LE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

Periodico mensile di matematiche pure ed applicate, superiori ed elementari,

ad uso dell' Istruzione media e superiore

diretto dal Prof. CRISTOFORO ALASIA

Estratto dal N. 4 - Vol. I - Maggio 1901

…i parametri della equazione del cerchio

IN COORDINATE BARICENTRICHE

Nota di ***Juan J. Duran Loriga*** *(La Coruña)*

Città di Castello, S. Lapi Tipografo-Editore

Paris, Gauthier-Villars impr.-libraire, 55, Quai des Grands Augustins

SUI PARAMETRI DELLA EQUAZIONE DEL CERCHIO IN COORDINATE BARICENTRICHE *

Nota di ***Juan J. Durán Loriga*** *(La Coruña)*

1. Sappiamo che l'equazione di un cerchio in coordinate baricentriche è della forma:

$$(1) \qquad (\alpha+\beta+\gamma)(p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma)-\Sigma\, a^2\beta\gamma=o.$$

I parametri p_a, p_b, p_c, sono le potenze dei vertici del triangolo di riferimento rispetto a tale cerchio. La conoscenza di queste quantità permette di determinare geometricamente il centro del cerchio. Dalle relazioni poi:

$$\overline{O_1A}^2-p_a^2=\rho^2, \qquad \overline{O_1B}^2-p_b^2=\rho^2, \qquad \overline{O_1C}^2-p_c^2=\rho^2$$

(chiamando O_1 il centro e ρ il raggio) si deduce che se dai vertici A, B e C del triangolo di riferimento, come centri, e coi raggi rispettivi $\sqrt{p_a}$, $\sqrt{p_b}$, $\sqrt{p_c}$, si descrivono tre cerchi, il centro radicale di questi è il centro del cerchio in parola.

Una semplice interpretazione geometrica dei citati parametri è data dall'osservazione, come abbiamo detto nella nostra memoria presentata al Congresso di Nantes (Assoc. Franç. pour l'Avanc. des Sciences, 1899), che se si costruiscono i cerchi *semiderivati* di un cerchio dato (intendendo per tali i tre cerchi che si ottengono cambiando di segno successivamente i tre parametri p_a, p_b, p_c), il centro radicale di questi cerchi ha per coordinate:

$$\alpha p_a=\beta p_b=\gamma p_c$$

ed è reciproco del punto (p_a, p_b, p_c). Così, ad esempio, i cerchi semi derivati del cerchio di De Longchamps hanno per centro radicale il reciproco del punto di Lemoine. I semi derivati del cerchio polare coniugato danno l'ortocentro quale centro radicale. Pel cerchio di Brocard si otterrà il punto di Lemoine, ecc.

* Estratto dal Periodico mensile *Le Matematiche pure ed applicate* diretto dal *Prof. Cristoforo Alasia* (Anno I, Num. 4-5 - Maggio-Giugno 1901). — Città di Castello, S. Lapi tipografo-editore.

2. Le equazioni che danno il centro del cerchio (1) possono essere poste sotto forma:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma\, p_{ab} = -c^2\alpha + c^2\beta + (b^2 - a^2)\gamma \\ \sigma\, p_{ca} = -b^2\alpha^2 + (a^2 - c^2)\beta - b^2\gamma \\ \sigma\, p_{bc} = (c^2 - b^2)\alpha - a^2\beta + a^2\gamma \end{cases}$$

indicando con σ la somma $\alpha + \beta + \gamma$, e ponendo: $p_{ab} = p_a - p_b$, $p_{ca} = p_c - p_a$, $p_{bc} = p_b - p_c$.

Si vede dunque che la posizione del centro dipende unicamente dai valori delle differenze fra i parametri, e tali quantità possono considerarsi quali coordinate di un punto del piano, (posto però all'infinito, se la loro somma è zero). Così, la conoscenza di due delle differenze permette di tracciare una ceviana corrispondente al cerchio.

Reciprocamente, la conoscenza di una ceviana non precisa la posizione del centro del cerchio, ma permette di determinare dei valori proporzionali, cioè del luogo geometrico dei centri di diversi cerchi, che evidentemente passa pel centro del cerchio circoscritto, giacchè per questo punto le relazioni fra le differenze dei parametri sono indeterminate.

Supponiamo, ad esempio, che si abbia:

$$\frac{p_{ab}}{p_{ca}} = \frac{k}{h}.$$

Il luogo dei centri è la retta che ha per equazione:

$$(3)\qquad (k\,b^2 + h\,c^2)\alpha + [k\,(a^2 - c^2) - h\,c^2]\beta - [k\,b^2 + h\,(b^2 - a^2)]\gamma = o,$$

che infatti passa per O. Se ora vogliamo che passi per l'altro punto $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, i parametri k e h di quest'ultima equazione verificheranno la condizione:

$$\frac{k}{h} = \frac{-c^2\alpha_1 + c^2\beta_1 + (b^2 - a^2)\gamma_1}{b^2\alpha_1 + (a^2 - c^2)\beta_1 - b^2\gamma_1}.$$

Così, se vogliamo che il centro sia sulla retta d'Eulero, dovrà essere:

$$\frac{p_{ab}}{p_{ca}} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 - c^2}$$

e cioè la ceviana che corrisponde ai cerchi citati avrà per equazione:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - a^2}$$

e passerà pel punto associato all'infinito del punto di Lemoine.

Se il centro è sul diametro di Brocard, si verificherà la relazione:

$$\frac{p_{ab}}{p_{ca}} = \frac{c^2\,(b^2 - a^2)}{b^2\,(a^2 - c^2)} \quad \text{ecc.}$$

Se ricordiamo ciò che si è detto antecedentemente, e cioè che il centro di un cerchio è centro radicale dei cerchi descritti coi vertici A, B, C quali centri e con raggi rispettivi $\sqrt{p_a}$, $\sqrt{p_b}$, $\sqrt{p_c}$, possiamo enunciare varie proposizioni, e ad esempio, le seguenti:

Se per tre cerchi di centri fissi A, B, C, *essendo* a, b, c *le distanze* BC, AC, AB *dei centri, i raggi* r_1, r_2, r_3 *verificano la relazione:*

$$\frac{r_1^2 - r_3^2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2},$$

il centro radicale di tali cerchi descrive la retta di Eulero *del triangolo determinato dai centri. Se la relazione è:*

$$\frac{r_1^2 - r_3^2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)}$$

tale centro radicale si muove sopra il diametro di Brocard; ed in generale, *se si verifica la relazione:*

$$\frac{r_1^2 - r_3^2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{b^2\alpha_1 + (a^2 - c^2)\beta_1 - b^2\gamma_1}{c^2\alpha_1 - c^2\beta_1 + (a^2 - b^2)\gamma_1},$$

il centro si troverà situato sulla retta che unisce il centro del cerchio circoscritto al punto che ha per coordinate $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

Se fra l'equazione (3) e l'equazione generale $k\beta - h\alpha = o$ di una ceviana che passa per A eliminiamo h e k, otteniamo il luogo geometrico delle intersezioni delle ceviane relative ai vari cerchi con le rette corrispondenti: tale eliminazione dà:

$$c^2\beta^2 + b^2\gamma^2 + (c^2 + b^2 - 2a^2)\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = o$$

che rappresenta un cerchio di cui è AO il diametro, come del resto poteva prevedersi.

Alla detta equazione può darsi la forma normale:

$$\left(\alpha + \beta + \gamma\right)\left(\frac{c^2}{2}\beta + \frac{b^2}{2}\gamma\right) - \Sigma a^2\beta\gamma = o.$$

3. Ogni relazione lineare ed omogenea fra i parametri p_{ab}, p_{ac} dà per luogo geometrico dei centri, come abbiamo visto, una retta che passa per O. Se si vuole che questi descrivano un'altra retta che non passi pel centro del cerchio circoscritto, può stabilirsi una relazione lineare *non omogenea*, quale:

$$(4) \qquad hp_{ab} - kp_{ac} = l.$$

Dalle equazioni (3) deduciamo:

$$p_{ab} = \frac{-c^2\alpha + c^2\beta + (b^2 - a^2)\gamma}{\sigma}, \qquad p_{ac} = \frac{b^2\alpha + (a^2 - c^2)\beta - b^2\gamma}{\sigma}$$

e sostituendo nella (4)

$$(l + hc^2 + kb^2)\alpha + [l + k(a^2 - c^2) - c^2h]\beta + [l + h(a^2 - b^2) - kb^2]\gamma = o$$

che è la retta — luogo geometrico dei centri.

Reciprocamente, se vogliamo che il centro descriva una retta determinata

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$

stabiliremo le uguaglianze:

$$\frac{l + h\,c^2 + k\,b^2}{A} = \frac{l - h\,c^2 + k\,(a^2 - c^2)}{B} = \frac{l + h\,(a^2 - b^2) - k\,b^2}{C} = q$$

essendo q il fattore di proporzionalità. Facilmente si deduce:

$$l = \begin{vmatrix} A & c^2 & b^2 \\ B & -c^2 & (a^2 - c^2) \\ C & (a^2 - b^2) & -b^2 \end{vmatrix} \; ; \; h = \begin{vmatrix} 1 & A & b^2 \\ 1 & B & (a^2 - c^2) \\ 1 & C & -b^2 \end{vmatrix} \; ; \; k = \begin{vmatrix} 1 & c^2 & A \\ 1 & -c^2 & B \\ 1 & (a^2 - b^2) & C \end{vmatrix}$$

Così, ad esempio, se vogliamo che il centro sia sulla mediana che parte da A, avremo: $A = o$, $B = 1$, $C = -1$, e la relazione dei parametri sarà:

$$(3\,b^2 + c^2 - a^2)\,p_{ab} + (3\,c^2 + b^2 - a^2)\,p_{ca} = (b^2 - c^2)\,(b^2 + c^2 - a^2).$$

Se vogliamo che sia sul lato BC, avremo: $A = 1$, $B = C = o$, e risulterà

$$(b^2 + a^2 - c^2)\,p_{ab} - (a^2 + c^2 - b^2)\,p_{ca} = a^2\,(b^2 + c^2 - a^2).$$

Possiamo osservare che essendo i valori di p_{ab}, p_{ca} lineari rispetto alle coordinate del centro, l'ordine della linea descritta da questo punto è, in generale, uguale al grado della relazione che si stabilirà fra i detti parametri. Però, quando si desidera che il centro si trovi su linee d'ordine superiore al primo, la relazione parametrica è per lo più molto complicata. Così, ad esempio, perchè il centro percorra l'ellisse di Steiner circoscritta, i parametri dovranno verificare l'identità seguente, dove si è posto: $S_a = b^2 + c^2 - a^2$, $S_b = a^2 + c^2 - b^2$, $S_c = a^2 + b^2 - c^2$:

$$\begin{aligned} & p^2_{ab}\Big[-S_a - 2b^2 S_c\Big] + p^2_{ca}\Big[2\,c^2(S_b - S_a) + S_a S_b\Big] - p_{ab}p_{ca}\Big[S_a(S_c + 4c^2) + 2b^2 S_b\Big] \\ & + p_{ab} S_a\Big[b^2(b^2 - c^2) + a^2(a^2 - c^2) + S_c\Big(b^2(b^2 - a^2) + c^2(c^2 - a^2)\Big)\Big] + p_{ca}\Big[S_b\Big(c^2(a^2 - c^2) \\ & + b^2(a^2 - b^2)\Big) + S_a\Big(c^2(b^2 - c^2) - a^2(a^2 - b^2)\Big)\Big] + b^2c^2 S_c(S_b + a^2) + a^2b^2 S_a S_b = o. \end{aligned}$$

Da ciò che si è detto, che la linea descritta dal centro è dello stesso grado della relazione fra i parametri, deduciamo che *le linee descritte dai centri dei cerchi associati, semi-associati, derivati e semi-derivati da un cerchio dato, sono del medesimo ordine della linea descritta dal centro di quest'ultimo.*

Così possiamo in generale dire che, se il centro di un cerchio descrive una retta, i centri dei cerchi associati e semi-associati, derivati e semi-derivati, si muovono anch'essi in linea retta.

4. Poichè la posizione del centro di un cerchio dipende dalle quantità p_{ab}, p_{ca}, p_{bc}, le questioni relative ad assi e centri radicali si deducono dalla conoscenza dei parametri p_a, p_b, p_c, o da valori ad essi proporzionali. È dunque chiaro che la conoscenza di questi ultimi trae con sè la conoscenza dei primi. Se chiamiamo, per evitare perifrasi, *punto aggiunto* ad un cerchio quello del quale le coordinate baricentriche sono:

$$\frac{\alpha}{p_a} = \frac{\beta}{p_b} = \frac{\gamma}{p_c},$$

potremo interpretare geometricamente i risultati che abbiamo ottenuti poco prima.

Abbiamo infatti visto che la relazione:

$$\frac{p_{ab}}{p_{ca}} = \frac{k}{h}$$

obbliga il centro a descrivere una retta che passa per O. Siccome a tale relazione si può dare la forma:

$$(h + k)\, p_a - h\, p_b - k\, p_c = o$$

che determina delle rette passanti pel centro di gravità, potremo dire che *quando il punto aggiunto ad un cerchio si muove secondo una retta che passa pel centro di gravità, il centro di detto cerchio si muove su di una retta passante per* O.

In modo analogo le relazioni:

$$\frac{p_{ab}}{p_{ca}} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 - c^2} \qquad \frac{p_{ab}}{p_{ca}} = \frac{c^2(b^2 - a^2)}{b^2(a^2 - c^2)}$$

ci danno il risultato seguente:

1º *Se il punto aggiunto ad un cerchio si muove sulla retta che unisce il centro di gravità al punto di* Lemoine, *il centro di detto cerchio descrive la retta di* Eulero.

2º *Se il detto punto aggiunto sta sulla retta che unisce il centro di gravità al reciproco del punto di* Lemoine, *il centro di detto cerchio giace sul diametro di* Brocard.

È evidente che l'equazione di un cerchio dà immantinenti a conoscere il suo punto aggiunto. Così ad esempio, il cerchio polare coniugato ha per punto aggiunto il reciproco dell'ortocentro; all'anticomplementare del polare coniugato corrisponde il punto di Lemoine; al cerchio di Brocard il reciproco del punto di Lemoine; al cerchio circoscritto un punto all'infinito, ecc.

Al contrario, se si conosce il punto aggiunto, non si può determinare il cerchio, ma una retta sulla quale è situato il suo centro, ed anche l'asse radicale di tal cerchio e del cerchio circoscritto. È necessaria poi ancora un'altra condizione: ad esempio, quella di passare per un punto noto, per il il cerchio che sarà completamente determinato. Senza questa condizione, sarà necessario determinarlo come abbiamo detto.

5. Consideriamo ora un cerchio

$$\sigma\,(p_a \alpha + p_b \beta + p_c \gamma) - \Sigma\, a^2 \beta \gamma = o$$

ed uno dei suoi associati, ad esempio il primo associato:

$$\sigma(p_b\alpha+p_c\beta+p_a\gamma)-\Sigma a^2\beta\gamma=o$$

e cerchiamo di vedere come varia di posto il centro radicale di questi cerchi e di quello circoscritto, quando il punto aggiunto al primo percorre la retta:

$$k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=o.$$

L'eliminazione di p_a, p_b, p_c fra le equazioni:

$$\begin{aligned}p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma&=o\\ p_b\alpha+p_c\beta+p_a\gamma&=o\\ p_a k_1+p_b k_2+p_c k_3&=o\end{aligned}$$

ci dà per equazione del luogo geometrico la conica:

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ k_1 & k_2 & k_3\end{vmatrix}=o$$

ossia:

$$(5)\qquad k_3\alpha^2+k_1\beta^2+k_2\gamma^2-k_3\beta\gamma-k_1\alpha\gamma-k_2\alpha\beta=o$$

A seconda dei valori di k_1, k_2, k_3, cioè a seconda della retta che percorre il punto aggiunto, corrisponderanno coniche diverse. Vogliasi, ad esempio, che il punto aggiunto sia posto sulla parallela al lato AB, condotta per C. Nell'equazione precedente avremo:

$$k_1=k_2=1,\qquad k_3=o$$

e la (5) assumerà la forma:

$$\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma=o$$

che evidentemente rappresenta una ellisse passante pel vertice A e pel centro di gravità. La tangente in A ha per equazione: $f'_\alpha=-\beta-\gamma=o$, cioè è parallela al lato BC. Si vede pure facilmente che la conica passa pei punti medi dei lati AB e BC del triangolo fondamentale, e che le equazioni delle tangenti in questi punti sono:

$$\alpha+\gamma-\beta=o\qquad \alpha+\beta-\gamma=o$$

cioè, tali tangenti sono le rette che uniscono il punto medio di BC ai punti medi dei lati del triangolo formato da due intermediane e dalla parallela a BC condotta pel vertice A. Risulta poi che la conica che consideriamo è la ellisse di Steiner inscritta in quest'ultimo triangolo.

Ciò può pure vedersi mediante il cambiamento del triangolo di riferimento. Chiamiamo $A_1B_1C_1$ questo nuovo triangolo, chiamando A_1 il punto medio di BC e A_1B_1, B_1C_1 le parallele ad AB e AC condotte per A_1 fino all'incontro con la parallela a BC condotta per A. Chiamiamo X, Y, Z le coordinate normali di un punto M rispetto al triangolo ABC ed X_1, Y_1, Z_1 le coordinate dello stesso punto rispetto al triangolo $A_1B_1C_1$. Se sono α_1,

β_1, γ_1 le coordinate baricentriche in quest'ultimo triangolo si ha evidentemente:

$$X_1 = b \operatorname{sen} C - X, \quad Y_1 = \frac{a}{2} \operatorname{sen} C - Y, \quad Z_1 = \frac{a}{2} \operatorname{sen} B - Z$$

per cui:

$$\alpha_1 = \frac{a b \operatorname{sen} C}{2} - \alpha, \quad \beta_1 = \frac{a b}{4} \operatorname{sen} C - \beta, \quad \gamma_1 = \frac{a c}{4} \operatorname{sen} B - \gamma$$

e, ciò che è lo stesso:

$$\alpha_1 = \beta + \gamma, \quad 2\beta_1 = \alpha + \gamma - \beta, \quad 2\gamma_1 = \alpha + \beta - \gamma$$

ossia:

$$\alpha = \beta_1 + \gamma_1, \quad \beta = \frac{\alpha_1 + \gamma_1 - \beta_1}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1}{2}$$

Se sostituiamo questi valori nell'equazione:

$$\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma = o$$

che abbiamo ottenuta dianzi, risulta:

$$\Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\beta\gamma = o$$

cioè l'equazione dell'ellisse di Steiner inscritta.

Possiamo poi dire che, quando il punto aggiunto ad un cerchio si muove secondo una parallela ad uno dei lati del triangolo, tracciata per un vertice, il centro radicale di tale cerchio, il suo primo associato ed il centro del cerchio circoscritto descrivono l'ellisse di Steiner inscritta nel triangolo formato da due mediane e dalla parallela citata.

Consideriamo quale ultimo esempio, per non dilungarci di più, il caso in cui il punto aggiunto si muove sopra il lato AB del triangolo fondamentale. È allora: $k_1 = k_2 = o$, $k_3 = 1$ e ne risulta la conica:

$$\alpha^2 - \beta\gamma = o$$

che evidentemente rappresenta una ellisse tangente ai lati AB e AC del triangolo, nei vertici B e C. Il centro ha per coordinate: $f'_\alpha = f'_\beta = f'_\gamma$, cioè: $\frac{\alpha}{-1} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$. L'ellisse passa anche pel punto G, ed in tal punto ha per tangente: $2\alpha - \beta - \gamma = o$, cioè una parallela a BC. Il centro poi si otterrà prendendo sulla mediana Aa', (a' medio di BC) una distanza $a'o_1 = a'G$. L'altro punto d'intersezione della mediana Aa' con l'ellisse, che chiameremo A_1, ha per coordinate:

$$\frac{\alpha}{-1} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{1}$$

e la tangente in questo punto è parallela al lato BC.

Se chiamiamo B' e C' i punti in cui questa parallela incontra i lati AB e AC, risulta che l'ellisse in parola è tangente ai lati del triangolo $AB'C'$ nei loro punti medi, e cioè è l'ellisse di Steiner inscritta in tale triangolo, o il che è lo stesso, l'ellisse di Steiner circoscritta al triangolo BCA_1, simmetrico al triangolo proposto rispetto al punto medio del lato BC. Poi otterremo tutti gli elementi di questa curva (fuochi, direttrici, assi, ecc.) formando il simmetrico di ABC rispetto al punto a' medio di BC.

Possiamo pure arrivare a ciò cercando le coordinate di un punto M' simmetrico dell'altro punto M, rispetto al punto medio di BC. È facile vedere che ciò si deduce dalle eguaglianze:

$$\alpha' = -\alpha, \quad \beta' = \alpha + \gamma, \quad \gamma' = \alpha + \beta$$

Se si sostituiscono questi valori nell'equazione dell'ellisse di STEINER circoscritta: $\Sigma \beta\gamma = o$, si ottiene:

$$\alpha^2 - \beta\gamma = o$$

che è la ellisse che abbiamo considerata.

Possiamo osservare che l'esercizio che abbiamo appunto visto si riduce a trovare il luogo geometrico dei punti d'intersezione delle due ceviane isobariche

$$(6) \quad \begin{cases} l\alpha + m\beta = o \\ m\alpha + ly = o \end{cases}$$

e risulta che il luogo geometrico di questo punto è l'ellisse:

$$\alpha^2 - \beta y = o.$$

Dalle formule che abbiamo ottenute sostituendo ad un punto il suo simmetrico rispetto al punto medio di un lato, si deduce il modo di generazione dell'ellisse di STEINER circoscritta, mediante ceviane. Poi, se nelle espressioni (6) poniamo invece di α, β, γ rispettivamente: $-\alpha$, $\alpha + \gamma$ ed $\alpha + \beta$, risulta che le ceviane che hanno per equazioni:

$$(m - l)\,\alpha + m\gamma = o$$
$$(l - m)\,\alpha + l\beta = o$$

s'intersecano sull'ellisse di STEINER circoscritta, e le coordinate del punto d'intersezione sono:

$$\frac{\alpha}{-ml} = \frac{\beta}{m(l-m)} = \frac{\gamma}{l(m-l)}$$

ottenendo quindi delle espressioni parametriche di detta ellisse che danno varî dei suoi punti, col far variare arbitrariamente i parametri l ed m.