notable propiedad de que al trasformar dicha función linealmente, el de la trasformada (sobre una potencia del módulo) es igual al de la primitiva, dió origen á la investigación de si existen otras funciones de los coeficientes de la forma ó aún de éstos y las variables que gozan de propiedades análogas, llegándose á obtener las invariantes, convariantes etc., de los que nos vamos á ocupar en las siguientes páginas.

Empezemos por comprobar en un ejemplo el hecho citado relativo al discriminante, sin perjuicio de dar más adelante una demostración general.

Consideremos la binaria cuadrada

$$a_0 x^2 + 2\, a_1 x y + a_2 y^2$$

cuyo discriminante es según sabemos

$$a_1^2 - a_0 a_2$$

si transformamos la forma por la sustitución lineal

$$x = l_1 X + m_1 Y$$
$$y = l_2 X + m_2 Y$$

tendremos

$$a_0 (l_1 X + m_1 Y)^2 + 2 a_1 (l_1 X + m_1 Y) (l_2 X + m_2 Y) + a_2 (l_2 X + m_2 Y)^2$$

ó bien

$$A_0 X^2 + 2 A_1 X Y + A_2 Y^2$$

siendo

$$A_0 = a_0 l_1^2 + 2 a_1 l_1 l_2 + a_2 l_2^2$$
$$A_1 = a_0 l_1 m_1 + a_1 (m_1 l_2 + l_1 m_2) + a_2 l_2 m_2$$
$$A_2 = a_0 m_1^2 + 2 a_1 m_1 m_2 + a_2 m_2^2$$

El discriminante de la transformada es

$$A_1^2 - A_0 A_2$$

y sustituyendo en lugar de A_0 A_1 A_2 sus valores resulta

$$A_1^2 - A_0 A_2 = (a_1^2 - a_0 a_2) (l_1 m_2 - m_1 l_2)^2$$

se ve pues comprobado en este ejemplo que el discriminante es una función de los coeficientes de la forma, tal que la análoga de los coeficientes de la transformada sólo difiere de ella en tener por factor una potencia del módulo de transformación, pues bien, las funciones de los coeficientes que gozan de esta propiedad se las llama *invariantes* de la forma.

La expresión analítica que liga al invariante φ de una forma con el de la transformada es por consiguiente

$$\varphi (A_0 A_1 A_2 \ldots) = \Delta^i \varphi (a_0 a_1 a_2 \ldots)$$

en la que el exponente i del módulo ha sido llamado por Mr. Hermite índice del invariante.

Si $i = o$ ó $M = 1$ se verificará

$$\varphi (A_0 A_1 A_2 \ldots) = \varphi (a_0 a_1 a_2 \ldots)$$

y se dice que la función φ es un *invariante absoluto.*

Si se consideran varias formas y se forma una función de sus coeficientes tal que se verifique la relación

$$\varphi(A_0\, A_1 \ldots B_0\, B_1 \ldots C_0\, C_1 \ldots) = \Delta^i\, \varphi(a_0\, a_1 \ldots b_0\, b_1 \ldots c_0\, c_1 \ldots)$$

siendo en general A_n B_n C_n etc., los coeficientes de las transformadas análogas á los a_n b_n c_n etc., de las primitivas se dice que la función φ es un *invariante simultáneo* de las formas dadas: así por ejemplo, si se tienen las dos formas

$$u = a_0\, x^2 + 2\, a_1\, x\, y + a_2\, y^2$$
$$v = b_0\, x^2 + 2\, b_1\, x\, y + b_2\, y^2$$

y se transforman por la sustitución lineal de costumbre es fácil de verificar que

$$A_0\, B_2 + B_0\, A_2 - 2\, A_1\, B_1 =$$
$$(l_1\, m_2 - m_1\, l_2)\, (a_0\, b_2 + b_0\, a_2 - 2\, a_1\, b_1)$$

y por consiguiente la función de los coeficientes de ambas formas

$$I = a_0\, b_2 + b_0\, a_2 - 2\, a_1\, b_1$$

es un invariante simultáneo.

Vamos ahora á demostrar algunos teoremas relativos á los invariantes y que nos servirán, ya para su obtención, ya para poder conocer si en su escritura hemos cometido algún error: pero, antes demostraremos el siguiente

34. Teorema.—*Los coeficientes* $A_0\, A_1 \ldots A_n$ *de la transformada de una forma del grado* n *son de este grado con relación á los elementos del módulo de la sustitución y lineales con relación á las coeficientes de la forma dada.*

Siendo en efecto la forma propuesta homogénea y del grado n con relación á las variables de dicha forma lo será así mismo evidentemente respecto á los de la transformada y como los coeficientes de la sustitución marchan unidos á las variables que afectan y tienen en las relaciones de transformación iguales exponentes, siempre habrá coincidencia entre los grados de unos y otras. En cuanto á los coeficientes $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n$ es evidente que no siendo afectados por la sustitución, continuarán en primer grado como sucedía en la forma dada.

35. TEOREMA.—*El invariante es función homogénea respecto á los coeficientes de la forma.*

Teniendo en efecto el invariante la propiedad de no ser alterado (salvo la potencia del módulo) al hacer una sustitución lineal, podemos efectuar la siguiente:

$$x = l\mathrm{X} \quad y = l\mathrm{Y} \quad z = l\mathrm{Z} \quad \text{etc.}$$

cuyo módulo es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & l \end{vmatrix} = l^h \text{ (h número de variables)}$$

pero como con la sustitución indicada cada coeficiente, tal como a_p se convierte en $a_p\, l^n$; resulta, que el invariante $\varphi\,(a_0\, a_1 \ldots a_n)$ se convierte en

$$\varphi\,(a_0\, l^n,\ a_1\, l^n \ldots a_n\, l^n)$$

y por consiguiente llamando i al índice del invariante, se tendrá que verificar

$$\varphi(a_0\, l^n,\ a_1\, l^n \ldots a_n\, l^n) = l^{hi}\,\varphi\,(a_0\, a_1 \ldots a_n)$$

lo que exige que todos los términos de φ sean del grado $h\,i$ y por consiguiente homogénea dicha función

s. q. d.

36. TEOREMA.—*El índice de un invariante es igual al cociente de dividir por el número de variables de la forma el producto del grado de éste por el del invariante.*

Porque siendo la función φ homogénea y del grado g por ejemplo, el exponente de l en cada término del primer miembro de la última igualdad será $n\,g$ y por consiguiente tendrá que verificarse $n\,g = h\,i$, de donde se deduce

$$i = \frac{n\,g}{h}$$

s. q. d.

Corolario.—Si la forma es binaria $h=2$, y por lo tanto

$$i = \frac{ng}{2}$$

deduciéndose que si n es impar; como i tiene que ser entero, será $g=2$ ó lo que es lo mismo:

Una forma binaria de grado impar sólo puede tener invariante de grado par.

37. TEOREMA.—*El peso de cada término del invariante de una forma binaria es constante é igual al índice.*

Consideremos un término cualquiera del invariante, por ejemplo

$$a_p^{\,e_p}\, a_q^{\,e_q}\, a_r^{\,e_r} \,\ldots\ldots\, a_t^{\,e_t}$$

y se trata de demostrar la igualdad

$$p.\, e_p + q.\, e_q + r.\, e_r + \ldots\ldots + t.\, e_t = \frac{ng}{2}$$

Hagamos en la forma la siguiente sustitución:

$$x = X$$
$$y = l\,Y$$

cuyo módulo es evidentemente $\Delta = l$.

Como los índices de los coeficientes los suponemos iguales á los exponentes de y, claro está que cada coeficiente adquirirá como factor una potencia de l igual á su índice, por lo tanto:

a_p se convierte en $a_p\,l^p$
a_q .... en $a_q\,l^q$
a_r .... en $a_r\,l^r$
....
....
a_t .... en $a_t\,l^t$

y

$a_p^{e_p}$ .... en $a_p^{e_p} \cdot l^{p.e_p}$
$a_q^{e_q}$ .... en $a_q^{e_q} \cdot l^{q.e_q}$
$a_r^{e_r}$ .... en $a_r^{e_r} \cdot l^{r.e_r}$
....
$a_t^{e_t}$ .... en $a_t^{e_t} \cdot l^{t.e_t}$

y el término considerado

$$a_p^{e_p} \cdot a_q^{e_q} . a_r^{e_r} \ldots a_t^{e_t} \text{ en } l^{p.e_p + q.e_q + r.e_r + \ldots t.e_t} \times$$
$$\times a_p^{e_p} a_q^{e_q} \times \ldots\ldots \times a_t^{e_t}$$

pero por la propiedad de invariancia se sabe á priori que el término considerado debe adquirir el factor $l^{\frac{n g}{2}}$ luego tendria que verificarse la igualdad que queriamos establecer.

Puede comprobarse la verdad de este teorema en la forma binaria cuadrada, cuyo invariante $a_1^2 - a_0\, a_2$ es isobárico y de peso dos; como debe suceder, pues en este caso

$$\frac{n\,g}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

38. Teorema.—*El invariante de una forma binaria es* (salvo el signo) *simétrico respecto á los coeficientes equidistantes de los extremos.*

Sea la forma binaria

$$(a_0\, a_1 \ldots\ldots a_n)\,(x\, y)^n$$

y consideremos en ella dos términos equidistantes de los extremos, tales como $a_p\, x^{n-p}\, y^p$, y $a_{n-p}\, x^p\, y^{n-p}$; si en la forma hacemos la sustitución $x = Y$, $y = X$, dichos términos se convierten respectivamente en $a_p\, X^p\, Y^{n-p}$ y $a_{n-p}\, X^{n-p}\, Y^p$ es decir, que se cambian entre si los coeficientes equidistantes.

Ahora bien: como el módulo de la sustitución es $\Delta = 1$ y su indice según sabemos $\frac{ng}{2}$, se tendrá que verificar, llamando φ á un invariante:

$$\varphi\,(a_n\, a_{n-1} \ldots\ldots a_1 .\, a_0) = (-1)^{\frac{n\,g}{2}}\; \varphi\,(a_0 a_1 \ldots\ldots a_n)$$

luego exceptuando el signo, el invariante no altera al cambiar entre si los coeficientes equidistantes de los extremos y por consiguiente es simétrico respecto á estos coeficienres.

s. q. d.

Escolio. Si $\frac{ng}{2}$ es par, ni aun el signo varia y el invariante es verdaderamente simétrico, pero si $\frac{ng}{2}$ es impar, alterándose el signo, solo es *emisimétrico.*

39. Teorema.—*Todo invariante de una forma binaria debe satisfacer á la siguiente ecuación*

$$a_0 \frac{d\varphi}{da} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{d\varphi}{da_n} = o.$$

Si suponemos que en la forma

$$(a_0 a_1 \ldots\ldots a_n)(x y)^n$$

hacemos la sustitución

$$x = X + m_1 Y$$
$$y = Y$$

cuyo módulo es $\Delta = 1$, debe verificarse

$$\varphi(a_0 a_1 \ldots\ldots a_n) = \varphi(A_0 A_1 \ldots\ldots A_n)$$

Ahora bien: hemos dicho al tratar de las sustituciones lineales que la precedente sustitución convierte los coeficientes de la forma en los siguientes:

a_0	no	varía
a_1	en	$a_1 + a_0 m_1$
a_2	en	$a_2 + 2a_1 m_1 + a_0 m_1^2$
a_3	en	$a_3 + 3a_2 m_1 + 3a_1 m_1^2 + a_0 m_1^3$
....	....	....
....	....	....

y se tendrá por consiguiente por la fórmula de Taylor

$$\varphi(A_0 A_1 \ldots A_n) = \varphi(a_0,\ a_1 + a_0 m_1,\ a_2 + 2 a_1 m_1 + a_0 m_1^2 + \ldots) =$$

$$\varphi + a_0 m_1 \frac{d\varphi}{da_1} + (2 a_1 m_1 + a_0 m_1^2) \frac{d\varphi}{da_2} +$$

$$(3 a_2 m_1 + 3 a_1 m_1^2 + a_0 m_1^3) \frac{d\varphi}{d a} + \ldots\ldots +$$

$$\frac{1}{2} \Big[a_0^2 m_1^2 \frac{d^2\varphi}{d a^2} + 2 (2 a_0 a_1 m_1^2 + 3 a_0^2 m_1^3) \frac{d^2\varphi}{d a_1\, d a_2} +$$

$$(4 a_1^2 m_1^2 + 4 a_0 a_1 m_1^3 + a_0^2 m_1^4) \frac{d^2\varphi}{d a_2^2} + \ldots\ldots \Big] + \text{etc.}$$

ó bien ordenando con relación á m_1

$$\varphi(A_0 A_1 \ldots A_n) =$$

$$\varphi + \left(a_0 \frac{d\varphi}{d a_1} + 2 a_1 \frac{d\varphi}{d a_2} + 3 a_2 \frac{d\varphi}{d a_3} + \ldots + m_1 \right) +$$

$$\left(a_0 \frac{d\varphi}{d a_2} + 3 a_1 \frac{d\varphi}{d a_3} + \ldots + \frac{a_0^2}{2} \frac{d^2\varphi}{d a_1^2} + \right.$$

$$\left. 2 a_0 a_1 \frac{d^2\varphi}{d a_1\, d a_2} + 2 a_1^2 \frac{d^2\varphi}{d a_2^2} + \ldots \right) m_1^2 + \ldots\ldots$$

Si indicamos por Δ la operación que representa el coeficiente de m_1, se tendrá

$$\Delta\varphi = a_0 \frac{d\varphi}{d a_1} + 2 a_1 \frac{d\varphi}{d a_2} + 3 a_2 \frac{d\varphi}{d a_3} + \ldots + n a_{n-1} \frac{d\varphi}{d a_n}$$

Si ahora hacemos con $\Delta\varphi$ la misma operación hecha con φ é indicamos esto por $\Delta^2\varphi$ se tendrá

$$\Delta^2\varphi = a_0 \frac{d(\Delta\varphi)}{d a_1} + 2 a_1 \frac{d(\Delta\varphi)}{d a_2} + 3 a_2 \frac{d(\Delta\varphi)}{d a_3} +$$

$$..... + n\, a_{n-1} \frac{d\,(\Delta\,\varphi)}{d\,a_n} = a_0 \left(a_0 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1^2} + 2\, \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} + \right.$$

$$2\;a_1 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1\;d\,a_2} + 3\;a_2 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1\;d\,a_3} + \left. ... \right) +$$

$$2\,a_1 \left(a_0 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1\;d\,a_2} + 2\,a_1 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_2^2} + 3\;\frac{d\,\varphi}{d\,a_3} + \right.$$

$$3\,a_2 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_2\;d\,a_3} + \left. ... \right) + 3\;a_2 \left(a_0 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1\;d\,a_3} + \right.$$

$$2\,a_1 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_2\;d\,a_3} + 3\,a_2 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_3^2} + \left. ..... \right) + ... =$$

$$2 \left(a_0 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + 3\;a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_3} + ... \right) + a_0^2 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1^2} +$$

$$4 \left(a_0\,a_1 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1\;d\,a_2} + a_1^2 \frac{d^2\,\varphi}{d\;a_2^2} + ... \right) + ...$$

Si comparamos este resultado con el coeficiente de m_1^2 es fácil vér que es doble de aquél, por lo tanto generalizando resulta

$$\varphi\,(A_0\;A_1\;.....\;A_n) =$$

$$\varphi\,(a_0\,a_1\;...\,a_n) + (\Delta\,\varphi)\,m_1 + \frac{1}{2}\,(\Delta^2\,\varphi)\,m_1^2 +$$

$$\frac{1}{3!}\,(\Delta^3\,\varphi)\;m_1^3 + \frac{1}{4!}\,(\Delta^4\,\varphi)\,m_1^4 + ...$$

luego para que se verifique la relación (1) es decir para que la función φ sea invariante tendrá que ser

$$\Delta\,\varphi = 0 \quad \Delta^2\,\varphi = 0 \quad \Delta^3\,\varphi = 0 \quad \text{etc.}$$

siendo todas consecuencia de la primera $\Delta \varphi = 0$ que demuestra el teorema.

Escolio.—Si en la forma dada cambiamos entre si los coeficientes equidistantes de los extremos, la función que se obtiene será:

$$(a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0) \quad (\varphi\, y)^n$$

y según sabemos un invariante de la primitiva tal como

$$\varphi\, (a_0\, a_1 \ldots\ldots a_n)$$

lo será también de esta transformada, luego tendrá que verificar la ecuación

$$n\, a_1 \frac{d\varphi}{da_0} + (n-1)\, a_2 \frac{d\varphi}{da_1} + \ldots + a_n \frac{d\varphi}{d\, a_{n-1}} = 0$$

40. Supongamos ahora que la forma no tenga los coeficientes binomiales y sea por ejemplo

$$u = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} y + a_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots + a_k\, x^{n-k}\, y^k + \ldots +$$
$$a_{n-1}\, x\, y^{n-1} + a_n\, y^n$$

á la que podemos dar la forma

$$u = a_0\, x^n + n\left(\frac{a_1}{n}\right) x^{n-1}\, y +$$
$$\frac{n\,(n-1)}{2!}\left(\frac{a_2 . 2!}{n\,(n-1)}\right) x^{n-2}\, y^2 + \ldots +$$
$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a_k\, n\,!}{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}\right) x^{n-k} y^k + \ldots + a_n\, y^n$$

Tendremos pues para reemplazar en las ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

$$a_1 \quad \text{por} \quad \frac{a_1}{n}$$

$$a_2 \quad \text{por} \quad \frac{a_2 \,.\, 2!}{n\,(n-1)}$$

$$a_k \quad \text{por} \quad \frac{a_k \,.\, k!}{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}$$

....

....

y se tendrá que

$$a_0 \frac{d\varphi}{d\,a_1} \text{ se convierte en } a_0 \frac{d\varphi}{d\left(\frac{a_1}{n}\right)} = n\,a_0 \frac{d\varphi}{d\,a_1}$$

$$2\,a_1 \frac{d\varphi}{d\,a_2} \quad \text{en} \quad 2\,\frac{a_1}{n} \cdot \frac{d\varphi}{d\left(\frac{a_2 \,.\, 2!}{n\,(n-1)}\right)} =$$

$$2\,\frac{a_1}{n} \cdot \frac{n\,(n-1)}{2!} \cdot \frac{d\varphi}{d\,a_2} = (n-1)\,a_1 \frac{d\varphi}{d\,a_2}$$

. . . .

. . . .

$$(k+1)\,a_k \frac{d\varphi}{d\,a_{k+1}} \quad \text{en} \quad (k+1)\,\frac{a_k \,.\, k!}{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)} \,.$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{a_{k+1} \,.\, (k+1)!}{n\,(n-1)\ldots(n-k)}\right)} = (k+1)\,\frac{a_k \,.\, k!}{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)} \,.$$

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!} \cdot \frac{d\varphi}{d\,a_{k+1}} = (n-k)\,a_k \frac{d\varphi}{d\,a_{k+1}}$$

. . . .

. . . .

luego la primera ecuación característica se convierte en

$$n\, a_0 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + (n-1)\, a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} + (n-2)\, a_2 \frac{d\,\varphi}{d\,a_3} + \ldots\ldots +$$

$$a_{n-1} \frac{d\,\varphi}{d\,a_n} = o$$

y de un modo análogo se vería que la segunda se reduce á

$$a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_0} + 2\, a_2 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + 3\, a_3 \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} + \ldots\ldots + n\, a_n \frac{d\,\varphi}{d\,a_{n-1}} = o$$

y á estas dos ecuaciones tiene por lo tanto que satisfacer todo invariante de una forma binaria *sin coeficientes binomiales.*

41. TEOREMA.—*La suma algebráica de los coeficientes numéricos del invariante de una forma binaria es nula.*

Consideremos el invariante $\varphi\,(a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n)$; y supongamos que hacemos en él $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = a$; claro está que siendo todos sus términos del mismo grado, la parte literal de cada uno de ellos quedará reducida á a^g siendo g el grado del invariante en cuestión y si llamamos s á la suma algebraica de los coeficientes numéricos su valor será $s\, a^g$.

Si hacemos la anterior hipótesis en la ecuación característica á que tiene que satisfacer se tendrá:

$$a \frac{d\,\varphi}{d\,a} + 2\, a \frac{d\,\varphi}{d\,a} + 3\, a \frac{d\,\varphi}{d\,a} + \ldots + n\, a \frac{d\,\varphi}{d\,a} = o$$

ó bien

$$(a + 2\, a + 3\, a + \ldots\ldots) \frac{d\,\varphi}{d\,a} = o$$

y por consiguiente

$$\frac{d\varphi}{da}=o,\ \text{ó lo que es lo mismo } g\,s\,a^{s-1}=o$$

es decir $s=o$

s. q. d.

42. Hemos demostrado anteriormente que un invariante de una forma binaria es isobárico, simétrico y satisface á las ecuaciones características que hemos establecido y ahora vamos á demostrar una proposición recíproca en el siguiente

TEOREMA.—*Si tenemos una función* $\varphi(a_0\,a_1\,\ldots\ldots\,a_n)$ *de los coeficientes de una forma*

$$u=(a_0\,a_1\ldots a_n)\ (x\,y)^n$$

que es isobárica simétrica y verifica la ecuación de derivadas parciales

$$a_0\ \frac{d\varphi}{d\,a_1}+2\,a_1\,\frac{d\varphi}{d\,a_2}+3\,a_2\,\frac{d\varphi}{d\,a_3}+\ldots+n\,a_{n-1}\,\frac{d\varphi}{d\,a_n}=o.$$

dicha función será un invariante de la forma.

Supongamos que hacemos en la forma la sustitución

$$x=x_1+\frac{l_1}{l_2}\,y_1\quad y=y_1$$

según hemos visto anteriormente (§ 39) la funcion análoga á φ formada por los coeficientes de la transformada, estará ligada á ella por la relación

$$\varphi\,(A_0\ A_1\ \ldots\ldots\ A_n)=\varphi\,(a_0\,a_1\,\ldots\,a_n)+$$
$$(\Delta\,\varphi)\ \frac{l_1}{l_2}+\frac{1}{2}\,(\Delta^2\,\varphi)\times\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2+\ldots\ldots$$

y como por la hipótesis $\Delta\,\varphi=0$, y por consecuencia $\Delta^2\,\varphi=o$ ect., resulta que φ permanece invariable.

Si se hace esta otra sustitución.

$$x_1 = y_2 \quad y_1 = -x_2$$

como la función es por hipótesis simétrica é isobárica y dicha sustitución sólo obliga á cambiar en ella los coeficientes equidistantes, ya con su signo ó con signo contrario; resulta que φ á lo sumo cambia de signo.

Hágase ahora la tercera sustitución

$$x_2 = x_3 + \frac{l_1 m_2}{\Delta} y_3 \quad y_2 = y_3$$

siendo Δ el determinante $l_1 m_2 - m_1 l_2$ formado con las tres constantes arbitrarias l_1, l_2, m_2 y una cuarta m_1.

Esta sustitución no altera el valor de φ por las mismas razones que hemos dado al tratar de la primera.

Sea por último la cuarta sustitución

$$x_3 = -l_2 X \quad y_3 = -\frac{\Delta}{l_2} Y$$

y estudiemos las alteraciones que en φ produce esta sustitución.

Vamos en primer lugar á demostrar que por esta sustitución y con las hipótesis hechas cada término de φ adquiere una potencia de Δ como factor.

Consideremos un término cualquiera de φ.

Como esta función es simétrica y dos términos equidistantes de la forma propuesta a_k y a_{n-k} son por lo tanto sustituibles, resulta que existirá en correspondencia de un término de φ tal como

$$a_p^{\alpha} \; a_q^{\beta} \; a_r^{\gamma} \text{ este otro } a_{n-p}^{\alpha} \; a_{n-q}^{\beta} \; a_{n-r}^{\gamma}$$

y debiendo estos términos tener el mismo peso tendrá que verificarse la igualdad

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = (n-p)\alpha + (n-q)\beta + (n-r)\gamma$$

La sustitución de que nos ocupamos transformará

$$a_p \quad \text{en} \quad a_p^{\alpha}\, l_2^{(n-p)\alpha}\, \frac{\Delta^{p\alpha}}{l_2^{p\alpha}}$$

la cual es fácil verificar observando que a_p es en la forma el coeficiente literal de $x^{n-p}\, y^p$ y por consiguiente $a_p^{\alpha}\ a_q^{\beta}\ a_r^{\gamma}$ se convertirá en

$$a_p^{\alpha}\, l_2^{(n-p)\alpha}\, \frac{\Delta^{p\alpha}}{l_2} \,.\, a_q^{\beta}\, l_2^{(n-q)\beta}\, \frac{\Delta^{q\beta}}{l_2^{q\beta}} \,.\, a_r^{\gamma}\, l_2^{(n-r)\gamma}\, \frac{\Delta^{r\gamma}}{l_2^{r\gamma}} =$$

$$a_p^{\alpha} \,.\, a_q^{\beta} \,.\, a_r^{\gamma}\, \frac{l_2^{(n-p)\alpha + (n-q)\beta + (n-r)\gamma}}{l_2^{p\alpha + q\beta + r\gamma}}\, \Delta^{p\alpha + q\beta + r\gamma}$$

$$= a_p^{\alpha} \,.\, a_q^{\beta} \,.\, a_r^{\gamma}\, \Delta^{p\alpha + q\beta + r\gamma}$$

por que hemos demostrado que

$$(n-p)\alpha + (n-q)\beta + (n-r)\gamma = p\alpha + q\beta + r\gamma$$

luego queda probado que un término cualquiera de φ adquiere como factor una potencia de Δ de un grado igual al peso del término y como este es el mismo en todos, dicha potencia será factor común en la función φ.

Observemos ahora que las cuatro sustituciones practicadas equivalen á la única

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= l_1 X + m_1 Y \\ y &= l_2 X + m_2 Y \end{aligned}$$

pues tenemos en efecto

$$x = x_1 + \frac{l_1}{l_2}\, y_1 = y_2 - \frac{l_1}{l_2}\, x_2 = y_2 -$$

$$\frac{l_1}{l_2}\left(x_3 + \frac{l_1 m_2}{\Delta} y_3\right) = -\frac{\Delta}{l_2} Y -$$

$$\frac{l_1}{l_2}\left(-l_2 X - \frac{l_1 m_2}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{l_2} Y\right) =$$

$$l_1 X + \left(\frac{l_1 m_2 - \Delta}{l_2}\right) Y = l_1 X + m_1 Y$$

y lo mismo haríamos con el valor de y.

Resulta por consiguiente de todo lo expuesto, que al hacer en φ la sustitución (1) su valor, aparte de una potencia del módulo, no varía, luego es un invariante de la forma

s. q. d.

43. Podemos demostrar que la condición de que φ sea isobárica y simétrica, trae como consecuencia la de que sea homogénea.

Consideremos en efecto un término $a_p^\alpha a_q^\beta a_r^\gamma$ y en virtud de las hipótesis establecidas se tendrá:

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = (n-p)\alpha + (n-q)\beta + (n-r)\gamma = \rho$$

llamando ρ el peso de este término.

De la igualdad anterior deducimos

$$n(\alpha+\beta+\gamma) = 2\rho$$

y siendo ρ y n constantes lo será el paréntesis $\alpha+\beta+\gamma$ que es el grado de un término cualquiera. Así mismo si establecemos que φ es homogéneo y de peso $\frac{ng}{2}$ deducimos que es simétrica porque se tendrá:

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = \frac{ng}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = g$$

$$(n-p)\,\alpha + (n-q)\,\beta + (n-r)\,\gamma = p\,\alpha + q\,\beta + r\,\gamma$$

y la función es simétrica.

Estas observaciones permiten modificar, si se desea, el enunciado del anterior teorema como puede comprenderse fácilmente.

INVARIANTES SIMULTÁNEOS.

44. Cuando se sabe obtener el invariante de una forma puede obtenerse el correspondiente á dos semejantes por el siguiente

TEOREMA.—*Si se tienen dos formas semejantes*

$$u = (a_0\, a_1 \ldots a_n)\ (x\, y)^n \quad v = (b_0\, b_1 \ldots b_n)\ (x\, y)^n$$

y llamamos φ un invariante de la primera, la función

$$b_0 \frac{d\,\varphi}{d\,a_0} + b_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + \ldots\ldots + b_n \frac{d\,\varphi}{d\,a_n}$$

será un invariante simultáneo.

En efecto; por ser φ un invariante de u, se tendrá

$$\varphi\,(A_0\, A_1 \ldots A_n) = \Delta^t\ \varphi\,(a_0\, a_1 \ldots a_n)$$

igualdad que se verificará independientemente de los valores de $a_0\, a_1 \ldots a_n$.

Por lo tanto si sustituímos á la función φ la siguiente

$$u + k\,v = (a_0 + k\,b_0\ .\ a_1 + k\,b_1\ .\ a_2 + k\,b_2 \ldots a_n + k\,b_n)\ (x\,y)^n$$

se tendrá que verificar

$$\varphi\,(A_0+k\,B_0\,.\,A_1+k\,B_1\ldots A_n+k\,B_n)=$$
$$\Delta^i\,\varphi\,(a_0+k\,b_0\,.\,a_1+k\,b_1\ldots a_n+k\,b_n)$$

Como k es determinado, los coeficientes de las diversas potencias de esta cantidad, al desarrollar los dos miembros de la anterior igualdad deberán ser iguales y se tendrá para el primer coeficiente

$$B_0\,\frac{d\,\varphi}{d\,A_0}+B_1\,\frac{d\,\varphi}{d\,A_1}+\ldots\ldots+B_n\,\frac{d\,\varphi}{d\,A_n}=$$

$$\Delta^i\left(b_0\,\frac{d\,\varphi}{d\,a_0}+b_1\,\frac{d\,\varphi}{d\,a_1}+\ldots\ldots+b_n\,\frac{d\,\varphi}{d\,a_n}\right)$$

igualdad que demuestra el teorema.

Claro está que si la operacion anterior se repite una segunda vez (lo que equivale á determinar el coeficiente de k^2) se tiene un nuevo invariante etc.

Consideremos por ejemplo las binarias cuadradas.

$$a_0\,x^2+2\,a_1\,x\,y+a_2\,y^2$$
$$b_0\,x^2+2\,b_1\,x\,y+b_2\,y^2$$

Un invariante de la primera es $a_0\,a_2-a_1^2$.

Supongamos que una transformación lineal convierte la primera en

$$A_0\,X^2+2\,A_1\,X\,Y+A_2\,Y^2$$

y la segunda en

$$B_0\,X^2+2\,B_1\,X\,Y+B_2\,Y^2,$$

evidentemente la forma

$$(a_0+k\,b_0)\,x^2+2\,(a_1+k\,b_1)\,x\,y+(a_2+k\,b)\,y^2$$

se convierte por la misma transformación en

$$(A_0+k\,B_0)\,X^2+2\,(A_1+k\,B_1)\,X\,Y+(A_2+k\,B_2)\,Y^2$$

y se tendrá

$$(A_0+k\,B_0)\,(A_2+k\,B_2)-(A_1+k\,B_1)^2=$$
$$\Delta^2\,[(a_0+k\,b_0)\,(a_2+k\,b_2)-(a_1+k\,b_1)^2]$$

é igualando los coeficientes de las mismas potencias de k resultan las relaciones

$$(A_0\,A_2-A_1^2)=\Delta^2\,(a_0\,a_2-a_1^2)$$

invariante de la primera forma:

$$(B_0\,B_2-B_1^2)=\Delta^2\,(b_0\,b_2-b_1^2)$$

invariante de la segunda forma:

$$A_0\,B_2+B_0\,A_2-2\,A_1\,B_1=\Delta^2\,(a_0\,b_2+b_0\,a_2-2\,a_1\,b_1)$$

invariante simultáneo.

La aplicación directa del teorema da

$$\frac{d\,\varphi}{d\,a_0}=a_2\quad\frac{d\,\varphi}{d\,a_1}=-2\,a_1;\quad\frac{d\,\varphi}{d\,a_2}=a_0$$

luego

$$b_0\,\frac{d\,\varphi}{d\,a_0}+b_1\,\frac{d\,\varphi}{d\,a_1}+b_2\,\frac{d\,\varphi}{d\,a_2}=b_0\,a_2-2\,a_1\,b_1+a_0\,b_2$$

que es el mismo hallado anteriormente.

Debemos observar que si dadas tres formas semejantes se encuentra por el procedimiento anterior un invariante simultáneo de las dos primeras y se opera con éste y la tercera de un modo análogo al anteriormente expuesto se llegará á un invariante de las tres formas y así sucesivamente.

INVARIANTES ABSOLUTOS.

45. Cuando una forma admite más de un invariante, se puede obtener un invariante absoluto por el siguiente procedimiento.

Supongamos que la forma

$$(a_0\, a_1 \ldots\, a_n)\,(x\, y)^n$$

tenga los dos invariantes

$$\varphi\,(a_0 a_1 \ldots\ldots a_n) \quad \text{y} \quad \psi\,(a_0\, a_1 \ldots\ldots a_n)$$

se tendrá por hipótesis

$$\varphi\,(A_0\, A_1 \ldots\, A_n) = \Delta^i\; \varphi\,(a_0\, a_1 \ldots\, a_n)$$

$$\psi\,(A_0\, A_1 \ldots\, A_n) = \Delta^k\; \psi\,(a_0\, a_1 \ldots\, a_n)$$

ó bien

$$[\varphi\,(A_0\, A_1 \ldots\, A_n)]^k = \Delta^{ik}\,[\varphi\,(a_0\, a_1 \ldots\, a_n)]^k$$

$$[\psi\,(A_0\, A_1 \ldots\, A_n)]^i = \Delta^{ik}\,[\psi\,(a_0\, a_1 \ldots\, a_n)]^i$$

Dividiendo estas igualdades, miembro á miembro, se destruirá el factor Δ^{ik} y se tendrá una igualdad de la forma

$$\pi\,(A_0\, A_1 \ldots\, A_n) = \pi(a_0\, a_1 \ldots\ldots a_n)$$

que será un invariante absoluto

Sea por ejemplo la binaria de cuarto grado

$$a_0\, x^4 + 4\, a_1\, x^3\, y + 6\, a_2\, x^2\, y^2 + 4\, a_3\, x\, y^3 + a_4\, y^4$$

Se puede verificar que se tiene

$$A_0\, A_4 - 4\, A_1\, A_3 + 3\, A_2^2 = \Delta^4\,(a_0\, a_4 - 4\, a_1\, a_3 + 3\, a_2^2)$$

$$A_0\, A_2\, A_4 + 2\, A_1\, A_2\, A_3 - A_0\, A_3^2 - A_4\, A_1^2 - A_2^3 =$$
$$\Delta^6\,(a_0\, a_2\, a_4 + 2\, a_1\, a_2\, a_3 - a_0\, a_3^2 - a_4\, a_1^2 - a_2^3)$$

elevando la primera igualdad al cubo, la segunda al cuadrado y dividiendo miembro á miembro los resultados, se tendrá el invariante absoluto

$$\frac{[A_0\, A_4 - 4\, A_1\, A_3 + 3\, A_2^2]^3}{[A_0\, A_2\, A_4 + 2\, A_1\, A_2\, A_3 - A_0\, A_3^2 - A_4\, A_1^2 - A_2^3]^2} =$$

$$\frac{[a_0\, a_4 - 4\, a_1\, a_3 + 3\, a_2^2]^3}{[a_0\, a_2\, a_4 + 2\, a_1\, a_2\, a_3 - a_0\, a_3^2 - a_4\, a_1^2 - a_2^3]^2}$$

46. El procedimiento que hemos seguido para la formación de invariantes absolutos justifica el siguiente

TEOREMA.—*Cuando una forma tiene más de un invariante tendrá forzosamente un absoluto.*

Corolario.—Una forma binaria cuadrada ó cúbica no puede tener más de un invariante.

Por que al tener dos existirá uno absoluto y se verificará la relación

$$\varphi\,(A_0\, A_1 \,\ldots\ldots\, A_n) = \varphi\,(a_0\, a_1 \,\ldots\ldots\, a_n)$$

Ahora bien dicha igualdad no puede verificarse en el caso que consideramos pues si

$$(a_0\, a_1 \,\ldots\ldots\, a_n)\,(x\, y)^n$$

es la forma propuesta y

$$(A_0\, A_1 \,\ldots\ldots\, A_n)\,(X\, Y)^n$$

su transformada, los coeficientes $A_0\, A_1 \,\ldots\ldots\, A_n$, que son en número de $(n+1)$ á lo más, serán evidentemente funciones de $a_0\, a_1 \,\ldots\ldots\, a_n$ y de los cuatro coeficientes $l_1\, m_1,\, l_2,\, m_2$, tenemos gor consiguiente $(n+1)$ relaciones y la eliminación entre ellas de los coeficientes de la sustitución nos dará por lo tanto á lo sumo $(n+1) - 4 = n - 3$ relaciones independientes del módulo, luego la invariación absoluta exige que n sea mayor que tres

s q d

:

FORMACIÓN DE INVARIANTES.

47. Las propiedades que llevamos expuestas nos permiten formar invariantes del modo que vamos á explicar haciendo aplicación á algunos ejemplos relativos á formas binarias.

1.º Dada una forma binaria bicuadrada

$$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\ (x,\ y)^4$$

obtener un invariante de segundo grado.

Tenemos en este caso $n = 4$, $y = 2$ y por consiguiente su peso, que según sabemos (§ 36 y 37) es igual á su índice, será $\frac{n\,g}{2} = 4$. Llamemos

$$\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$$

á los exponentes de

$$a_0\ \ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4$$

y observemos que estos exponentes no pueden valer más de dos puesto que el invariante ha de ser de segundo grado.

Se verificarán las relaciones

$$0\ .\ \alpha_0 + 1\ .\ \alpha_1 + 2\ .\ \alpha_2 + 3\ .\ \alpha_3 + 4\ .\ \alpha_4 = 4$$

(peso del invariante)

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2$$

(grado del invariante.)

Las únicas combinaciones que podemos hacer con estas cantidades son:

$$1.^a\ \alpha_4 = 1,\quad \alpha_0 = 1,\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$2.^a\ \alpha_3 = 1,\quad \alpha_1 = 1,\quad \alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$$

$$3.^a\ \alpha_2 = 2,\quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

El invariente tendrá pues la siguiente forma

$$\varphi = A\, a_0\, a_4 + B\, a_1\, a_3 + C\, a_2^2$$

para determinar los coeficientes A, B y C observemos que teniendo que satisfacer φ la ecuación de derivadas parciales se tendrá:

$$a_0 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + 2\,a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} + 3\,a_2 \frac{d\,\varphi}{d\,a_3} + 4\,a_3 \frac{d\,\varphi}{d\,a_4} = 0$$

ó bien

$$B\, a_0\, a_3 + 4\, C\, a_1\, a_2 + 3\, B\, a_1\, a_2 + 4\, A\, a_0\, a_3 = 0$$

ó lo que es lo mismo

$$(4\, A + B)\, a_0\, a_3 + (3\, B + 4\, C)\, a_1\, a_2 = 0$$

y como esto se ha de verificar independientemente de los valores de los coeficientes de la forma resulta

$$4\, A + B = 0, \quad 3\, B + 4\, C = 0$$

nos encontramos pues con solo dos ecuaciones para determinar los coeficientes; pero, como sabemos á priori que las condiciones establecidas son suficientes para la formación de un invariante, podemos dar un valor arbitrario á uno de ellos, por ejemplo; $A = 1$ y se tendrá $B = -4$, $C = 3$ y por lo tanto

$$\varphi = a_0\, a_4 - 4\, a_1\, a_3 + 3\, a_2^2$$

pudiera creerse que dando un valor distinto al coeficiente arbitrario resulta uno diferente para φ pero no sucede esto en el fondo pues la única diferencia será un factor numérico que puede suprimirse.

Así por ejemplo haciendo $B = 1$ resulta

$$A = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{3}{4}$$

y por consiguiente

$$\varphi = -\frac{a_0 a_4}{4} + a_1 a_3 - \frac{3 a_2^2}{4}$$

y de este valor se pasa al anterior multiplicando por -4.

2.° Hallar un invariante de cuarto grado de la binaria cúbica.

Su peso será $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ y tendrá la siguiente forma

$$\varphi = A\, a_0^2 a_3^2 + B\, a_1^2 a_2^2 + C\, a_0 a_1 a_2 a_3 + D\, a_0 a_2^3 + E\, a_1^3 a_3$$

y aplicando á φ la ecuación de derivadas parciales resulta, después de sacar factores comunes

$$(4\,B + 3\,E)\, a_1^3 a_2 + (2\,C + 3\,E)\, a_0 a_1^2 a_3 + (6\,A + C)\, a_0^2 a_2 a_3 + (2\,B + 3\,C + 6\,D)\, a_0 a_1 a_2^2 = 0$$

y de aquí

$$\begin{aligned} 4\,B + 3\,E &= 0 \\ 2\,C + 3\,E &= 0 \\ 6\,A + C &= 0 \\ 2\,B + 3\,C + 6\,D &= 0 \end{aligned}$$

Como hay una ecuación menos que incógnitas hagamos arbitrariamente $A = 1$ y resultará

$$C = -6,\ E = 4,\ B = -3,\ D = 4$$

luego

$$\varphi = a_0^2 a_3^2 - 3\, a_1^2 a_2^2 - 6\, a_0 a_1 a_2 a_3 + 4\, a_0 a_2^3 + 4\, a_1^3 a_3$$

Este método tal como lo hemos seguido en los ejemplos anteriores se hace generalmente muy pesado por la dificultad de hallar todos los sistemas de valores posibles de las cantidades

$\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2$ etc., pero puede simplificarse algo del siguiente modo.

Sea i el peso de un invariante cuya parte literal queremos formar; si en lugar de escribir la potencia de una letra escribimos los factores que forman esta potencia, por ejemplo; en lugar de $a_3^2 . a_3 . a_3$ es evidente, que el peso de un término tal como $a_p^\alpha\, a_q^\beta\, a_r^\gamma$ ó

$$\overbrace{a_p . a_p \dots a_p}^{\alpha} \quad \overbrace{a_q . a_q \dots a_q}^{\beta} \quad \overbrace{a_r . a_r \dots a_r}^{\gamma}$$

se reducirá con esta escritura á la suma de todos sus subíndices.

Queda pues la cuestión reducida á buscar en la serie

$$0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots n,$$

los grupos de números que ya repetidos ó sin repetir (y en número igual al grado del invariante) dan una suma i.

Así en el primer ejemplo la serie es $0, 1, 2, 3, 4$; $i=4, g=2$ y se tendrán las siguientes combinaciones 04, 22, 13.

Favorece la investigación el conocer de antemano el número total de combinaciones y para ello existen procedimientos que fijan con exactitud este número; pero que no decimos aquí por no alargar demasiado estos elementos.

48. Otro procedimiento para la formación de invariantes es consecuencia de la propiedad de invariancia de que gozan ciertas funciones que nos son conocidas y sabemos determinar.

Los siguientes teoremas nos dan á conocer dichas funciones.

TEOREMA.—*Si se tienen* n *sistemas de ecuaciones con* n *variables ligadas linealmente á otras por las relaciones.*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= l_1\, X_1 + m_1\, Y_1 + n_1\, Z_1 + \ldots\ldots \\
y_1 &= l_2\, X_1 + m_2\, Y_1 + n_2\, Z_1 + \ldots\ldots \\
z_1 &= l_3\, X_1 + m_3\, Y_1 + n_3\, Z_1 + \ldots\ldots \\
x_2 &= l_1\, X_2 + m_1\, Y_2 + n_1\, Z_2 + \ldots\ldots \\
y_2 &= l_2\, X_2 + m_2\, Y_2 + n_2\, Z_2 + \ldots\ldots \\
z_2 &= l_3\, X_2 + m_3\, Y_2 + n_3\, Z_2 + \ldots\ldots \\
x_3 &= l_1\, X_3 + m_1\, Y_3 + n_1\, Z_3 + \ldots\ldots \\
y_3 &= l_2\, X_3 + m_2\, Y_3 + n_2\, Z_3 + \ldots\ldots \\
z_3 &= l_3\, X_3 + m_3\, Y_3 + n_3\, Z_3 + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Se verificará la igualdad

$$(x_1\, y_2\, z_3 \ldots\ldots) = (l_1\, m_2\, n_3 \ldots\ldots)\ (X_1\, Y_2\, Z_3 \ldots\ldots)$$

Queda justificada la verdad de este teorema con solo tener presente la regla conocida para multiplicar determinantes.

49. Consideremos una forma binaria:

$$u = (a_0\, a_1 \ldots\ldots a_n)\ (x,\, y)^n$$

se tendrá

$$u = (x\, y_1 - y\, x_1)\, (x\, y_2 - y\, x_2)\ (x\, y_3 - y\, x_3) \ldots\ldots (x\, y_n - y\, x_n)$$

siendo $(x_1,\, y_1)$ $(x_2,\, y_2) \ldots\ldots (x_n,\, y_n)$ los sistemas de valores que anulan la forma y verificándose según sabemos

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \ldots\ldots y_n = a_0$$

Si hacemos la sustitución lineal

$$
\begin{aligned}
x &= l_1\; X + m_1\; Y \\
y &= l_2\; X + m_2\; Y
\end{aligned}
$$

y llamamos $(X_1\, Y_1)$, $(X_2\, Y_2)$... los valores que según las anteriores relaciones corresponden respectivamente á

$$(x_1\ y_1)\quad (x_2\ y_2)\ldots\ldots \text{etc.}$$

ó lo que es lo mismo los valores que anulan á la transformada U de u tendremos que hacer en el primer paréntesis la siguiente sustitución

$$\begin{aligned} x &= l_1\,X + m_1\,Y \\ y &= l_2\,X + m_2\,Y \\ x_1 &= l_1\,X_1 + m_1\,Y_1 \\ y_1 &= l_2\,X_1 + m_2\,Y_1 \end{aligned}$$

y en virtud del teorema anterior se verificará

$$(X\,Y_1 - Y\,X_1) = (l_1\,m_2)\quad (x\,y_1 - y\,x_1)$$

y de un modo análogo

$$(X\,Y_2 - Y\,X_2) = (l_1\,m_2)\quad (x\,y_2 - y\,x_2)$$

. . . .

$$(X\,Y_n - Y\,X_n) = (l_1\,m_2)\quad (x\,y_n - y\,x_n)$$

y por lo tanto

$$U = (l_1\,m_2)^n\quad (x\,y_1 - y\,x_1)\,(x\,y_2 - y\,x_2)\,\ldots\,(x\,y_n - y\,x_n)$$

50. TEOREMA.—*El determinante de un sistema de ecuaciones lineales es un invariante.*

Vamos á demostrar para mayor facilidad el teorema para dos ecuaciones y se verá con sencillez que es completamente general.

Sean las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y &= c_1 \\ a_2\,x + b_2\,y &= c_2 \end{aligned}$$

El determinante es

$$\Delta = a_1\,b_2 - b_1\,a_2$$

si hacemos la sustitución

$$x = l_1 X + m_1 Y$$
$$y = l_2 X + m_2 Y$$

se tendrá

$$a_1 (l_1 X + m_1 Y) + b_1 (l_2 X + m_2 Y) = c_1$$
$$a_2 (l_1 X + m_1 Y) + b_2 (l_2 X + m_2 Y) = c_2$$

ó bien

$$(a_1 l_1 + b_1 l_2) X + (a_1 m_1 + b_1 m_2) Y = c_1$$
$$(a_2 l_1 + b_2 l_2) X + (a_2 m_1 + b_2 m_2) Y = c_2$$

y el determinante de los coeficientes es igual á

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

según queríamos demostrar.

51. Teorema.— *La resultante de dos ecuaciones*

$$u = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0$$
$$v = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \ldots + b_{n-1} x y^{n-1} + b_n y^n = 0$$

es un invariante simultáneo.

Sean respectivamente las raices de estas ecuaciones

$$(x_1 y_1) \quad (x_2 y_2) \ldots (x_n y_n) \quad \text{y} \quad (x' y') \; (x'' y'') \ldots (x^{(n)} y^{(n)})$$

Se tendrá

$$u = (y_1 x - x_1 y) \; (y_2 x - x_2 y) \ldots (y_n x - x_n \; y) = 0$$
$$v = (y' x - x' y) \; (y'' x - x'' y) \ldots (y^{(n)} x - x^{(n)} y) = 0$$

la resultante será

$$R = (x_1 y' - y_1 x') \; (x_2 y'' - y_2 x'') \ldots = 0$$

Haciendo la sustitución lineal

$$x = l_1 X + m_1 Y$$
$$y = l_2 X + m_2 Y$$

se transforman las ecuaciones en (§ 49)

$$U=(l_1\, m_2-m_1\, l_2)^n\, (y_1\, x-x_1\, y)\, (y_2\, x-x_2\, y)\ldots(y_m\, x-x_m\, y)$$
$$V=(l_1\, m_2-m_1\, l_2)^n\, (y'\, x-x'\, y)\, (y''\, x-x''\, y)\ldots(y^{(n)}\, x-x^{(n)}\, y)$$

y la resultante será

$$R_1=(l_1\, m_2-m_1\, l_2)^{mn}\, (x_1\, y'-y_1\, x')\, (x_2\, y''-y_2\, x'')\ldots$$

luego

$$R_1=(l_1\, m_2-m_1\, l_2)^{mn}\times R$$

s. q. d.

Corolario.—El discriminante de una forma binaria es un invariante.

Sabemos en efecto que el discriminante que es la resultante de las derivadas es un invariante de ellas según el teorema anterior y como en dichas derivadas sólo entran coeficientes de la forma dada nos hallamos finalmente con una función de dichos coeficientes que no altera por una sustitución lineal, luego es cierto lo que queríamos demostrar.

Escolio. Habiendo demostrado anteriormente que las formas binarias cuadrada y cúbica no tienen más que un invariante, resulta en virtud de este último corolario que dichos únicos invariantes son sus discriminantes respectivos.

52. Teorema.—*Toda función simétrica de las diferencias de las raices es un invariante con tal que todas las raices figuren el mismo número de veces.*

Antes de dar la demostración de este teorema juzgamos oportuno definir claramente lo que se entiende por función simétrica de las raices de una ecuación homogénea.

Consideremos la ecuación

$$(1)\quad a_0\, x^n+n\, a_1\, x^{n-1}\, y+\binom{n}{2}\, a_2\, x^{n-2}\, y^2+\ldots\ldots+ n\, a_{n-1}\, x\, y^{n-1}+a_n\, y^n=0$$

Si dividimos esta ecuación por $a_0 y^n$ se tendrá la siguiente

$$(2)\quad \left(\frac{x}{y}\right)^n + n\,\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)\frac{a_2}{a_0}\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \ldots + n\,\frac{a_{n-1}}{a_0}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{a_n}{a_0} = o$$

Esta cuación, considerando como incógnita $\frac{x}{y}$, tiene la forma que se suele considerar al tratar de las funciones simétricas y se sabe por lo tanto lo que son esta clase de funciones de las raices de dicha ecuación. Pues bien, se llama función simétrica de las raices de una ecuación homogénea á la función simétrica de las raices de la ecuación en $\frac{x}{y}$ que se obtiene dividiendo la propuesta por $a_0 y^n$ pero debiendo hacer desaparecer los denominadores multiplicando por una potencia conveniente de a_0.

Así por ejemplo, la función simétrica duple de la raices de la ecuación (1) se obtendrá escribiendo la función del mismo orden de las raices de la (2), esto es $\Sigma\, \alpha^p \beta^q$ siendo α y β dos raices cualesquiera de esta última. Se pondrá en lugar de α y β $\frac{x_1}{y_1}$ y $\frac{x_2}{y_2}$, resultando

$$\Sigma\, \frac{x_1^p}{y_1^p}\; \frac{x_2^q}{y_2^q}$$

y suponiendo $q > p$ multiplicaremos por a_0^q ó lo que es lo mismo $(y_1\, y_2 \ldots y_n)^q$ obteniéndose finalmente

$$\Sigma\; x_1^p\; x_2^q\; y_1^{q-p}\; y_3^q\; y_4^q\; \ldots..$$

Del mismo modo la suma de los cuadrados de las diferencias de las raices de la (2) es decir $\Sigma_1\, (\alpha - \beta)^2$ se convierte en

$$\Sigma\, (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)^2\, y_3^2\, y_4^2 \ldots..$$

Dicho esto pasemos á la demostración del teorema y observemos que la forma general de una función simétrica de las diferencias de las raices es

$$\Sigma\,(\alpha-\beta)^p\,(\alpha-\gamma)^q\,(\alpha-\delta)^r\ \ldots..$$

siendo α, β, γ... etc., las raices de la transformada.

Dicha función referida á las raices de la (1) da

$$\Sigma\ \frac{(x_1\,y_2-y_1\,x_2)^p}{y_1^p\ y_2^p}\cdot\frac{(x_1\,y_3-y_1\,x_3)^q}{y_1^q\ y_3^q}\cdot\frac{(x_1\,y_4-y_1\,x_4)^r}{y_1^r\ y_4^r}\ \ldots..$$

Tenemos ahora que multiplicar por una potencia conveniente de $y_1\,y_2 \ldots y_n$ y claro está que si bajo una misma potencia entran todas las raices, al hacer esta operación quedará una expresión de la forma.

$$\Sigma\,(x_1\,y_2-y_1\,x_2)^p\,(x_1\,y_3-y_1\,x_3)^q\ \ldots..$$

y si por el contrario no ocurre esta circunstancia quedará la anterior, pero acompañada de un factor tal como $y_4^l\ y_r^m \ldots$

En el primer caso componiéndose la función de expresiones de la forma $(x_1\,y_2-y_1\,x_2)$ que son invariantes según sabemos (§ 48) ella misma lo será también (§ 49).

En el segundo caso la presencia del factor $y_4^l\ y_r^m \ldots$ hará que la función no sea invariante.

Por ejemplo las funciones

$$\Sigma\,(\alpha-\beta)^2\,(\gamma-\delta)\quad \Sigma\,(\alpha-\beta)^2\,(\gamma-\delta)^2\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\delta)$$

son invariantes con relación á una forma bicuadrada porque *las cuatro raices* aparecen *bajo cada potencia* esto es; el cuadrado en la primera expresión, y en la segunda dicha potencia y la primera. Así es que al hacer la transformación de costumbre sólo quedarán productos de determinantes.

Dicha transformación da

$$\Sigma\ (x_1\, y^2 - y_1\, x_2)^2\ (x_3\, y_4 - y_3\, x_4)^2$$

$$\Sigma\ (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)^2\ (x_3\, y_4 - y_3\, x_4)^2\ (x_1\, y_3 - y_1\, x_3)\ (x_2\, y_4 - y_2\, x_4)$$

En cambio las siguientes funciones de las raices de una bicuadrada

$$\Sigma\ (\alpha - \beta)^2 \quad \Sigma\ (\alpha - \beta)^2\ (\gamma - \delta)$$

no pueden ser invariantes puesto que se transforman en

$$\Sigma\ y_3^2\, y_4^2\ (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)^2$$

$$\Sigma\ y_3\, y_4\ (x_1\, y_2 - y_1\, x_2)^2\ (x_3\, y_4 - y_3\, x_4)$$

CAPÍTULO V.

FUNCIONES JACOBIANA Y HESSIANA.

53. Consideremos n funciones que por comodidad designaremos por $u_1\ u_2 \ldots\ u_n$ y sus variables (que suponemos en igual número que el de funciones), por $x_1\ x_2 \ldots\ x_n$. Convengamos en que para indicar la primera derivada de una de las funciones tal como u_p con relación á una de sus variables x_q se emplee el símbolo u_{pq} por ejemplo u_{35} indicará la derivada de u_3 con relación á x_5. Formemos ahora el siguiente determinante (que se acostumbra á representar por la letra J)

$$J = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

dicho determinante se llama el Jacobiano ó la función jacobiana del sistema de funciones $u_1\ u_2 \ldots u_n$.

54. Consideremos ahora una sola función u de n variables $x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ x_n$ y convengamos en que la notación u_p indique la primera derivada de u con relación á x_p y u_{pq} el resultado de

derivar una vez con relación á x_p y una segunda con relación á x_q. Claro está que en virtud de lo que decimos se verificará $u_{pq} = u_{qp}$.

Si formamos el determinante

$$H = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

que evidentemente es simétrico, se tiene la llamada función Hessiana ó simplemente el hessiano de la u y se acostumbra á representar por la letra H.

Estas funciones jacobiana y hessiana que recuerdan los nombres de los ilustres geómetras Jacobi y Hesse tienen gran importancia en el análisis y gozan de varias propiedades que no indicaremos por encerrarnos dentro de los límites que nos hemos impuesto, sólo sí demostraremos una al tratar de los covariantes.

Vamos en las siguientes líneas á presentar ejemplos de la determinación de las funciones que nos ocupan.

Calcular el jacobiano de las dos formas cuadradas

$$u_1 = a_0\, x_1^2 + 2\, a_1\, x_1\, x_2 + a_2\, x_2^2$$
$$u_2 = b_0\, x_1^2 + 2\, b_1\, x_1\, x_2 + b_2\, x_2^2$$

tenemos

$$u_{11} = 2\,(a_0\, x_1 + a_1\, x_2)$$
$$u_{12} = 2\,(a_1\, x_1 + a_2\, x_2)$$
$$u_{21} = 2\,(b_0\, x_1 + b_1\, x_2)$$
$$u_{22} = 2\,(b_1\, x_1 + b_2\, x_2)$$

$$J=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}=u_{11}\ u_{22}-u_{21}\ u_{12}$$

y sustituyendo los valores de $u_{11}\ u_{12}$ etc., resulta

$$J=4\ [(a_0 x_1+a_1 x_2)\ (b_1 x_1+b_2 x_2)-(a_1 x_1+a_2 x_2)(b_0 x_1+b_1 x_2)]=$$
$$4\ [(a_0\ b_1)\ x_1^2+(a_0\ b_2)\ x_1\ x_2+(a_1\ b_2)\ x_2^2]$$

Calcular el jacobiano de las siguientes formas

$$u_1=a_0\ x_1^3+3\ a_1\ x_1^2\ x_2+3\ a_2\ x_1\ x_2^2+a_3\ x_2^3$$
$$u_2=b_0\ x_1^2+2\ b_1\ x_1\ x_2+b_2\ x_2^2$$
$$u_{11}=3\ (a_0\ x_1^2+2\ a_1\ x_1\ x_2+a_2\ x_2^2)$$
$$u_{21}=2\ (b_0\ x_1+b_1\ x_2)$$
$$u_{12}=3\ (a_1\ x_1^2+2\ a_2\ x_1\ x_2+a_3\ x_2^2)$$
$$u_{22}=2\ (b_1\ x_1+b_2\ x_2)$$

por lo tanto

$$J=6\ [(a_0\ b_1)\ x_1^3+(a_0\ b_2+a_1\ b_1-2\ a_2\ b_0]\ x_1^2\ x_2+$$
$$(2\ a_1\ b_2-a_2\ b_1-a_3\ b_0)\ x_1\ x_2^2+\ (a_2\ b_2-a_3\ b_1)]$$

Calcular el hessiano de la forma cuadrática

$$u=a_0\ x_1^2+2\ a_1\ x_1\ x_2+a_2\ x_2^2$$

Tenemos

$$u_1=2\ (a_0\ x_1+a_1\ x_2)$$
$$u_2=2\ (a_1\ x_1+a_2\ x_2)$$
$$u_{11}=2\ a_0 \qquad u_{12}=u_{21}=2\ a_1$$
$$u_{22}=2\ a_2$$

luego

$$H=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}=u_{11}\ u_{22}-(u_{12})^2=4\ (a_0\ a_2-a_1^2)$$

lo que nos manifiesta que aparte el factor 4 el hessiano de la forma binaria cuadrada es su discrimininante.

Sea la forma cúbica

$$u = a_0\, x_1^3 + 3\, a_1\, x_1^2\, x_2 + 3\, a_2\, x_1\, x_2^2 + a_3\, x_2^3$$

En este caso se tiene

$$u_{11} = 6(a_0 x_1 + a_1 x_2) \quad u_{12} = u_{21} = 6(a_1 x_1 + a_2 x_2) \quad u_{22} = 6(a_2 x_1 + a_3 x_2)$$

luego

$$\mathrm{H} = 36\left[(a_0\, x_1 + a_1\, x_2)\, (a_2\, x_1 + a_3\, x_2) - (a_1\, x_1 + a_2\, x_2)^2\right] =$$
$$36\left[(a_0\, a_2 - a_1^2)\, x_1^2 + (a_0\, a_3 - a_1\, a_2)\, x_1\, x_2 + (a_1\, a_3 - a_2^2)\, x_2^2\right]$$

55. Los factores numéricos que figuren en las funciones jacobiana y hessiana que hemos obtenido, suelen suprimirse por no influir dichos factores en sus propiedades y con esto se introduce una simplificación en sus expresiones y aquí creemos oportuno hacer notar que si la forma no hubiese tenido los coeficientes binomiales no cabría esta simplificación, pues los factores no lo serían comunes á todos los términos. No es sólo en estos casos y otros que anteriormente habremos podido observar en los que se ve patente la ventaja de la escritura que se ha convenido en adoptar en las formas; cuando se expresa una función de las diferencias de las raíces por medio de los coeficientes de la ecuación, la suma de los coeficientes numéricos tiene que ser nula en la hipótesis en que estamos, porque si consideramos la forma:

$$a_0\, x^n + n\, a_1\, x^{n-1}\, y + \frac{n\,(n-1)}{2}\, a_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots$$

y una función de la diferencia de sus raíces; claro está que si en ella hacemos la hipótesis

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 1$$

dicha función se reducirá á sus coeficientes numéricos, pero esto es suponer por otra parte que las raíces son iguales, luego sus diferencias tienen que anularse.

CAPÍTULO VI.

COVARIANTES.

56. Se llama covariante una función que se compone no solo de los coeficiente de la forma, sino también de las variables y que aparte una potencia del módulo de transformación no altera al hacer en la forma dada una sustitución lineal, así usando la notación de costumbre, tendrá que verificarse la relación:

$$\varphi(A_0\ A_1 \ldots X\ Y \ldots) = \Delta^t\ \varphi(a_0\ a_1 \ldots x\ y \ldots)$$

si la función φ es un covariante de la forma

$$(a_0\ a_1 \ldots a_n)\ (x\ y)^n$$

El exponente de Δ se llama índice del covariante y se distingue el grado de éste, respecto á los coeficientes y á las variables llamando *grado* al primero y *orden* al segundo y los representaremos respectivamente por las letras g y o.

Si consideramos por ejemplo la binaria cúbica

$$u = a_0\ x^3 + 3\ a_1\ x^2\ y + 3\ a_2\ x\ y^2 + a_3\ y^3$$

y formamos la función

$$C = (a_0\ a_2 - a_1^2)\ x^2 + (a_0\ a_3 - a_1\ a_2)\ x\ y + (a_1\ a_3 - a_2^2)\ y^2$$

es fácil ver que dicha función es un covariante de la forma dada.

Hagamos en efecto la sustitución de costumbre

$$\begin{aligned} x &= l_1 X + m_1 Y \\ y &= l_2 X + m_2 Y \end{aligned} \qquad (1)$$

y la transformada de la u será:

$$U = A_0 X^3 + 3 A_1 X^2 Y + 3 A_2 X Y^2 + A_3 Y^3$$

en la que los coeficientes tienen los siguientes valores:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} A_0 &= a_0 l_1^3 + 3 a_1 l_1^2 l_2 + 3 a_2 l_1 l_2^2 + a_3 l_2^3 \\ A_1 &= m_1(a_0 l_1^2 + a_2 l_2^2) + 2 l_1 l_2 (a_1 m_1 + a_2 m_2) + m_2(a_1 l_1^2 + a_3 l_2^2) \\ A_2 &= l_1(a_0 m_1^2 + a_2 m_2^2) + 2 m_1 m_2 (a_1 l_1 + a_2 l_2) + l_2(a_1 m_1^2 + a_3 m_2^2) \\ A_3 &= a_0 m_1^3 + 3 a_1 m_1^2 m_2 + 3 a_2 m_1 m_2^2 + a_3 m_2^3 \end{aligned} \right.$$

Formemos ahora con la transformada U, la función análoga á la C, y se tendrá:

$$C_1 = (A_0 A_2 - A_1^2) X^2 + (A_0 A_3 - A_1 A_2) X Y + (A_1 A_3 - A_2^2) Y^2$$

y si sustituimos en la expresión de C_1 en lugar de las A sus valores (2) y en vez de X é Y, los que se deducen de las (1) se puede comprobar que se verifica la relación:

$$C_1 = C. (l_1 m_2)^2$$

y por lo tanto C es un covariante de la forma primitiva.

57. Si transformamos el covariante C, sustituyendo en lugar de x é y los valores (1), claro está que en virtud de la hipótesis en que estamos, dicha transformada, salvo una potencia del módulo, tendrá que ser igual á C, y como esto mismo podríamos decirlo en cualquier caso análogo, podemos considerarlo como propiedad general que enunciaremos rápidamente así.

El covariante de la transformada es la transformada del covariante. Tendremos pues, la siguiente relación:

$$\varphi\,(A_0\,A_1,\ldots\,X\,Y)=(l_1\,l_2)^i\,\varphi\,(a_0\,a_1\ldots\,l_1\,X+m_1\,Y,\ l_2\,X+m_2\,Y)$$

58. TEOREMA.—*El covariante de una forma es homogéneo respecto á los coeficiente de éste.*

Basta repetir el razonamiento hecho en el teorema análogo, al tratar de los invariantes (§ 35) para convencerse de la verdad del que nos ocupa.

59. TEOREMA.—*El índice de un covariante de una forma binaria del grado* n *se expresa por la relación* $i=\dfrac{n\,g-o}{2}$

Se ve en efecto que los coeficientes $l_1\,m_1\,l_2\,m_2$ de la sustitución, figuran con el grado n en los valores de $A_0\,A_1$ etc., y siendo por hipótesis el covariante del grado g con relación á dichos coeficientes, $n\,g$ será el grado de los de la sustitución en dicho covariante, pero en el segundo miembro de la igualdad (3), aparecen en el mismo grado que las variables X é Y, es decir en el o, luego para que dicha relación (3) pueda verificarse, tendrá que ser:

$$n\,g=2\,i+o$$

ó bien

$$i=\frac{n\,g-o}{2}$$

Vemos comprobado este teorema en el ejemplo que hemos considerado anteriormente, pues debe verificarse

$$i=\frac{3.\;2-2}{2}=2$$

como en efecto se verifica.

Si n es par, solo podrá ser entero el valor de i siendo o también par, luego podemos establecer.

COROLARIO.—*En las formas de grado par, los covariantes son de orden también par.*

Vemos también que si n es impar, tendrán que ser g y o de la misma paridad y tenemos por consiguiente este otro.

COROLARIO.—*El covariante de una forma binaria de grado impar, será de grado par ó impar, según sea su orden.*

60. Supuesta escrita una forma binaria segun venimos haciendo se verificará respecto á los pesos de los términos del covariante el siguiente.

TEOREMA.—*Los pesos de los coeficientes de un covariante forman una progresión aritmética, cuyo primer término es el índice y la razón uno.*

Supongamos que en la forma se hace la sustitución

$$x = X$$

$$y = m\,Y$$

y claro está que si φ es un covariante, se verificará la relación (§ 57)

$$\varphi\,(A_0 A_1 \ldots X\,Y) = m^i\ .\ \varphi\,(a_0\, a_1 \ldots, X, m\,Y)$$

Un término del primer miembro tal como $H\,X^{o-q}\,Y^q$ tendrá evidentemente el factor m^p, llamando p el peso de este término, el término análogo del segundo miembro, tendrá dentro del paréntesis el factor m^q y fuera el m^i, luego se verificará:

$$m^p = m^{i+q}$$

ó bien

$$p = i + q$$

por consiguiente al ser

$$q = 0 = 1 = 2 \text{ etc.,}$$

resultará:

$$p = i = i + 1 = i + 2 = \text{etc.}$$

s. q. d.

En el ejemplo considerado se ve que el coeficiente de x^2 tiene por peso 2, el de xy, 3 y el de y^2, 4, que corresponden á

$$i = 2 \text{ y } q = 0 = 1 = 2,$$

respectivamente.

61. Teorema.—*Si se cambian los términos equidistantes de los extremos en una forma también se cambian en el covariante no teniendo en cuenta el signo.*

Es decir que se quiere demostrar que si por ejemplo en la forma cúbica

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

que tiene por covariante según sabemos

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x y + (a_1 a_3 - a_2^2) y^2$$

se cambian los coeficientes equidistantes y se escribe así:

$$a_3 x^3 + 3 a_2 x^2 y + 3 a_1 x y^2 + a_0 y^3$$

su convariante será

$$(a_1 a_3 - a_2^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x y + (a_0 a_2 - a_1^2) y^2$$

Observemos en efecto que cambiar los coeficientes equidistantes de los extremos en una forma equivale á hacer la sustitución

$$x = Y, \quad y = X$$

luego si φ es un invariante tendrá que verificarse la relación

$$\varphi(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 X Y) = (-1)^i \varphi(a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n x y)$$

puesto que el primer miembro es el covariante de la transforda; el paréntesis del segundo, el de la forma dada, y (-1) el módulo de sustitución

La última relación puede escribirse también así:

$$\varphi(a_n\ a_{n-1} \ldots a_1\ a_0\ X\ Y) = (-1)^i\ (a_0\ a_1 \ldots a_{n-1}\ a_n\ Y\ X)$$

y aparte del signo (que dependerá de que i sea par ó impar) exije la anterior igualdad que el coeficiente de $X^{n-q}\ Y^q$ sea igual al de $X^q\ Y^{n-q}$ y por consiguiente el covariante de la transformada tiene respecto al de la primitiva cambiados los coeficientes equidistantes de los extremos.

62. Teorema.—*El covariante de una forma binaria satisface á la ecuación*

$$y \frac{d\varphi}{dx} = a_0 \frac{d\varphi}{d a_1} + 2\, a_1 \frac{d\varphi}{d a_2} + \ldots\ldots + n\, a_{n-1} \frac{d\varphi}{d a_n}$$

En efecto hagamos la sustitución

$$x = X + m_1\, Y$$
$$y = Y$$

cuyo módulo es $\Delta = 1$ y por ser φ covariante tendrá que verificarse la relación

$$\varphi\ (A_0\ A_1 \ldots X\ Y) = \varphi\ (a_0\ a_1 \ldots x\ y)$$

ó bien

$$\varphi\ (A_0\ A_1 \ldots x - m_1 y,\ y) = \varphi\ (a_0\ a_1 \ldots x\ y)$$

Pero hemos dicho anteriormente que la sustitución efectuada cambia los coeficictes del siguiente modo: (§ 11)

a_0 no varia
a_1 en $a_1 + a_0\ m_1$
a_2 en $a_2 + 2\ a_1\ m_1 + a_0\ m_1^2$
a_3 en $a_3 + 3\ a_2\ m_1 + 3\ a_1\ m_1^2 + a_0\ m_1^3$
. . . .
. . . .

y en este caso se cambia también x en $x - m_1\, y$, luego se tendrá por la fórmula de Taylor.

$$\varphi\,(A_0\, A_1, \ldots, x - m_1 y_1, y) =$$
$$= \varphi\,(a_0, a_1 + a_0 m_1, \; a_2 + 2\, a_1 m_1 + a_0 m_1^2 \ldots x - m_1 y_1, y) =$$
$$\varphi + a_0 m_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + (2\, a_1 m_1 + a_0 m_1^2) \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} +$$
$$(3\, a_2 m_1 + 3\, a_1 m_1^2 + a_0 m_1^3) \frac{d\,\varphi}{d\,a_3} + \ldots + m_1 y \frac{d\,\varphi}{d\,x} +$$
$$\frac{1}{2}\left[a_0^2 m_1^2 \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1^2} + 2(2\, a_0 a_1 m_1^2 + a_0^3 m_1^3) \frac{d^2\,\varphi}{d\,a_1\, d\,a_2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + m_1^2 y^2 \frac{d^2\,\varphi}{d\,x^2}\right] + \ldots\ldots$$

y ordenando respecto á las potencias de m_1 resulta:

$$\varphi\,(a_0\, a_1 \ldots x\, y) = \varphi + \left(-y \frac{d\,\varphi}{d\,x} + a_0 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + 2\, a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} + \ldots \right.$$
$$\left. + n\, a_{n-1} \frac{d\,\varphi}{d\,a_n}\right) m_1 + \mathrm{R}\, m_1^2 + \mathrm{S}\, m_1^3 + \ldots$$

y para que esta igualdad se verifique cualquiera que sea m_1 tendrá que ser

$$-y \frac{d\,\varphi}{d\,x} + a_0 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + 2\, a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} + \ldots + n\, a_{n-1} \frac{d\,\varphi}{d\,a_n} = 0$$

ó bien

$$y \frac{d\,\varphi}{d\,x} = a_0 \frac{d\,\varphi}{d\,a_1} + 2\, a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_2} + \ldots + n\, a_{n-1} \frac{d\,\varphi}{d\,a_n}$$

63. Cambiando en la forma los coeficientes equidistantes de los extremos la función que se obtiene será

$$(a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0)\;(x\, y)$$

y como un covariante de la primitiva lo es de la transformada, resulta que tendrá que verificarse la ecuación:

$$x \frac{d\,\varphi}{d\,y} = a_n \frac{d\,\varphi}{da_{n-1}} + 2\, a_{n-1} \frac{d\,\varphi}{d\,a_{n-2}} + \ldots + n\, a_1 \frac{d\,\varphi}{d\,a_0}$$

Se demuestra recíprocamente que si se tiene una función homogénea con relación á las variables y los coeficientes de una forma y verifica las dos ecuaciones diferenciales que hemos considerado, será un covariante de dicha forma.

64. Consideremos un covariante de una forma que por comodidad escribiremos con los coeficientes binomiales.

$$\varphi = b_0 x^m + m b_1 x^{m-1} y + \binom{m}{2} b_2 x^{m-2} y^2 + \ldots +$$
$$+ m b_{m-1} x y^{m-1} + b_m y^m$$

y se tendrá

$$y \frac{d\varphi}{dx} = m b_0 x^{m-1} y + m(m-1) b_1 x^{m-2} y^2 +$$

$$\binom{m}{2}(m-2) b_2 x^{m-3} y^3 + \ldots a_0 \frac{d\varphi}{da_1} = a_0 \frac{db_0}{da_1} x^m +$$

$$m a_0 \frac{db_1}{da_1} x^{m-1} y + \binom{m}{2} a_0 \frac{db_2}{da_1} x^{m-2} y^2 + \ldots 2 a_1 \frac{d\varphi}{da_2} =$$

$$2 a_1 \frac{db_0}{da_2} x^m + 2 m a_1 \frac{db_1}{da_2} x^{m-1} y + 2 \binom{m}{2} a_1 \frac{db_2}{da_2} x^{m-2} y^2 + \ldots$$

. . . .

. . . .

y sustituyendo en la primera de las *ecuaciones características* (§ 62) se tendrá

$$m b_0 x^{m-1} y + m(m-1) b_1 x^{m-2} y + \binom{m}{2}(m-2) b_2 x^{m-3} y^3 + \ldots$$
$$= \left(a_0 \frac{db_0}{da_1} + 2 a_1 \frac{db_0}{da_2} + \ldots\right) x^m +$$
$$m \left(a_0 \frac{db_1}{da_1} + 2 a_1 \frac{db_1}{da_2} + \ldots\right) x^{m-1} y +$$
$$\binom{m}{2} a_0 \frac{db_2}{da_1} + 2 a_1 \frac{db_2}{da_2} + \ldots) x^{m-2} y^2 + \ldots$$

Debiendo ser idénticas estas ecuaciones se tendrá, empleando un símbolo de operación ya conocido.

$$\Delta b_0 = o \quad \Delta b_1 = b_0 \quad \Delta b_2 = 2\, b_1 \ldots\ldots \quad \Delta b_m = m\, b_{m-1}$$

Operando ahora con la segunda ecuación característica y representando la operación

$$a_n \frac{d}{d\, a_{n-1}} + 2\, a_{n-1} \frac{d}{d\, a_{n-2}} + \ldots\ldots + n\, a_1 \frac{d}{d\, a_0}$$

por el símbolo Δ_1 se tendrá

$$m\, b_1\, x^m + 2 \binom{m}{2} b_2\, x^{m-1}\, y + 3 \binom{m}{3} b_3\, x^{m-2}\, y^2 + \ldots =$$

$$\left(a_n \frac{d\, b_0}{d\, a_{n-1}} + 2\, a_{n-1} \frac{d\, b_0}{d\, a_{n-2}} + \ldots\right) x^m +$$

$$m \left(a_n \frac{d\, b_1}{d\, a_{n-1}} + 2\, a_{n-1} \frac{d\, b_1}{d\, a_{n-2}} + \ldots\right) x^{m-1}\, y +$$

$$\binom{m}{2} \left(a_n \frac{d\, b_2}{d\, a_{n-1}} + 2\, a_{n-1} \frac{d\, b_2}{d\, a_{n-2}} + \ldots\right) x^{m-2}\, y^2 + \ldots$$

de donde se deduce

$$\Delta_1 b_0 = m\, b_1 \quad \Delta_1 b_1 = (m-1)\, b_2 \quad \Delta_1 b_2 = (m-2)\, b_3$$

$$\Delta_1 b_{m-1} = b_m \quad \Delta_1 b_m = o.$$

Vemos pues que conocido b_0 se determina b_1 aplicando la operacion Δ_1; conocido b_1 se determina análogamente b_2 y así sucesivamente: la propiedad de derivarse todos los coeficientes del primero es causa de que á éste se le diese el nombre de *surgente*.

FORMACIÓN DE COVARIANTES.

65. Los principios establecidos permiten la formación de covariantes de una forma dada, una vez fijado el grado y el orden de estos como vamos á ver en los siguientes ejemplos.

Formar el covariante de segundo orden y segundo grado de la binaria cúbica.

Dicho covariante será de la forma

$$(1) \qquad b_0\, x^2 + 2\, b_1\, x\, y + b_2\, y^2$$

Ahora bien el coeficiente b_0 será respecto á los de la forma de un peso igual al índice (§ 60) que es

$$i = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2} = 2$$

y será por hipótesis de segundo grado, luego se podrá expresar por

$$h\, a_1^2 + k\, a_0\, a_2$$

Operando con el símbolo Δ se tendrá

$$\Delta\, (h\, a_1^2 + k\, a_2\, a_0) = 2\ (h + k)\ a_0\, a_1 = 0$$

Esta igualdad se verifica haciendo

$$h = 1 \quad k = -1$$

y se tendrá por lo tanto

$$b_0 = a_1^2 - a_0\, a_2$$

Ahora tenemos

$$2\, b_1 = \Delta_1\, b_0 = a_3\, \frac{d\, b_0}{d\, a_2} + 3\, a_2\, \frac{d\, b_0}{d\, a_1} + 3\, a_1\, \frac{d\, b_0}{d\, a_0} =$$

$$- a_0\, a_3 + 4\, a_1\, a_2 - 3\, a_1\, a_2 = a_1\, a_2 - a_0\, a_3$$

$$b_2 = \Delta_1\, b_1 = a_3\, \frac{d\, b_1}{d\, a_2} + 2\, a_2\, \frac{d\, b_1}{d\, a_1} + 3\, a_1\, \frac{d\, b_1}{d\, a_0} =$$

$$\frac{a_1\, a_3}{2} + a_2^2 - \frac{3\, a_1\, a_3}{2} = a_2^2 - a_1\, a_3$$

Sustituyendo en lugar de $b_0\; b_1\; b_2$ sus valores en la expresión (1) resulta para el covariante que buscamos

$$(a_1^2 - a_0\, a_2)\, x^2 + (a_1\, a_2 - a_0\, a_3)\, x\, y + (a_2^2 - a_1\, a_3)\, y^2$$

Obtener un covariante de sexto orden y tercer grado de la bicuadrada

$$(a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4)\ (x\, y)^4$$

Su forma general será

$$b_0\, x^6 + 6\, b_1\, x^5\, y + 15\, b_2\, x^4\, y^2 + 20\, b_3\, x^3\, y^3 + 15\, b_4\, x^2\, y^4 +$$
$$6\, b_5\, x\, y^5 + b_6\, y^6$$

Siendo el índice del covariante

$$i = \frac{4 \cdot 3 - 6}{2} = 3$$

la forma de b_0 será

$$h\, a_3\, a_0^2 + k\, a_2\, a_1\, a_0 + l\, a_1^3$$

y procediendo como en el anterior ejemplo se tendrá

$$b_0 = \Delta\ (h\, a_3\, a_0^2 + k\, a_0\, a_1\, a_2 + l\, a_1^3) =$$
$$a_0^2\, a_3 - 3\, a_0\, a_1\, a_2 + 2\, a_1^3$$

$$b_1 = \frac{1}{6}\ \Delta_1\, b_0 = \frac{1}{6}\left(a_4\, \frac{d\, b_0}{d\, a_3} + 2\, a_3\, \frac{d\, b_0}{d\, a_2} + 3\, a_2\, \frac{d\, b_0}{d\, a_1}\right.$$
$$\left. + 4\, a_1\, \frac{d\, b_0}{d\, a_0}\right) = \frac{a_4\, a_0^2 + 6\, a_1^2\, a_2 - 9\, a_0\, a_2^2 + 2\, a_0\, a_1\, a_3}{6}$$

$$b_2 = \frac{1}{5}\ \Delta_1\, b_1 = \frac{a_0\, a_1\, a_4 + 2\, a_1^2\, a_3 - 3\, a_0\, a_2\, a_3}{3}$$

$$b_3 = \frac{1}{4}\ \Delta_1\, b_2 = \frac{a_1^2\, a_4 - a_0\, a_3^2}{2}$$

$$b_4 = \frac{1}{3}\ \Delta_1\, b_3 = \frac{3\, a_1\, a_2\, a_4 - a_0\, a_3\, a_4 - 2\, a_1\, a_3^2}{3}$$

$$b_5 = \frac{1}{2}\ \Delta_1\, b_4 = \frac{-\, a_0\, a_4^2 - 2\, a_1\, a_3\, a_4 + 9\, a_2^2\, a_4 - 6\, a_2\, a_3^2}{6}$$

$$b_6 = \Delta_1\, b_5 = -\, a_1\, a_4^2 + 3\, a_2\, a_3\, a_4 - 2\, a_3^3$$

El covariante que deseamos será por consiguiente:

$$+(a_0^2\, a_3 - 3\, a_0\, a_1\, a_2 + 2\, a_1^3)\, x^6 +$$
$$+(a_0^2\, a_4 + 6\, a_1^2\, a_2 - 9\, a_0\, a_2^2 + 2\, a_0\, a_1\, a_3)\, x^5\, y +$$
$$+(5\, a_0\, a_1\, a_4 + 10\, a_1^2\, a_3 - 15\, a_0\, a_2\, a_3)\, x^4\, y^2 +$$
$$+(10\, a_1^2\, a_4 - 10\, a_0\, a_3^2)\, x^3\, y^3 +$$
$$+(15\, a_1\, a_2\, a_4 - 5\, a_0\, a_3\, a_4 - 10\, a_1\, a_3^2)\, x^2\, y^4 +$$
$$+(-a_0\, a_4^2 - 2\, a_1\, a_3\, a_4 + 9\, a_2^2\, a_4 - 6\, a_2\, a_3^2)\, x\, y^5 +$$
$$+(-a_1\, a_4^2 + 3\, a_2\, a_3\, a_4 - 2\, a_3^3)\, y^6$$

66. Al tratar de los emanentes veremos nuevos procedimientos para obtener covariantes y daremos fin á este capítulo demostrando el siguiente

TEOREMA.— *Un invariante de un covariante es invariante de la forma primitiva.*

Sea

$$(a_0\, a_1 \ldots a_n)\ (x\, y)^n$$

la forma dada y

$$(b_0\, b_1 \ldots b_m)\ (x\, y)^m$$

un covariante suyo.

Si transformamos estas funciones por una sustitución lineal, se convertirán respectivamente en

$$(A_0\, A_1 \ldots A_n)\ (X\, Y)^n$$

y

$$(B_0\, B_1 \ldots B_m)\ (X\, Y)^m$$

Un invariante del covariante hará que se verifique la relación

$$\varphi\,(B_0\, B_1 \ldots B_m) = \Delta^r\ \varphi\,(b_0\, b_1 \ldots b_m)$$

Si expresamos ahora el primer miembro en función de $A_0\, A_1$ etc., se tendrá por ejemplo

$$\psi\,(A_0\, A_1 \ldots\ldots A_n)$$

y como las B se forman con las A (salvo una potencia del módulo) como las b con las a resultará que la función del segundo miembro se convertirá, al expresar $b_0\, b_1$ etc., en función de $a_0\, a_1$ etc. en

$$\psi\,(a_0\, a_1 \,\ldots\ldots\, a_n)$$

y se tendrá por consiguiente

$$\psi\,(A_0\, A_1 \,\ldots\ldots\, A_n) = \Delta^{i}\ \psi\,(a_0\, a_1 \,\ldots\ldots\, a_n)$$

lo que demuestra que ψ es un invariante

s. q. d.

Como ejemplo consideremos la cúbica

$$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3)\ \ (x\,y)^3$$

que tiene por covariante según sabemos

$$(a_1^2 - a_0\, a_2)\ x^2 + (a_1\, a_2 - a_0\, a_3)\ x\, y + (a_2^2 - a_1\, a_3)\, y^2$$

formemos su invariante que es

$$4\ (a_1^2 - a_0\, a_2)\ \ (a_2^2 - a_1\, a_3) - (a_1\, a_2 - a_0\, a_3)^2$$

y esta expresión será en virtud del teorema anterior un invariante de la cúbica.

67. Si con las mismas notaciones del teorema anterior se hubiese partido de la relación entre coeficientes y variables.

$$\varphi\,(B_0\ B_1 \ldots B_n\ X\ Y) = \Delta^{i}\ \ \varphi\,(b_0\ b_1 \ldots b_n\ x\, y)$$

se llegará á esta otra

$$\psi\,(A_0\ A_1 \ldots A_n\ X\ Y) = \Delta^{i}\ \ \psi\,(a_0\, a_1 \ldots a_n\ \ x\, y)$$

lo que demuestra que un covariante de un covariante lo es también de la forma dada.

CAPÍTULO VII.

CONTRAVARIANTES Y CONCOMITANTES MIXTOS.

68. Supongamos que una forma

$$(a_0\, a_1 \ldots a_n)\ (x\, y\, z \ldots)^n$$

se transforma por una sustitución lineal en

$$(A_0\, A_1 \ldots A_n)\ (X\, Y\, Z \ldots)^n$$

y que consideramos una función homogénea respecto á los coeficientes de la forma dada y ciertas variables $x_1\, y_1\, z_1 \ldots$ tales que al pasar de $x\, y\, z$ á $X\, Y\, Z$ se pasa de $x_1\, y_1\, z_1 \ldots$ á sus correspondientes $X_1\, Y_1\, Z_1 \ldots$ por la sustitución inversa; ó dicho de otro modo que ya nos es conocido, suponemos que las variables $x\, y\, z \ldots$ y $x_1\, y_1\, z_1 \ldots$ son contragredientes. Si dicha función es por ejemplo

$$\varphi\,(a_0\, a_1\, a_2 \ldots\ldots x_1\, y_1\, z_1 \ldots)$$

y se verifica la relación

$$\varphi\,(A_0\, A_1 \ldots X_1\, Y_1\, Z_1 \ldots) = \Delta^t\ \varphi\,(a_0\, a_1 \ldots x_1\, y_1\, z_1 \ldots)$$

se dice que φ es un *contravariante* de la forma dada.

Consideremos por ejemplo la binaria cuadrada

$$a_0\, x^2 + 2\, a_1\, x\, y + a_2\, y^2$$

y hagamos la sustitución lineal

$$x = l_1\, X + m_1\, Y$$
$$y = l_2\, X + m_2\, Y$$

con lo que se convertirá en

$$A_0\, X^2 + 2\, A_1\, X\, Y + A_2\, Y^2$$

Si escribimos la función

$$C_t = a_2\, x_1^2 - 2\, a_1\, x_1\, y_1 + a_0\, y_1^2$$

siendo x_1 é y_1 contragredientes de x é y y verificándose por lo tanto

$$X_1 = l_1\, x_1 + l_2\, y_1$$
$$Y_1 = m_1\, x_1 + m_2\, y_1$$

es fácil ver que C_t es un contravariante.

Tenemos, en efecto

$$A_2\, X_1^2 - 2\, A_1\, X_1\, Y_1 + A_0\, Y_1^2 =$$
$$(a_0\, m_1^2 + 2\, a_1\, m_1\, m_2 + a_2\, m_2^2)\ (l_1\, x_1 + l_2\, y_1)^2 -$$
$$-2(a_0 l_1 m_1 + a_1 m_1 l_2 + a_1 l_1 m_2 + a_2 l_2 m_2)\,(l_1 x_1 + l_2 y_1)\,(m_1 x_1 + m_2\, y_1)$$
$$+(a_0\, l_1^2 + 2\, a_1\, l_1\, l_2 + a_2\, l_2^2)\ (m_1\, x_1 + m_2\, y_1)^2$$

y haciendo las multiplicaciones y reducciones, resulta:

$$A_2\, X_1^2 + 2\, A_1\, X_1\, Y_1 + A_0\, Y_1^2 =$$
$$(l_1\, m_2)^2\ (a_2\, x_1^2 + 2\, a_1 x_1\, y_1 + a_0\, y_1^2)$$

luego es cierto que C_t es un contravariante de la binaria cuadrada, cuyo índice es dos.

69. Consideremos ahora una expresión *compuesta ó no* de los coeficientes de la forma, *pero sí* de las variables $x_1\, y_1 \ldots$ y también de las $x, y \ldots$ si se verifica la relación

$$\varphi\,(A_0\, A_1 \ldots X\, Y\, Z \ldots X_1\, Y_1\, Z_1 \ldots) =$$
$$\Delta^t\ \varphi\,(a_0\, a_1 \ldots\ldots x\, y\, z \ldots\ldots x_1\, y_1\, z_1 \ldots\ldots)$$

se dice que la función φ es un *concomitante mixto* según Sylvester ó un *divariante* según Salmón. Sylvester llama en general concomitante á toda función que salvo una potencia del módulo no altera por una sustitución lineal.

Un ejemplo de concomitante mixto es la expresión

$$x x_1 + y y_1 + z z_1$$

siendo $x_1\, y_1\, z_1$ contragredientes con $x\, y\, z$.

Se tienen en efecto las relaciones

$$x = l_1 X + m_1 Y + n_1 Z$$
$$y = l_2 X + m_2 Y + n_2 Z$$
$$z = l_3 X + m_3 Y + n_3 Z$$

$$X_1 = l_1 x_1 + l_2 y_1 + l_3 z_1$$
$$Y_1 = m_1 x_1 + m_2 y_1 + m_3 z_1$$
$$Z_1 = n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 z_1$$

y ya hemos demostrado al tratar de las sustituciones lineales, que se verifica

$$X X_1 + Y Y_1 + Z Z_1 = x x_1 + y y_1 + z z_1$$

FORMACIÓN DE CONTRAVARIANTES.

70. Consideremos una forma de cualquier número de variables.

$$(a_0\, a_1 \ldots)\ (x, y, z \ldots)^n$$

y su transformada por una sustitución lineal

$$(A_0\, A_1 \ldots)\ (X, Y, Z \ldots)^n$$

Según lo dicho anteriormente, la expresión

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 \cdots$$

se convierte en

$$X X_1 + Y Y_1 + Z Z_1 \ldots$$

y se tendrá por consiguiente la relación

$$a_0 x^n + \ldots\ldots + k\,(x x_1 + y y_1 + z z_1 + \ldots) =$$
$$A_0 X^n + \ldots\ldots + k\,(X X_1 + Y Y_1 + Z Z_1 + \ldots)^n$$

Ahora, bien, si llamamos φ un invariante de la forma dada, se tendrá evidentemente

$$\varphi\,(A_0+k\,X_1^n\,,\ A_1+k\,X_1^{n-1}\,Y_1+\ldots)=$$
$$\Delta^i\ \varphi\,(a_0+k\,x_1^n\,,\ a_1+k\,x_1^{n-1}\,y+\ldots)$$

Si ahora desarrollamos estas funciones por la serie de Taylor, teniendo que ser iguales dichos desarrollos para cualquier valor de k, los coeficientes de las potencias iguales de esta indeterminada serán también iguales y como dichos coeficientes son respectivamente funciones de

$$a_0\ a_1\ldots\ldots\ x_1\ y_1\ldots\ldots$$

y de

$$A_0\ A_1\ldots\ldots\ X_1\ Y_1\ldots\ldots$$

resultarán al hacer la igualación diversas contravariantes.

Dichos desarrollos son

$$\varphi\,(a_0+k\,x_1^n\,,\ a_1+k\,x_1^{n-1}\,y_1+\ldots)=$$
$$\varphi+k\left(\frac{d}{d\,a_0}\,x_1^n+\frac{d}{d\,a_1}\,x_1^{n-1}\,y_1+\ldots\right)\varphi+$$
$$\frac{k^2}{2}\left(\frac{d}{d\,a_0}\,x_1^n+\frac{d}{d\,a_1}\,x_1^{n-1}\,y_1+\ldots\right)^2\varphi+\ldots\ldots$$
$$+\frac{k^p}{p!}\left(\frac{d}{d\,a_0}\,x_1^n+\frac{d}{d\,a_1}\,x_1^{n-1}\,y_1+\ldots\right)^p\varphi+\ldots\ldots$$

$$\varphi\,(A_0+k\,X_1^n\,,\ A_1+k\,X_1^{n-1}\,Y_1+\ldots)=$$
$$\varphi+k\left(\frac{d}{d\,A_0}\,X_1^n+\frac{d}{d\,A_1}\,X_1^{n-1}\,Y_1+\ldots\right)\varphi+$$
$$\frac{k^2}{2}\left(\frac{d}{d\,A_0}\,X_1^n+\frac{d}{d\,A_1}\,X_1^{n-1}\,Y_1+\ldots\right)^2\varphi+\ldots\ldots+$$
$$\frac{k^p}{p!}\left(\frac{d}{d\,A_0}\,X_1^n+\frac{d}{d\,A_1}\,X_1^{n-1}\,Y_1+\ldots\right)^p\varphi+\ldots\ldots$$

Se tendrá por lo tanto

$$\left(\frac{d}{d\,A_0}X_1^n+\frac{d}{d\,A_1}X_1^{n-1}Y_1+\ldots\right)\varphi=$$

$$\Delta^t\left(\frac{d}{d\,a_0}x_1^n+\frac{d}{d\,a_1}x_1^{n-1}y_1+\ldots\right)\varphi$$

$$\left(\frac{d}{d\,A_0}X_1^n+\frac{d}{d\,A_1}X_1^{n-1}Y_1+\ldots\right)^2\varphi=$$

$$\Delta^t\left(\frac{d}{d\,a_0}x_1^n+\frac{d}{d\,a_1}x_1^{n-1}y_1+\ldots\right)^2\varphi$$

. . . .

. . . .

y en general

$$\left(\frac{d}{d\,A_0}X_1^n+\frac{d}{d\,A_1}X_1^{n-1}Y_1+\ldots\right)^p\varphi=$$

$$\Delta^t\left(\frac{d}{d\,a_0}x_1^n+\frac{d}{d\,a_1}x_1^{n-1}y_1+\ldots\right)^p\varphi$$

La operación que indica el paréntesis, que hay que practicar sobre el invariante ó mejor aún el resultado de ella se llama evectante y se distinguen llamándoles primero, segundo, etcétera evectante, según sea

$$p=1,\ =2,\ =\text{etc.}$$

Podemos representar el evectante por E_p siendo p su orden, y por consiguiente el procedimiento que hemos seguido se traduce en la siguiente igualdad:

$$E_p\ (I)=C_t$$

llamando I y C_t un invariante y contravariante de la forma respectivamente.

71. Se puede observar la gran analogía que existe entre este procedimiento y el que hemos empleado anteriormente (§ 44) para la formación de invariantes simultáneos, y realmente

un contravatiante no es otra cosa que un invariante simultáneo de la forma dada

$$(a_0\, a_1 \ldots)\ (x, y \ldots)^n$$

y la expresión

$$(x_1 x + y_1 y + z_1 z + \ldots)^n$$

considerando en esta á $x_1\, y_1 \ldots$ como coeficientes. He aquí po qué, según observa Salmón, la teoría de los contravariantes s encierra en la de invariantes.

Consideremos la binaria cuadrada

$$a_0 x^2 + 2\, a_1\, x\, y + a_2\, y^2$$

Su único invariante es según sabemos

$$\mathrm{I} = a_0\, a_2 - a_1^2$$

y tendremos por lo tanto

$$\mathrm{E}_1\,(\mathrm{I}) = x_1^2\, \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,a_0} + x_1\, y_1\, \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,a_1} + y_1^2\, \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,a_2} =$$

$$a_2\, x_1^2 - 2\, a_1\, x_1\, y_1 + a_0\, y_1^2$$

que será un contravariante de la forma dada.

No hay lugar á aplicar el segundo evectante, puesto qu siendo el invariante de segundo grado, no existe dicho evectant

Sea ahora la binaria cúbica

$$a_0\, x^3 + 3\, a_1\, x^2 y + 3\, a_2\, x\, y^2 + a_3\, y^3$$

Su único invariante es

$$\mathrm{I} = a_0^2\, a_3^2 + 4\, a_0\, a_2^3 - 6\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3 - 3\, a_1^2\, a_2^2 + 4\, a_1^3\, a_3$$

y aplicando el símbolo E_1 resultará

$$\mathrm{E}_1\,(\mathrm{I}) = x_1^3 \cdot \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,a_0} + x_1^2\, y_1\, \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,a_1} + x_1\, y_1^2\, \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,a_2} + y_1^3\, \frac{d\,\mathrm{I}}{d\,a_3} =$$

$$(2\, a_0\, a_3^2 + 4\, a_2^3 - 6\, a_1\, a_2\, a_3)\, x_1^3 +$$

$$(12\, a_1^2\, a_3 - 6\, a_0\, a_2\, a_3 - 6\, a_1\, a_2^2)\, x_1^2\, y_1 +$$
$$(12\, a_0\, a_2^2 - 6\, a_0\, a_1\, a_3 - 6\, a_1^2\, a_2)\, x_1\, y_1^2 +$$
$$(2\, a_0^2\, a_3 + 4\, a_1^3 - 6\, a_0\, a_1\, a_2)\, y_1^3$$

obteniéndose asi un contravariante.

72. En el caso de considerar formas binarias pueden deducirse los contravariantes por una sencilla transformación del covariante.

Sabemos que las fórmulas de transformación directa é inversa, son:

$$x = l_1\, X + m_1\, Y$$
$$y = l_2\, X + m_2\, Y$$
$$\Delta x_1 = m_2\, X_1 - l_2\, Y_1$$
$$\Delta y_1 = - m_1\, X_1 + l_1\, Y_1$$

y escribiendo las que dan x_1 é y_1 en esta forma

$$\Delta(-x_1) = l_2\, Y_1 + m_2\, (-X_1)$$
$$\Delta\,(y_1) = l_1\, Y_1 + m_1\, (-X_1)$$

resulta que x é y son cogredientes (salvo una potencia del módulo) con y_1 y $-x_1$.

Si tenemos por consiguiente un covariante de la forma

$$\varphi\,(a_0\, a_1\, \ldots\ldots\, x\, y)$$

se verificará

$$\varphi\,(A_0\, A_1\, \ldots\ldots\, X\, Y) = \Delta'\ \varphi\,(a_0\, a_1\, \ldots\ldots\, x\, y)$$

y si se hace una sustitución directa, resulta:

$$\varphi\,(A_0\, A_1 \ldots\, Y_1, -X_1) = \Delta'\ \varphi\ (a_0\, a_1\, \ldots\ldots\, y_1, -x_1)$$

lo que demuestra que

$$\varphi\,(a_0\, a_1\, \ldots\ldots\, y_1, -x_1)$$

es un contravariante de la forma

Resulta, por lo tanto, la siguiente regla:

Cámbiese x é y en y_1 y $-x_1$ en el covariante, y se tendrá un contravariante de la forma.

Así, por ejemplo, la binaria cúbica tiene el covariante

$$(a_0\, a_2 - a_1^2)\, x^2 + (a_0\, a_3 - a_1\, a_2)\, x\, y + (a_1\, a_3 - a_2^2)\, y^2$$

y haciendo el cambio dicho se tendrá el contravariante

$$(a_1\, a_3 - a_2^2)\, x_1^2 + (a_1\, a_2 - a_0\, a_3)\, x_1\, y_1 + (a_0\, a_2 - a_1^2)\, y_1^2$$

Recíprocamente si en un contravariante se cambian x_1 en $-y$ é y_1 en x, resultará un covariante.

Sabemos que la binaria cuadrada, tiene el contravariante

$$a_2\, x_1^2 - 2\, a_1\, x_1\, y_1 + a_0\, y_1^2$$

luego

$$a_0\, x^2 + 2\, a_1\, x\, y + a_2\, y^2$$

debe ser un covariante. (Lo es, en efecto, puesto que ha resultado la forma primitiva y claro está que una forma es covariante de sí misma.)

FORMACIÓN DE CONTRAVARIANTES SIMULTÁNEOS.

73. Es evidente que si la operación E_p en lugar de recaer sobre el invariante de una forma recae sobre uno simultáneo, resultará una expresión compuesta de los coeficientes de las formas y de las variables $x_1\, y_1$ etc. y será por lo tanto un contravariante simultáneo.

FORMACIÓN DE CONCOMITANTES MIXTOS.

74. Repitiendo los razonamientos que han informado el método seguido para obtener contravariantes por medio del in-

variante, se comprende que si en lugar de partir de esta función se parte de un covariante, se llegarán á obtener funciones que encerrarán los coeficientes de la forma, las variables de ésta y las contragedientes x_1 y_1 etc. y cuyas expresiones gozarán de la propiedad de no alterar, aparte una potencia del módulo, al efectuar sustituciones lineales, es decir, que serán concomitantes mixtos, según ya hemos dicho. Por lo tanto, se verificará llamando C al covariante y C_m al concomitante

$$E_r(C) = C_m$$

CAPÍTULO VIII.

EMANANTES.

75. Representemos por

$$f\ (x\,y\,z\,.....)$$

una cierta forma y sea

$$F\ (X\,Y\,Z\,.....)$$

el valor que toma al hacer la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x = l_1\,X + m_1\,Y + n_1\,Z + ... \\ y = l_2\,X + m_2\,Y + n_2\,Z + ... \\ z = l_3\,X + m_3\,Y + n_3\,Z + ... \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Consideremos ahora un sistema de variables x, y, z_1 ..... cogredientes con x, y, z..., de modo que se tenga

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = l_1\,X_1 + m_1\,Y_1 + n_1\,Z_1 + ... \\ y_1 = l_2\,X_1 + m_2\,Y_1 + n_2\,Z_1 + ... \\ z_1 = l_3\,X_1 + m_3\,Y_1 + n_3\,Z_1 + ... \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (2)$$

y vamos á demostrar que siendo k una constante arbitraria, se verificará la relación

$$f(x + kx_1, y + ky_1 \ldots\ldots) =$$
$$F(X + kX_1, Y + kY_1, \ldots\ldots) \qquad (3)$$

Tenemos por hipótesis

$$f(x\,y\,z \ldots\ldots) = F(X\,Y\,Z \ldots\ldots)$$

ó lo que es lo mismo

$$f(l_1 X + m_1 Y + n_1 Z + \ldots\ldots, l_2 X + m_2 Y + n_2 Z + \ldots\ldots) =$$
$$F(X\,Y\,Z \ldots\ldots)$$

sustituyamos ahora en los dos miembros de esta igualdad en vez de

$$X, Y, Z \ldots\ldots \quad X + kX_1, \ Y + kY_1 \ldots\ldots$$

y se tendrá

$$f[l_1(X + kX_1) + m_1(Y + kY_1) + n_1(Z + kZ_1) + \ldots\ldots,$$
$$l_2(X + kX_1) + m_2(Y + kY_1) + \ldots\ldots,) =$$
$$F(X + kX_1, Y + kY_1 + Z + kZ_1) \qquad (4)$$

Pero de las igualdades (1) y (2) se deduce fácilmente

$$x + kx_1 = l_1(X + kX_1) + m_1(Y + kY_1) + n_1(Z + kZ_1) + \ldots$$
$$y + ky_1 = l_2(X + kX_1) + m_2(Y + kY_1) + n_2(Z + kZ_1) + \ldots$$
$$z + kz_1 = l_3(X + kX_1) + m_3(Y + kY_1) + n_3(Z + kZ_1) + \ldots$$

. . . .

. . . .

y sustituyendo en el primer miembro de la (4), resulta:

$$f(x + kx_1, \ y + ky_1, \ z + kz_1, \ldots\ldots) =$$
$$F(X + kX_1, \quad Y + kY_1, \quad Z + kZ_1, \ldots\ldots)$$

s. q. d.

76. Desarrollando ahora los dos miembros de la anterior igualdad por la formula de Taylor, se tendrá:

$$f(x+kx_1, y+ky_1, \ldots) = f + k\left(\frac{d}{dx}x_1 + \frac{d}{dy}y_1 + \ldots\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d}{dx}x_1 + \frac{d}{dy}y_1 + \ldots\right) + \ldots + \frac{k^p}{p!}\left(\frac{d}{dx}x_1 + \ldots\right)^p + \ldots$$

$$F(X + kX_1, \; Y + kY_1 \ldots) = F + k\left(\frac{d}{dX}X_1 + \frac{d}{dY}Y_1 + \ldots\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d}{dX}X_1 + \frac{d}{dY}Y_1 + \ldots\right) + \frac{k^p}{p!}\left(\frac{d}{dX}X_1 + \ldots\right)^p + \ldots$$

Debiendo ser iguales estos desarrollos, lo serán también los coeficientes de las mismas potencias de k, y se tendrá, por consiguiente, en general

$$\left(\frac{d}{dX}X_1 + \frac{d}{dY}Y_1 + \ldots\right)^p F = \left(\frac{d}{dx}x_1 + \frac{d}{dy}y_1 + \ldots\right)^p f$$

Tenemos, pues, la indicación de un nuevo símbolo de operación y cuyo símbolo así como también el resultado que se obtiene al operar con él sobre f ó F se llama, siguiendo á Sylvester, emanante de la forma correspondiente. Según se considere $p=1$, $=2, \ldots$ se obtiene el primero, segundo, etc., emanantes que representaremos en general por E_p.

Consideremos, por ejemplo, la binaria cúbica

$$f = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

y se tendrá para el primer emanante

$$E_1 = \left(\frac{d}{dx}x_1 + \frac{d}{dy}y_1\right) f = 3(a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2) x_1 + 3(a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2) y_1$$

Vamos ahora á determinar los demás, pero antes conviene observar que el mismo resultado se obtiene al tratar de determinar el emanante E_p desarrollando la potencia

:

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,x_1+\frac{d}{d\,y}\,y_1+\ldots\right)^p f$$

y aplicando el símbolo resultante á la función f, ó bien repitiendo p veces la operación que indica el paréntesis; esto es, aplicando el símbolo E_1 á f otra vez; el mismo símbolo al resultado y así sucesivamente.

Nos limitaremos á comprobrarlo en el segundo emanante y fácil será ver la generalidad del principio.

Llamemos á $E_1(f)=f_1$ y se trata de establecer que

$$E_2(f)=E_1(f_1)$$

Tenemos, en efecto,

$$E_2(f)=\left(\frac{d}{d\,x}\,x_1+\frac{d}{d\,y}\,y_1+\frac{d}{d\,z}\,z_1\ldots\right)^2 f=$$

$$\frac{d^2 f}{d\,x^2}\,x_1^2+\frac{d^2 f}{d\,y^2}\,y_1^2+\frac{d^2 f}{d\,z^2}\,z_1^2+\ldots+$$

$$2\,\frac{d^2 f}{d\,x\,d\,y}\,x_1\,y_1+2\,\frac{d^2 f}{d\,x\,d\,z}\,x_1\,z_1+2\,\frac{d^2 f}{d\,y\,d\,z}\,y_1\,z_1+\ldots$$

$$E_1(f_1)=\left(\frac{d}{d\,x}\,x_1+\frac{d}{d\,y}\,y_1+\frac{d}{d\,z}\,z_1+\ldots\right)f_1=$$

$$\frac{d\left(\frac{d\,f}{d\,x}\,x_1+\frac{d\,f}{d\,y}\,y_1+\frac{d\,f}{d\,z}\,z_1+\ldots\right)}{d\,x}\,x_1+$$

$$\frac{d\left(\frac{d\,f}{d\,x}\,x_1+\frac{d\,f}{d\,y}\,y_1+\ldots\right)}{d\,y}\,y_1+\frac{d\left(\frac{d\,f}{d\,x}\,x_1+\frac{d\,f}{d\,y}\,y_1+\ldots\right)}{d\,z}\,z_1+\ldots$$

$$=\frac{d^2 f}{d\,x^2}\,x_1^2+\frac{d^2 f}{d\,x\,d\,y}\,x_1\,y_1+\frac{d^2 f}{d\,x\,d\,z}\,x_1\,z_1+\ldots+$$

$$\frac{d^2 f}{d\,x\,d\,y}\,x_1\,y_1+\frac{d^2 f}{d\,y^2}\,y_1^2+\frac{d^2 f}{d\,y\,d\,z}\,y_1\,z_1+\ldots=$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} x_1^2 + \frac{d^2 f}{dy^2} y_1^2 + \frac{d^2 f}{dz^2} z_1^2 + \ldots + 2 \frac{d^2 f}{dx\,dy} x_1 y_1 + \ldots$$

Visto esto, para obtener el segundo emanante de la binaria cúbica, bastará tomar el primer emanante del que hemos obtenido, es decir, de

$$f_1 = (a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2) x_1 + (a_1 x^2 + 2 a_2 x y + a_3 y^2) y_1$$

(prescindimos del factor 3), y se tendrá:

$$E_2 = (2 a_0 x + 2 a_1 y) x_1^2 + (2 a_1 x + 2 a_2 y) x_1 y_1 + (2 a_1 x + 2 a_2 y) x_1 y_1 + (2 a_2 x + 2 a_3 y) y_1^2$$

ó bien, prescindiendo del factor común dos

$$E_2 = (a_0 x + a_1 y) x_1^2 + 2 (a_1 x + a_2 y) x_1 y_1 + (a_2 x + a_3 y) y_1^2.$$

El tercer emanante, será:

$$E_3 = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 y_1 + 3 a_2 x_1 y_1^2 + a_3 y_1^3$$

es decir, la misma forma, con el cambio de x en x_1 é y en y_1 como era fácil preveer. Los sucesivos emanantes, son evidentemente nulos.

77. Vamos ahora á ver como la consideración de los emanantes nos permite obtener covariantes, pero antes debemos hacer una observación y es, que si tenemos un emanante de una forma y hallamos el de la transformada, obtendremos el mismo resultado que si desde luego transformamos el primitivo emanante. Es decir, que el emanante de la trasformada del emanante. Esto es evidente y nos limitaremos á comprobarlo en un ejemplo.

Consideremos para mayor sencillez la binaria cuadrada

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2$$

su transformada es

$$A_0 X^2 + 2 A_1 X Y + A_2 Y^2$$

siendo

$$A_0 = a_0 l_1^2 + 2 a_1 l_1 l_2 + a_2 l_2^2$$
$$A_1 = a_0 l_1 m_1 + a_1 (m_1 l_2 + l_1 m_2) + a_2 l_2 m_2$$
$$A_2 = a_0 m_1^2 + 2 a_1 m_1 m_2 + a_2 m_2^2$$

El primer emanante de la forma dada es

$$E_1 = (a_0 x + a_1 y) x_1 + (a_1 x + a_2 y) y_1$$

y el de la transformada

$$E'_1 = (A_0 X + A_1 Y) X_1 + (A_1 X + A_2 Y) Y_1$$

transformemos ahora la expresión de E_1, y se tendrá:

$$E_1 = [a_0 (l_1 X + m_1 Y) + a_1 (l_2 X + m_2 Y)] (l_1 X_1 + m_1 Y_1) +$$
$$[a_1 (l_1 X + m_1 Y) + a_2 (l_2 X + m_2 Y)] (l_2 X_1 + m_2 Y_1) =$$
$$[(a_0 l_1^2 + 2 a_1 l_1 l_2 + a_2 l_2^2) X + (a_0 l_1 m_1 + a_1 (m_1 l_2 + l_1 m_2) +$$
$$a_2 l_2 m_2) Y] X_1 + [(a_0 l_1 m_1 + a_1 (m_1 l_2 + l_1 m_2) +$$
$$a_2 l_2 m_2) X + (a_0 m_1^2 + 2 a_1 m_1 m_2 + a_2 m_2^2) Y] Y_1 =$$
$$(A_0 X + A_1 Y) X_1 + (A_1 X + A_2 Y) Y_1.$$

78. Estamos ya en disposición de demostrar una proposición que es fundamental para la formación de covariantes por medio de los emanantes de una forma dada y que se encierra en el siguiente:

Teorema.—*Si se considera un emanante de una forma como función de las variables* x_1 y_1 *etc., mirando como constantes á* x y *etc., y en esta hipótesis, se forma un invariante del emanante, resultará un covariante de la forma.*

Sabemos, en efecto, que si

$$p_0 x_1^p + p_1 x_1^{p-1} y_1 + p_2 x_1^{p-2} y_1^2 + \dots$$

es el emanante del orden p de una forma, y

$$P_0 X_1^p + P_1 X_1^{p-1} Y_1 + P_2 X_1^{p-2} Y_1^2 + \dots$$

el del mismo orden de la transformada, este último no es otra cosa que el transformado del primitivo emanante.

Ahora bien, un invariante de la primera expresión (considerando á $x_1\, y_1$ etc., como variables según hemos dicho), hará que se verifique la relación

$$\varphi\,(P_0,\, P_1,\, P_2 \dots) = \Delta^{\iota}\ \ \varphi\,(p_0,\, p_1\, p_2 \dots)$$

y como p_0, p_1, etc., son funciones de los coeficientes de la forma dada y de las variables de ésta, así como $P_0\, P_1$ etc., lo son de iguales elementos de la transformada, resulta demostrado el teorema.

Escolio.—Si el orden del emanante es igual al grado de la forma, ya hemos dicho que el emanante es la misma forma, salvo la sustitución de sus variables por otras distintas, y entonces $p_0\, p_1$ etc., son independientes de las variables, y por lo tanto el invariante del emanante, es invariante de la función dada.

Apliquemos ahora el procedimiento á algunos ejemplos.

Sea la binaria cúbica

$$a_0\, x^3 + 3\, a_1\, x^2\, y + 3\, a_2\, x\, y^2 + a_3\, y^3.$$

Tenemos

$$E_2 = (a_0\, x + a_1\, y)\, x_1^2 + 2\, (a_1\, x + a_2\, y)\, x_1\, y_1 + (a_2\, x + a_3\, y)\, y_1^2$$

y formando el único invariante que tiene E_2 resultará el covariante:

$$C = (a_0\, x + a_1\, y)\, (a_2\, x + a_3\, y) - (a_1\, x + a_2\, y)^2$$

ó bien

$$C = (a_0\, a_2 - a_1^2)\, x^2 + (a_0\, a_3 - a_1\, a_2)\, x\, y + (a_1\, a_3 - a_2^2)\, y^2$$

que ya habíamos obtenido por otro método.

Sea la binaria bicuadrada

$$a_0 x^4 + 4\,a_1 x^3 y + 6\,a_2 x^2 y^2 + 4\,a_3 x^3 y + a_4.$$

Hallando el segundo emanante, resulta:

$$E_2 = (a_0 x^2 + 2\,a_1 x y + a_2 y^2)\,x_1^2 + 2\,(a_1 x^2 + 2\,a_2 x y + a_3 y^4)\,x_1 y_1 + \\ (a_2 x^2 + 2\,a_3 x y + a_4 y^2)\,y_1^2$$

y el único invariante de esta expresión es:

$$(a_0 x^2 + 2\,a_1 x y + a_2 y^2)\,(a_2 x^2 + 2\,a_3 x y + a_4 y^2) - \\ (a_1 x^2 + 2\,a_2 x y + a_3 y^2)^2$$

ó bien desarrollando y ordenando

$$C = (a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x^3 y + \\ (a_0 a_4 - 2\,a_1 a_3 - 3\,a_2^2)\,x^2 y^2 + 2\,(a_1 a_4 - a_2 a_3)\,x y^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) y^4.$$

Este será, pues, un covariante de la binaria bicuadrada.

79. Si en lugar de fijarse en particular en una cierta forma, se escribe la expresión no particularizada del segundo, tercero etc., emanantes, se podrá por el procedimiento expuesto, deducir símbolos de operación que producirán covariantes de las formas á que se apliquen.

Tenemos, por ejemplo, para el segundo emanante de una forma binaria cualquiera:

$$E_2 = \left(\frac{d}{d\,x}\,x_1 + \frac{d}{d\,y}\,y_1\right)^2 f = \frac{d^2 f}{d\,x^2}\,x_1^2 + 2\,\frac{d^2 f}{d x\, d y}\,x_1 y_1 + \frac{d^2 f}{d\,y^2}\,y_1^2$$

y claro está que cualesquiera que sean los valores de los coeficientes, será invariante de C_2 la expresión

$$\frac{d^2 f}{d x^2} \cdot \frac{d^2 f}{d y^2} - \left(\frac{d^2 f}{d x\, d y}\right)^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2 f}{d x^2} & \dfrac{d^2 f}{d x\, d y} \\ \dfrac{d^2 f}{d x\, d y} & \dfrac{d^2 f}{d y^2} \end{vmatrix}$$

y por lo tanto el covariante de la propuesta cuando su grado es superior al segundo.

Si la forma es de segundo grado, resultará evidentemente un invariante.

Fijémonos en que la expresión obtenida es el hessiano de la forma, y por consiguiente podemos obtener covariantes de formas binarias (pronto veremos que esta propiedad no es peculiar de las binarias), determinando las funciones hessianas correspondientes.

Así, por ejemplo, la binaria de quinto grado, tendrá el siguiente covariante:

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x^6 + 3 (a_0 a_3 - a_1 a_2) x^5 y + 3 (a_0 a_4 + a_1 a_3 - 2 a_2) x^4 y^2 + (a_0 a_5 + 7 a_1 a_4 - 8 a_2 a_3) x^3 y^3 + 3 (a_1 a_5 + a_2 a_4 - 2 a_3^2) x^2 y^4 + 3 (a_2 a_5 - a_3 a_4) x y^5 + (a_3 a_5 - a_4^2) y^6$$

puesto que (suprimiendo factores comunes)

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

$$\frac{d^2 u}{d y^2} = a_2 x^3 + 3 a_3 x^2 y + 3 a_4 x y^2 + a_5 y^3$$

$$\frac{d^2 u}{d x\, d y} = a_1 x^3 + 3 a_2 x^2 y + 3 a_3 x y^2 + a_4 y^3$$

y por consiguiente:

$$\frac{d^2 u}{d x^2} \cdot \frac{d^2 u}{d y^2} - \left(\frac{d^2 u}{d x\, d y}\right)^2 = (a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3) (a_2 x^3 + 3 a_3 x^2 y + 3 a_4 x y^2 + a_5 y^3) - (a_1 x^3 + 3 a_2 x^2 y + 3 a_3 x y^2 + a_4 y^3)^2$$

y haciendo los desarrollos y ordenando resulta la expresión que hemos escrito.

80. También los emanantes proporcionan medio de obte-

ner covariantes simultáneos, pues claro está, que si determinamos los emanantes de las formas dadas, y luego un invariante simultáneo de estos emanantes, se tendrá en él una función de los coeficientes y variables de las formas que no alterará (aparte una potencia del módulo) al practicar una sustitución lineal, y será por lo tanto un covariante simultáneo de ellas.

Consideremos, por ejemplo, las dos formas binarias cuadradas

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2, \quad b_0 x^2 + 2 b_1 x y + b_2 y^2.$$

Sus primeros emanantes, son:

$$E_1 = (a_0 x + a_1 y) x_1 + (a_1 x + a_2 y) y_1$$
$$E'_1 = (b_0 x + b_1 y) x_1 + (b_1 x + b_2 y) y_1$$

y según sabemos el determinante de los coeficientes, es un invariante simultáneo de estos emanantes y por consiguiente covariante simultáneo de las formas propuestas.

Dicho covariante, es por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y \\ b_0 x + b_1 y & b_1 x + b_2 y \end{vmatrix} =$$
$$(a_0 b_1 - a_1 b_0) x^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y^2.$$

81. Damos fin á lo que nos hemos propuesto decir sobre los emanantes demostrando las siguientes proposiciones.

Teorema.—*El jacobiano de un sistema de funciones de otras tantas variables, es un covariante simultáneo.*

Sean las funciones $f\, f_1\, f_2 \ldots f_n$.

Sus primeros emanantes, son:

$$\left(\frac{d}{dx} x_1 + \frac{d}{dy} y_1 + \ldots\right) f, \quad \left(\frac{d}{dx} x_1 + \frac{d}{dy} y_1 + \ldots\right) f_1 \ldots$$

y el determinante de estas expresiones:

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz}\cdots \\ \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

que es el jacobiano, será un covariante.

s. q. d.

82. TEOREMA.—*El hessiano de una forma de cualquier número de variables, es covariante de la misma.*

Sea f la forma, escribamos su segundo emanante:

$$E_2 = \left(\frac{d}{dx}x_1 + \frac{d}{dy}y_1 + \cdots\right)^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \cdots$$

$$+2\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dx\,dz} + \cdots\right)$$

Si formamos ahora el discriminante de esta forma cuadrada, siendo invariante de un emanante, será covariante de la forma.

Para obtener dicho discriminante, derivemos E_2 respecto á cada una de las variables, y se tendrá:

$$2\frac{d^2 f}{dx^2}x_1 + 2\frac{d^2 f}{dx\,dy}y_1 + 2\frac{d^2 f}{dx\,dz}z_1\cdots$$

$$2\frac{d^2 f}{dx\,dy}x_1 + 2\frac{d^2 f}{dy^2}y_1 + 2\frac{d^2 f}{dy\,dz}z_1\cdots$$

$$2\frac{d^2 f}{dx\,dz}x_1 + 2\frac{d^2 f}{dy\,dz}y_1 + 2\frac{d^2 f}{dz^2}z_1\cdots$$

y por lo tanto prescindiendo de los factores numéricos comunes

:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^2 f}{d x^2} & \frac{d^2 f}{dx\, dy} & \frac{d^2 f}{dx\, dz} \cdots \\ \frac{d^2 f}{dx\, dy} & \frac{d^2 f}{d y^2} & \frac{d^2 f}{dy\, dz} \cdots \\ \frac{d^2 f}{dx\, dz} & \frac{d^2 f}{dy\, dz} & \frac{d^2 f}{d z^2} \cdots \end{vmatrix}$$

En el que podemos reconocer desde luego el hessiano de la forma dada, con lo que queda demostrado el teorema.

Escolio.—Observemos que este último teorema, no es más que la generalización del análogo establecido para una forma binaria en particular.

CAPÍTULO IX.

FORMAS CANÓNICAS.

83. Una de las importantes aplicaciones de la teoría de sustituciones lineales, es la que tiene por objeto dar á las funciones la forma más sencilla para facilitar su estudio. La geometría analítica, nos presenta bien claramente la ventaja que proporciona una elección conveniente de ejes coordenados para el estudio de las líneas y superficies, así por ejemplo, para estudiar las curvas de segundo grado, elegíamos los ejes de modo que la ecuación representativa del lugar tuviese la forma más sencilla, y bajo esta forma deducíamos sus diversas propiedades. Ahora, bien, el cambio de ejes se reduce según es sabido á sustituciones lineales, y lo importante es que estas sustituciones no alteran la relación de invariantes y covariantes, y por consiguiente, diversas propiedades son completamente independientes de la elección de ejes y se presentan como características de las funciones primitivas, ya analíticamente consideradas, ya como representación de lugares geométricos.

Se presenta, pues, la siguiente cuestión de análisis: ¿cual es la forma más sencilla á que puede reducirse una función dada, sin perder su generalidad? y esto es lo que vamos á estudiar en el presente capítulo.

Cuando una función está expresada en su forma más sencilla, con las condiciones dichas, se dice que está reducida á su *forma canónica*.

Pero es esencial tener presente que para que una función pueda considerarse como forma canónica de otra función, es indispensable que la primera contenga al menos tantas constantes ya *explícita ó implícitamente* como la segunda tomada en toda su generalidad y esta circunstancia que se ve perfectamente á priori hace comprender cuando la reducción es imposible.

Consideremos, por ejemplo, la binaria cuadrada:

$$a_0\, x^2 + a_1\, x\, y + a_2 y^2 \qquad (1)$$

y su forma canónica (*)

$$X^2 + Y^2 \qquad (2)$$

fácil es ver que se puede reducir de infinitas maneras á dicha forma canónica, porque equivaliendo la expresión escrita á

$$(l_1\, x + m_1\, y)^2 + (l_2\, x + m_2\, y)^2 \qquad (3)$$

tenemos cuatro constantes y la forma dada sólo tiene tres, podemos por lo tanto disponer arbitrariamente de una de ellas al tratar de identificar las dos expresiones. Una vez conseguido dar á la función (1) la forma (3) por medio de la sustitución lineal

$$X = l_1\, x + m_1\, y$$

$$Y = l_2\, x + m_2\, y$$

se expresa bajo la forma canónica $X^2 + Y^2$.

(*) Se comprende considerada la cuestión en toda su generalidad la imposibilidad de que desaparezcan los cuadrados de las variables, y en este concepto la expresión (2) será la más sencilla posible.

Una forma cuadrática ternaria podrá ser reducida de infinitas maneras á la forma $X^2+Y^2+Z^2$ porque equivaliendo X, Y, Z á las expresiones

$$l_1 x+m_1 y+n_1 z,\ l_2 x+m_2 y+n_2 z,\ l_3 x+m_3 y+n_3 z$$

encierra la forma canónica nueve constantes y la dada sólo seis.

En general, una forma cuadrada de m variables encierra $\frac{m(m+1)}{2}$ constantes (número de combinaciones de dos en dos, con repetición de sus letras), y por consiguiente podrá ser transformada en una suma de m cuadrados que encierran en total m^2 constantes, quedando por lo tanto arbitrarias

$$m^2-\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$$

de ellas.

Aunque hemos dicho que para que una expresión dada, pueda considerarse como canónica de una función, es preciso que la primera contenga al menos tantas constantes como la segunda, dicha condición no es suficiente, pues puede suceder que las constantes figuren de tal modo en la expresión canónica que se haga imposible la identificación.

Debe observarse también que aunque una forma cuadrática puede reducirse á una suma algebraica de cuadrados de diversas maneras, siempre tendrán que aparecer en igual número los cuadrados positivos y negativos, pues por ejemplo, si la binaria se reduce á X^2+Y^2 no podrá reducirse á Z^2-T^2 puesto que estas dos expresiones nunca podrán ser identificadas, por tener la una factores imaginarios y la otra factores reales.

Del mismo modo si la ternaria ha podido reducirse á

$$X^2 + Y^2 + Z^2$$

no podrá serlo á la

$$T^2 + U^2 - V^2$$

porque se tendría

$$T^2 + U^2 = V^2 + (l_1 x + m_1 y + n_1 z)^2 + (l_2 x + m_2 y + n_2 z)^2 + (l_3 x + m_3 y + n_3 z)^2$$

y esta igualdad es imposible, porque si hacemos que T y U se anulen, resultará que la suma de cuatro cuadrados es cero, lo que no puede verificarse: el mismo razonamiento haríamos para una forma cuadrática de cualquier número de variables.

Una forma cúbica binaria podrá reducirse á la forma $X^3 + Y^3$ puesto que una y otra contienen cuatro constantes arbitrarias.

La cúbica ternaria tiene en general diez constantes y por eso podrá tomar la forma canónica

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 6\,K\,X\,Y\,Z$$

que así mismo contiene diez y por lo tanto goza de igual generalidad.

PROCEDIMIENTO PARA LA TRANSFORMACIÓN.

84. Ocupándonos en particular de las formas binarias, distinguiremos dos casos, según se trate de formas de grado impar ó par, pues la reducción de estas últimas á la forma canónica presenta en general dificultades, mientras que la reducción de las

primeras está fundada (por más que hay casos en que es imposible) en el siguiente

Teorema.—*Una forma de grado impar* $(2n+1)$ *puede en general reducirse á la forma canónica*

$$(l_1 x + m_1 y)^{2n+1} + (l_2 x + m_2 y)^{2n+1} + \dots\dots +$$
$$(l_n x + m_n y)^{2n+1} + (l_{n+1} x + m_{n+1} y)^{2n+1} \qquad (1)$$

por la resolución de una ecuación del grado $n+1$ y de un sistema de ecuaciones lineales.

Vamos á demostrar esta proposición debida á Sylvester, pero ante todo demos á la expresión (1) otra forma, para lo cual sustituiremos á cada uno de los paréntesis, por ejemplo:

$$(l_k x + m_k y)^{2n+1}$$

su igual

$$l_k^{\,2n+1}\left(x + \frac{m_k}{l_k} y\right)^{2n+1}$$

ó bien haciendo

$$l_k^{\,2n+1} = p_k \quad \text{y} \quad m_k = l_k \cdot q_k$$

la expresión que en general sustituiremos, será:

$$p_k (x + q_k y)^{2n+1}$$

se tendrá por lo tanto, en lugar de la (1)

$$p_1 (x+q_1 y)^{2n+1} + p_2 (x+q_2 y)^{2n+1} + \dots\dots +$$
$$p_n (x+q_n y)^{2n+1} + p_{n+1} (x+q_{n+1} y)^{2n+1} \qquad (2)$$

Identificando la binaria dada

$$a_0 x^{2n+1} + (2n+1) a_1 x^{2n} y + \frac{2n(2n+1)}{2} a_2 x^{2n-1} y^2 + \dots\dots +$$
$$(2n+1) a_{2n} x y^{2n} + a_{2n+1} y^{2n+1}$$

con la forma canónica (2) resultarán las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c}
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots\ldots + p_n + p_{n+1} = a_0 \\
p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 + \ldots\ldots + p_n q_n + p_{n+1} q_{n+1} = a_1 \\
p_1 q_1^2 + p_2 q_2^2 + p_3 q_3^2 + p_4 q_4^2 + \ldots\ldots + p_n q_n^2 + p_{n+1} q_{n+1}^2 = a_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_1 q_1^n + p_2 q_2^n + p_3 q_3^n + p_4 q_4^n + \ldots + \\
p_n q_n^n + p_{n+1} q_{n+1}^n = a_n \\
p_1 q_1^{n+1} + p_2 q_2^{n+1} + p_3 q_3^{n+1} + p_4 q_4^{n+1} + \ldots + \\
p_n q_n^{n+1} + p_{n+1} q_{n+1}^{n+1} = a_{n+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_1 q_1^{2n} + p_2 q_2^{2n} + p_3 q_3^{2n} + p_4 q_4^{2n} + \ldots + \\
p_n q_n^{2n} + p_{n+1} q_{n+1}^{2n} = a_{2n} \\
p_1 q_1^{2n+1} + p_2 q_2^{2n+1} + p_3 q_3^{2n+1} + p_4 q_4^{2n+1} + \ldots + \\
p_n q_n^{2n+1} + p_{n+1} q_{n+1}^{2n+1} = a_{2n+1}
\end{array}\right\} (3)$$

Ahora, bien, estas ecuaciones, son en número de $(n+2)$, es decir, tantas como incógnitas p y q, puesto que cada una de estas letras entran en número de $n+1$.

Queda, pues, ya la cuestión reducida á la resolución de este sistema de ecuaciones que en general será compatible.

Despejemos p_1 en las $(n+1)$ primeras ecuaciones y tendremos:

$$\Delta\, p_1 = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ a_1 & q_2 & q_3 & \ldots\ldots & q_{n+1} \\ a_2 & q_2^2 & q_3^2 & \ldots\ldots & q_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & q_2^n & q_3^n & \ldots\ldots & q_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

siendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots\cdots & q_{n+1} \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 & \cdots\cdots & q^2_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1^n & q_2^n & q_3^n & \cdots\cdots & q_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Desarrollando Δ por los elementos de la primera vertical, se tendrá:

$$\Delta = K_0 . 1 + K_1 q_1 + K_2 q_2^2 + \ldots\ldots + K_n q_1^n$$

y haciendo lo mismo con $\Delta\, p_1$, resulta:

$$\Delta\, p_1 = K_0 a_0 + K_1 a_1 + K_2 a_2 + \ldots\ldots + K_n a_n$$

Despejando $p_1\, q_1$ en las $n + 1$ ecuaciones que siguen á la primera, y considerando como incógnitas

$$(p_1\, q_1)\ (p_2\, q_2) \ldots\ldots (p_{n+1}\, q_{n+1})$$

resultará:

$$\Delta p_1\, q_1 = k_0\, a_1 + k_1\, a_2 + k_2\, a_3 + \ldots + k_n\, a_{n+1}.$$

Despejando ahora $p_1\, q_1^2$ en las $(n+1)$ ecuaciones que siguen á las dos primeras, se tiene:

$$\Delta p_1\, q_1^2 = k_0\, a_2 + k_1\, a_3 + k_2\, a_4 + k_3\, a_5 + \ldots + k_n\, a_{n+2}$$

y de un modo análogo

$$\Delta p_1\, q_1^3 = k_0\, a_3 + k_1\, a_4 + k_2\, a^5 + \ldots + k_n\, a_{n+3}$$

....

....

$$\Delta p_1\, q_1^{n+1} = k_0\, a_{n+1} + k_1\, a_{n+2} + k_2\, a_{n+3} + \ldots + k_n\, a_{2n+1}\ ;$$

Si se dividen ambos miembros de las ecuaciones que hemos obtenido por Δp_1, resulta el sistema

$$a_0 \frac{k_0}{\Delta p_1} + a_1 \frac{k_1}{\Delta p_1} + a_2 \frac{k_2}{\Delta p_1} + \ldots\ldots + a_n \frac{k_n}{\Delta p_1} = 1$$

$$a_1 \frac{k_0}{\Delta p_1} + a_2 \frac{k_1}{\Delta p_1} + a_3 \frac{k_2}{\Delta p_1} + \ldots + a_{n+1} \frac{k_n}{\Delta p_1} = q_1$$

$$a_2 \frac{k_0}{\Delta p_1} + a_3 \frac{k_1}{\Delta p_1} + a_4 \frac{k_2}{\Delta p_1} + \ldots + a_{n+2} \frac{k_n}{\Delta p_1} = q_1^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n+1} \frac{k_0}{\Delta p_1} + a_{n+2} \frac{k_1}{\Delta p_1} + a_{n+3} \frac{k_2}{\Delta p_1} + \ldots + a_{2n+1} \frac{k_n}{\Delta p_1} = q_1^{n+1}$$

de $(n+2)$ ecuaciones entre las $(n+1)$ cantidades

$$\frac{k_0}{\Delta p_1}, \frac{k_1}{\Delta p_1} \cdots \frac{k_n}{\Delta p_1}$$

y como consecuencia de él, tendrá que verificarse:

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 \ldots\ldots & q_1^{n+1} \\ a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots & a_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} \ldots\ldots & a_{2n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora, bien, si como hemos operado con q_1, lo hubiésemos hecho con q_2, resultaria una ecuación análoga salvo la sustitución de q_1 por q_2, luego no admite duda que las $(n+2)$ raices de esta ecuación son los valores de $q_1\, q_2 \ldots\ldots q_{n+1}$.

Dicha ecuación se puede escribir así:

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \cdots\cdots & z^{n+1} \\ a_0 & a_1 & a_2 \cdots\cdots & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} \cdots & a_{2n+1} \end{vmatrix} = o$$

y recibe el nombre de *canonizante* de la binaria dada.

Una vez determinados los valores de q por medio de esta ecuación, se sustituyen en las $(n+1)$ primeras de las (3), y se tendrán los valores de los coeficientes p, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

La proposición queda, pues, demostrada.

85. Consideremos como aplicación del procedimiento expuesto, el caso particular de una binaria cúbica:

$$a_0 x^3 + 3\, a_1 x^2 y + 3\, a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Su forma canónica, será:

$$p_1 (x + q_1 y)^3 + p_2 (x + q_2 y)^3$$

y su ecuación canonizante

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = o$$

ó bien

$$(a_0 a_2 - a_1^2) z^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z + (a_1 a_3 - a_2^2) = o$$

de esta ecuación se deducirán los valores de z, ó sea q_1 y q_2, y sustituyéndolos en las ecuaciones (3) de la teoría, que en este caso son

$$p_1+p_2=a_0$$

$$p_1\,q_1+p_2\,q_2=a_1$$

se tendrán los valores de p_1 y p_2 y quedará la cuestión completamente resuelta.

Observemos que para que la reducción sea posible *por medio de una transformación real*, es necesario que los valores de z sean reales, y por lo tanto que el discriminante de la ecuación en z, esto es

$$D=(a_1\,a_2-a_0\,a_3)^2-4\,(a_0\,a_2-a_1^2)\,(a_1\,a_3-a_2)^2$$

no sea negativo.

Si dicho discriminante es nulo, los valores de q_1 y q_2 son iguales y las ecuaciones que dan los valores de p se reducen á

$$p_1+p_2=a_0$$

$$p_1+p_2=\frac{a_1}{q_1}$$

que en general serán incompatibles.

Podemos también observar que si en la ecuación en z ponemos en lugar de esta variable la relación $-\dfrac{x}{y}$ resulta:

$$(a_1^2-a_0\,a_2)\,x^2+(a_1\,a_2-a_0\,a_3)\,x\,y+(a_2^2-a_1\,a_3)\,y^2=o$$

que es el hessiano de la forma dada.

Consideremos ahora, como ejemplo numérico, el siguiente:

$$5\,x^3+36\,x^2\,y+90\,x\,y^2+78\,y^3.$$

Tenemos en este caso

$$a_0=5\quad a_1=12\quad a_2=30\quad a_3=78.$$

La canonizante será:

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 5 & 12 & 30 \\ 12 & 30 & 78 \end{vmatrix}=o$$

ó bien

$$z^2 - 5z + 6 = o$$

resolviendo esta ecuación, se halla:

$$q_1 = 2 \quad q_2 = 3$$

y sustituyendo en las ecuaciones que dan p_1 y p_2 estos valores, resulta:

$$p_1 + p_2 = 5$$
$$2\,p_1 + 3\,p_2 = 12$$

por consiguiente

$$p_1 = 3 \quad p_2 = 2$$

y la forma canónica será

$$3\,(x + 2\,y)^3 + 2\,(x + 3\,y)^3$$

Para ver por medio de qué sustitución lineal hecha en la forma se llega á obtener la canónica $X^3 + Y^3$, introduzcamos los factores numéricos dentro de los paréntesis y se tendrá

$$\left(x\sqrt[3]{3} + 2\,y\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(x\sqrt[3]{2} + 3\,y\sqrt[3]{2}\right)^3$$

luego la sustitución que hay que efectuar, será:

$$X = x\sqrt[3]{3} + 2\,y\sqrt[3]{3}$$

$$Y = x\sqrt[3]{2} + 3\,y\sqrt[3]{2}$$

ó bien

$$x = 3\,X\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - 2\,Y\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$y = Y\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - X\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Efectuando dicha sustitución, tendremos:

$$x^3 = 9\,X^3 - 54\,X^2\,Y \sqrt[3]{\frac{1}{18}} + 36\,X\,Y^2 \sqrt[3]{\frac{1}{12}} - 4\,Y^3$$

$$x^2 y = -3\,X^3 + 21\,X^2\,Y \sqrt[3]{\frac{1}{18}} - 16\,X\,Y^2 \sqrt[3]{\frac{1}{12}} + 2\,Y^3$$

$$x\,y^2 = X^3 - 8\,X^2\,Y \sqrt[3]{\frac{1}{18}} + 7\,X\,Y^2 \sqrt[3]{\frac{1}{12}} - Y^3$$

$$y^3 = -\frac{X^3}{3} + 3\,X^2\,Y \sqrt[3]{\frac{1}{18}} - 3\,X\,Y^2 \sqrt[3]{\frac{1}{12}} + \frac{Y^3}{2}$$

y por lo tanto

$$5\,x^3 + 36\,x^2\,y + 90\,x\,y^2 + 78\,y^3 = X^3 + Y^3.$$

86. Pasando ahora á las formas de grado par $2\,n$, debemos observar que la expresión canónica, análoga á la que hemos obtenido para las impares, no podrá encontrarse en general, porque teniendo la forma dada $(2\,n+1)$ términos, si la igualamos á una suma de n potencias del grado $2\,n$ resultará una ecuación más que constantes y habrá en general incompatibilidad, y si tomamos $(n+1)$ potencias del grado $2\,n$, resultará una constante más que ecuaciones y la transformación se hará de infinitas maneras.

Nos limitaremos, pues, en lo que toca á las formas pares á considerar los casos particulares de la binaria cuadrada y bicuadrada.

Sea la binaria cuadrada

$$a_0\,x^2 + 2\,a_1\,x\,y + a_2\,y^2$$

La forma más sencilla ó que podremos reducirla, será evidentemente $X^2 + Y^2$, ó bien

$$p_1 (x + q_1 y)^2 + p_2 (x + q_2 y)^2$$

identificando esta expresión y la forma dada, resulta:

$$p_1 + p_2 = a_0$$
$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = a_1$$
$$p_1 q_1^2 + p_2 q_2^2 = a_2$$

Tenemos tres ecuaciones para determinar las cuatro constantes y podemos disponer arbitrariamente de una de ellas, hagamos, por ejemplo, $q_1 = o$ y resultarán las ecuaciones

$$p_1 + p_2 = a_0$$
$$p_2 q_2 = a_1$$
$$p_2 q_2^2 = a_2$$

de las que fácilmente se deduce

$$p_1 = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_2} \quad p_2 = \frac{a_1^2}{a_2} \quad q_2 = \frac{a_2}{a_1}$$

quedando la cuestión resuelta.

Si el discriminante es nulo $p_1 = o$ y la binaria tomará la forma

$$p_2 (x + q_2 y)^2$$

Tomemos como ejemplo la forma

$$2 x^2 + 6 x y + 3 y^2$$

Se tendrá:

$a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $p_1 = -1$, $p_2 = 3$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$

y la forma canónica, será:

$$3 (x + y)^2 - x^2$$

La sustitución que habrá que efectuar para llegar á la forma canónica, será:

$$x = X$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} Y - X$$

y en efecto, se tiene:

$$2x^2 + 6xy + 3y^2 = 2X^2 +$$

$$+ \frac{6}{\sqrt{3}} XY - 6X^2 + Y^2 - \frac{6}{\sqrt{3}} XY + 3X^2 = Y^2 - X^2$$

87. Consideremos la binaria de cuarto grado

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6 a_2 x^2 y^2 + 4 a_3 x y^3 + a_4 y^4$$

veamos, ante todo, las condiciones que tendrán que verificarse para que pueda reducirse á la forma canónica

$$p_1 (x + q_1 y)^4 + p_2 (x + q_2 y)^4$$

Identificando las dos expresiones resultarán las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= a_0 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 &= a_1 \\ p_1 q_1^2 + p_2 q_2^2 &= a_2 \qquad (1) \\ p_1 q_1^3 + p_2 q_2^3 &= a_3 \\ p_1 q_1^4 + p_2 q_2^4 &= a_4 \end{aligned}$$

que siendo en número de cinco y cuatro, las indeterminadas serán en general incompatibles, conforme con lo que anteriormente hemos dicho. Las condiciones de compatibilidad serán las que marquen la posibilidad de la reducción á la forma canónica que hemos escrito.

Eliminemos q_1 y q_2 entre las tres primeras ecuaciones y tendrán que verificarse en la hipótesis en que estamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ q_1 & q_2 & a_1 \\ q_1^2 & q_2^2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

ó bien

$$a_0 \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Eliminemos ahora las mismas cantidades entre la segunda, tercera y cuarta de las ecuaciones (1) y resultará después de suprimir el factor $q_1 \, q_2$

$$a_1 \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = o \qquad (3)$$

y de un modo análogo, resulta en las tres últimas

$$a_2 \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} + a_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = o \qquad (4)$$

Debiendo ser compatibles estas ecuaciones (2), (3) y (4), para que lo sean las (1), tendrá que verificarse

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = o \qquad (5)$$

Esta expresión es invariante de la binaria bicuadrada, y según vemos, su anulación indica la posibilidad de la reducción de dicha forma á la canónica, compuesta de la suma de dos cuartas potencias de binomios lineales.

Una vez cumplida la condición (5) bastará para determinar los coeficientes utilizar las cuatro primeras ecuaciones (1), que siendo las mismas que sirvieron para hallar la canonizante de la cúbica, conducirán al mismo resultado, esto es

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_0 \, a_2 - a_1^2) \, z^2 + (a_1 \, a_2 - a_0 \, a_3) \, z + (a_1 \, a_3 - a_2^2) = o$$

que será por consiguiente la canonizante de la binaria bicuadrada, en el caso particular que estamos considerando.

Una vez encontrados los valores de q_1 y q_2 por la resolución de una ecuación de segundo grado, utilizaremos las dos primeras (1) para hallar p_1 y p_2, y la cuestión quedará completamente resuelta.

88. Ahora, bien, cuando la condición (5) no queda satisfecha, no podremos reducir la forma á la canónica que hemos considerado, pero podrá reducirse á esta otra:

$$(a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4)\,(x\, y)^4 =$$
$$p_1\,(x+q_1\, y)^4 + p_2\,(x+q_2\, y)^4 + 6\, k\,(x+q_1\, y)^2\,(x+q_2\, y)^2$$

pues contamos de este modo con cinco coeficientes, es decir, tantos como ecuaciones tenemos que establecer para identificar las dos expresiones; dichas ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{r} p_1+p_2+6\, k=a_0 \\ p_1\, q_1+p_2\, q_2+3\, k\, s=a_1 \\ p_1\, q_1^2+p_2\, q_2^2+k\,(s^2+2\, p)=a_2 \\ p_1\, q_1^3+p_2\, q_2^3+3\, k\, s\, p=a_3 \\ p_1\, q_1^4+p_2\, q_2^4+6\, k\, p^2=a_4 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

habiendo hecho $q_1+q_2=s$, $q_1\, q_2=p$.

Eliminemos p_1 y p_2 entre las tres primeras ecuaciones, destruyendo el factor común (q_2-q_1) y teniendo presente lo que representan s y p, resulta:

$$(a_0-6\, k)\, p-(a_1-3\, k\, s)\, s+[a_2-k\,(s^2+2\, p)]=o \qquad (7)$$

Haciendo igual eliminación entre la segunda, tercera y cuarta, se deduce de un modo análogo

$$(a_1-3\, k\, s)\, p-[a_2-k\,(s^2+2\, p)]\, s+a_3-3\, k\, s\, p=o. \qquad (8)$$

Finalmente se deduce de las tres últimas

$$[a_2-k\,(s^2+2\, p)]\, p-(a_3-3\, k\, s\, p)\, s+(a_4-6\, k\, p^2)=o \qquad (9)$$

Haciendo reducciones en las ecuaciones (7) (8) y (9), resultan estas otras:

$$\left.\begin{aligned} a_0 p - a_1 s + a_2 - k(8p - 2s^2) &= o \\ a_1 p - a_2 s + a_3 - k(4sp - s^3) &= o \\ a_2 p - a_3 s + a_4 - k(8p^2 - 2s^2 p) &= o \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Representemos por abreviar la cantidad $k(8p - 2s^2)$ por Q y se tendrá:

$$-k(4sp - s^3) = \frac{sk}{2}(8p - 2s^2) = \frac{Q}{2}s$$

$$-k(8p^2 - 2s^2 p) = pk(8p - 2s^2) = Qp$$

y por consiguiente las (10) se reducen á las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} a_0 p - a_1 s + a_2 + Q &= o \\ a_1 p - \left(a_2 - \frac{Q}{2}\right) s + a_3 &= o \\ (a_2 + Q)\, p - a_3 s + a_4 &= o \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Eliminando s y p entre estas tres ecuaciones, tendrá que verificarse:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 + Q \\ a_1 & a_2 - \dfrac{Q}{2} & a_3 \\ a_2 + Q & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = o$$

Desarrollando este determinante, resultará una ecuación de tercer grado, que tendrá por lo menos una raíz real; de todos modos, sustituída una de sus raíces en las ecuaciones (11), se hallarán los valores de p, y s, lo que dará la suma y el producto de q_1, y q_2, y por lo tanto estas cantidades, puesto que bastará resolver la ecuación de segundo grado

$$z^2 - sz + p = o.$$

Una vez conocidos q_1, y q_2, las ecuaciones (6) darán los valores de p_1, p_2, y k, y la cuestión queda completamente resuelta.

El problema, pues, de la transformación de una forma bicuadrada en la canónica $u^4+v^4+6\,k\,u^2\,v^2$ sólo depende de la resolución de dos ecuaciones, una de tercer grado y otra de segundo y de ecuaciones lineales.

87. Conviene observar que la transformación de una forma bicuadrada en su canónica, permite la resolución algebraica de las ecuaciones de cuarto grado, puesto que dicha ecuación (que siempre puede hacerse homogénea) se reduce en último término á la expresión

$$u^4+v^4+6\,k\,u^2\,v^2=o$$

ó lo que es lo mismo, dividiendo por v^4

$$\left(\frac{u}{v}\right)^4+6\,k\left(\frac{u}{v}\right)^2+1=o$$

ecuación bicuadrada que se sabe resolver algebraicamente.

M. Cayley ha dado un método general de reducción de las binarias de grado par á la forma canónica, y hecho aplicación á las formas de sexto y octavo grado. Igualmente se debe á este ilustre autor un algoritmo muy expedito en la teoria que nos ha venido ocupando, pero el extendernos más sobre el particular, nos haria salir de los límites en que forzosamente hemos tenido que encerrarnos al escribir estos elementos.

FIN.

ÍNDICE.

FE DE ERRATAS.

Página	Línea	Dice.	Léase.
13...	3...	$+a_n\lambda_1$... $a_1\, x_2$.....	$+a_n\lambda_1$, $a_1\, x_2$
Id...	5...	$+b_n\lambda_1$... $b_2\, x_2$.....	$+b_n\lambda_1$, $b_1\, x_2$
Id...	8...	$+l_n\lambda_1$... $l_1\, x_2$.....	$+l_n\lambda_1$, $l_1\, x_2$
29...	14...	$-l_n$	$+l_n$
35...	7...	de el..................	de u y u' y el
45...	19...	irregulares..........	singulares
46...	6..	sobre..................	salvo
50..	17...	$g=2$..................	$g=$ [illegible]/2
54...	8...	$+m_1)$..................	$+.....)\, m_1$
61...	8...	l_2..................	$l_2\, p^x$
64...	3...	determinado.........	indeterminado
89...	4...	$+m_1\, y$..................	$-m_1\, y$
90...	21...	a_3..................	$(a_3$
97...	18...	$+2\,A_1\,X_1\,Y_1$.......	$-2\,A_1\,X_1\,Y_1$
97...	19...	$+2\,a_1\,x_1\,y_1$.......	$-2\,a_1\,x_1\,y_1$
100...	21...	transformada del...	transformada, es la transformada del
112...	3...	$a_2\, y^4$..................	$a_2\, y^2$
112...	10...	$a_0 a_2 - 2\,a_1 a_3$...	$a_0 a_4 + 2\,a_1 a_3$

Las citas de párrafos desde la página 18 á la 35, deben entenderse aumentadas en una unidad.