Juan J. DURAN-LORIGA

Commandant d'Artillerie, à la Corogne (Espagne)

SUR DES

CERCLES REMARQUABLES DU TRIANGLE

Extrait des Comptes rendus de

l'*Association Française pour l'avancement des Sciences.*

Congrès de Nantes, 1898.

PARIS

SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION

Hôtel des Sociétés savantes

28, RUE SERPENTE, 28

ASSOCIATION FRANÇAISE
Pour l'Avancement des Sciences
Fusionnée avec
L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE
(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE NANTES — 1898

M. Juan J. DURAN-LORIGA
Commandant d'artillerie, à la Corogne

SUR DES CERCLES REMARQUABLES DU TRIANGLE [K 2 d]

— *Séance du 10 août* —

Introduction

Le présent travail que nous avons l'honneur de présenter au Congrès de Nantes, et dont nous avons donné un petit résumé dans le numéro de mai de Mathesis, est en partie une continuation de notre mémoire de Saint-Etienne. La considération des *Cercles associés* nous a permis de mettre en lumière le rôle important du centre de gravité dans sa relation avec les différents cercles remarquables du triangle. D'autre part, l'assimilation des points à des cercles de rayon nul permet d'obtenir des cercles et des droites nouvelles et dont la combinaison fera, nous l'espérons, ressortir le lien qui réunit des propriétés jusqu'alors isolées en apparence.

Le temps nous fait défaut pour faire connaître diverses autres propriétés que nous publierons dans un prochain travail.

Notations

α, β, γ	coordonnées barycentriques
$\rho_a\ \rho_b\ \rho_c$	» tripolaires
(C)	cercle de centre C
p_a	puissance de A par rapport à un cercle

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma \qquad a + b + c = 2p$$

Pour les points et cercles remarquables, les notations usuelles.

Abréviations

$$a^2+b^2+c^2=m^2,\quad a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=n^4,\quad a^4+b^4+c^4=q^4$$

Sur des cercles associés et semi-associés

1. Soient α, β, γ les coordonnées barycentriques d'un point par rapport au triangle de référence A B C. Si p_a, p_b, p_c désignent les puissances des points A, B, C par rapport à un cercle ε, l'équation de ε dans la forme donnée par M. de Longchamps est

$$\sigma(p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0 \tag{1}$$

Considérons les cercles ε' et ε'' dont les puissances par rapport aux sommets A, B, C sont respectivement p_b, p_c, p_a et p_c, p_a, p_b ; ils ont pour équations

$$\sigma(p_b\alpha+p_c\beta+p_a\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0 \tag{2}$$

$$\sigma(p_c\alpha+p_a\beta+p_b\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0 \tag{3}$$

Nous dirons que ε' est le *premier associé* et ε'' le *second associé* de ε. Les axes radicaux du cercle circonscrit au triangle A B C combinés successivement avec ε, ε', ε'' sont les droites conjuguées isobariques

$$p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma=0,\quad p_b\alpha+p_c\beta+p_a\gamma=0,\quad p_c\alpha+p_a\beta+p_b\gamma=0$$

Les axes radicaux des cercles ε, ε', ε'' combinés deux à deux sont les trois droites conjuguées isobariques

$$(p_a-p_b)\alpha+(p_b-p_c)\beta+(p_c-p_a)\gamma=0$$
$$(p_b-p_c)\alpha+(p_c-p_a)\beta+(p_a-p_b)\gamma=0$$
$$(p_c-p_a)\alpha+(p_a-p_b)\beta+(p_b-p_c)\gamma=0$$

On en conclut que le centre radical des cercles ε, ε', ε'' est le centre de gravité G de A B C. Si l'un de ces cercles passe par G les deux autres passent également par ce point.

Le point G a donc un rôle remarquable (que je crois n'a été encore mis en lumière) dans sa relation avec les différents cercles du triangle.

L'équation du cercle orthotomique de ε, ε', ε'' est

$$\sigma\,.\,\varepsilon\,\frac{b^2+c^2-(p_a+p_b+p^c)}{3}\,\alpha-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

et son rayon a pour expression

$$\delta = \frac{1}{3}\sqrt{3(p_a + p_b + p_c) - m^2}$$

REMARQUES : De l'expression de δ on déduit que la distance d'un point quelconque au centre de gravité est donnée pour l'égalité

$$\delta = \frac{1}{3}\sqrt{3(\rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2) - m^2}$$

On déduit aussi que si on a pour divers cercles

$$p_a + p_b + p_c = \text{constante}$$

tous ces cercles et ses associés ont le même cercle orthotomique.

Pour la construction géométrique des cercles associés à un cercle ε on peut observer que son centre π_1 (nous considérons par exemple le premier associé), est le centre radical des cercles qu'ont A, B, C pour centres et $\sqrt{p_b} = \mathrm{B}\,t'$, $\sqrt{p_c} = \mathrm{C}\,t''$, $\sqrt{p_a} = \mathrm{A}\,t$ pour rayons ; $\mathrm{B}\,t'$, $\mathrm{C}\,t''$, $\mathrm{A}\,t$ étant les tangentes tracées de B, C, A au cercle ε. D'autre part le cercle ε' est orthotomique aux cercles (A), (B), (C).

Observons que la construction est valable quoique les paramètres p_a, p_b, p_c soient négatives, les cercles (A), (B), (C) sont imaginaires mais on peut trouver son centre radical.

On fera une construction analogue pour le second associé et les cercles *semi-associés* (voyez les pages suivantes) et de même pour les associés et semi-associés à un point remarquable regardé comme cercle de rayon nul.

2. Examinons quelques cas particuliers :

1° Le cercle circonscrit à A B C (ou en général, tout cercle concentrique avec le circonscrit) coincide avec ses associés.

2° Le cercle de Brocard et ses associés ont pour équations

$$\frac{\sigma}{m^2} \cdot \Sigma b^2 c^2 \alpha - \Sigma a^2 \beta \gamma = 0$$

$$\frac{\sigma}{m^2} \cdot \Sigma a^2 c^2 \alpha - \Sigma a^2 \beta \gamma = 0$$

$$\frac{\sigma}{m^2} \cdot \Sigma a^2 b^2 \alpha - \Sigma a^2 \beta \gamma = 0$$

Les axes radicaux des couples $(\varepsilon', \varepsilon'')$, $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varepsilon, \varepsilon'')$ sont respectivement les droites joignant le centre de gravité G au réciproque du point de Lemoine, au point direct et au point rétrograde de Brocard.

Le cercle orthotomique a pour équation

$$\frac{\sigma}{3m^2}\cdot\varepsilon\Big(b^2(b^2+c^2)+c^4\Big)\alpha-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

et son rayon est

$$\delta=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n^4-q^4}{m^2}}$$

3° Le premier cercle de M'cay et ses associés ont pour équations

$$\frac{\sigma}{3}\Big[(b^2+c^2-a^2)\,\alpha+a^2(\beta+\gamma)\Big]-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

$$\frac{\sigma}{3}\Big[(b^2+c^2-a^2)\,\gamma+a^2(\alpha+\beta)\Big]-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

$$\frac{\sigma}{3}\Big[(b^2+c^2-a^2)\,\beta+a^2(\alpha+\gamma)\Big]-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

Les axes radicaux de $(\varepsilon', \varepsilon'')$, $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varepsilon, \varepsilon'')$ sont respectivement les médianes AG, BG, CG. Tout se passe d'une façon analogue pour les autres cercles de M'cay.

Rayon du cercle orthotomique $\delta = 0$.

Nous avons par suite neuf cercles qui passent par G.

4° Cercles de Neuberg.

Les axes radicaux sont les médianes du triangle, le cercle orthotomique a pour équation

$$\frac{\sigma}{3}\cdot\varepsilon(b^2+c^2-2a^2)\,\alpha-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

et son rayon

$$\delta=\frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon a^2-(b^2+c^2)}$$

L'axe radical du cercle orthotomique et du cercle circonscrit passe par G, il est la transversale réciproque de l'axe d'homologie de ABC avec le second triangle de Brocard.

5° Cercle conjugué à ABC.

Les axes radicaux sont la polaire trilinéaire du point de Steiner et ses isobariques ; l'équation du cercle orthotomique est

$$\frac{\sigma}{6} \cdot \varepsilon (b^2 + c^2 - a^2)\alpha - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

et son rayon

$$\delta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2} m^2}$$

l'axe radical du cercle orthotomique avec le cercle circonscrit est la polaire trilinéaire de l'orthocentre.

6° Les associés du cercle des neuf points de ABC ont pour axe radical la droite KG ; le rayon du cercle orthotomique est

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{-m^2}$$

7° Cercle de Longchamps.

Les axes radicaux sont les mêmes que nous avons trouvés pour le cercle conjugué. — Le rayon du cercle orthotomique est double de l'analogue du cercle conjugué. — Le cercle anti-radical du cercle orthotomique avec le cercle circonscrit passe par G. Le cercle de Longchamps, le cercle orthotomique et le cercle circonscrit font partie du faisceau qu'a pour axe radical la droite de Longchamps.

L'équation du cercle orthotomique est

$$\frac{\sigma}{3}(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) + \varepsilon a^2 \beta\gamma = 0$$

8° Cercles de Tucker.

On peut écrire l'équation des cercles de Tucker sous la forme (voyez notre Mémoire de Saint-Étienne).

$$\frac{\sigma}{m^4} \cdot \varepsilon b^2 c^2 (b^2 + c^2 + a^2 \mathrm{K})(1 - \mathrm{K})\alpha - \varepsilon a^2 \beta \gamma = 0$$

Les axes radicaux des couples $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varepsilon', \varepsilon'')$ $(\varepsilon, \varepsilon'')$ sont respectivement les droites joignant le centre de gravité au point direct, au point réciproque et au point rétrograde de Brocard.

Les premier et deuxième cercles de Lemoine et le cercle de Taylor sont des cas particuliers des cercles de Tucker, ils correspondent respectivement à $\mathrm{K} = 0$, $\mathrm{K} = -1$ « $\mathrm{K} = 1 - \frac{m^2}{4\mathrm{R}}$, donc etc., etc...

Remarque. — On peut observer que les cercles associés à des cercles passant par un même point ne passent en général par un même point, mais dans un cas particulier, on peut énoncer la proposition suivante :

Soient M et M' un point et son premier (ou second) isobarique, situés sur une circonférence quelconque concentrique avec la circonférence circonscrite. On peut dire que si divers cercles passent par M ses premiers (ou seconds) associés passent par M'.

Pour trouver des points remplissant les conditions du théorème, on peut recourir à la formule

$$\alpha = \frac{(c^2-a^2)\beta\gamma}{(b^2-a^2)\gamma+(c^2-b^2)\beta}$$

dans laquelle on donne à β et γ valeurs arbitraires et on trouve la valeur de α. De cette manière nous obtenons par exemple les points :

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma}{1} \qquad \text{(centre de gravité)}$$

$$\alpha b^2 = \beta c^2 = \gamma a^2 \quad \Big\}$$ Premier isobarique du centre d'homologie de ABC avec le premier triangle de Brocard.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{c-a} &= \frac{\beta}{b-a} = \frac{\gamma}{b+c} \\ \frac{\alpha}{a-c} &= \frac{\beta}{a+b} = \frac{\gamma}{b-c} \end{aligned}\right\}$$ Points dérivés des points algébriquement associés au centre du cercle inscrit, au moyen de transformations isobariques et complémentaires.

On trouve aussi les points

$$\frac{\alpha}{c^2-a^2}=\frac{\beta}{2(b^2-a^2)}=\frac{\gamma}{2(c^2-b^2)},$$

$$\frac{\alpha}{b^2c^2(a^2-c^2)}=\frac{\beta}{b^2(a^2c^2-b^4)}=\frac{\gamma}{c^2(b^4-a^2c^2)}$$

D'autre part les sommets A, B, C du triangle fondamental remplissent évidemment les conditions du théorème.

3. On peut considérer les cercles associés d'un point remarquable M regardé comme cercle de rayon nul (voyez notre Mémoire de Saint-Étienne). Si l'on désigne par α_1, β_1, γ_1 les coordonnées du centre, les équations du point M et des cercles associés sont

$$\sigma\left(\rho_a^2\alpha+\rho_b^2\beta+\rho_c^2\gamma\right)-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

$$\sigma\left(\rho_b^2\alpha+\rho_c^2\beta+\rho_a^2\gamma\right)-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

dans lesquelles $$\sigma\left(\rho_c^2\alpha+\rho_a^2\beta+\rho_b^2\gamma\right)-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

$$\rho_a^2=\frac{(\beta_1+\gamma_1)(c^2\beta_1+b^2\gamma_1)-a^2\beta_1\gamma_1}{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)^2}\ldots\quad \rho_b^2=\ldots\quad \rho_c^2=\ldots$$

Passons à quelques cas particuliers :

1° Centre de gravité.

L'équation de G considéré comme point-cercle est

$$\frac{\sigma}{9}\cdot\Sigma(2b^2+2c^2-a^2)\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

les cercles associés ont pour axe radical la droite G K.

2° L'équation du point de Lemoine est

$$\frac{\sigma}{m^4}\cdot\Sigma b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

les cercles associés ont pour axe radical la droite joignant G au réciproque de K et les axes radicaux de ces cercles combinés avec le point K passent l'un par le point direct de Brocard, l'autre par le point rétrograde de Brocard.

3° Le point direct de Brocard a pour équation

$$\frac{\sigma}{n^4}\cdot\Sigma b^4c^2\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

Les cercles associés ont pour axe radical la droite

$$a^2(c^4-a^2b^2)\alpha+b^2(a^4-b^2c^2)\beta+c^2(b^4-a^2c^2)\gamma=0$$

on passe de cette droite à la droite de Brocard, en prenant : 1° la réciproque ; 2° l'inverse ; 3° une isobarique.

4° Le centre du cercle inscrit à A B C a pour équation

$$\frac{\sigma}{p}\Sigma bc(p-a)\alpha-\Sigma a^2\beta\gamma=0$$

L'axe radical de ses associés passe par le réciproque de I, celui de I combiné avec les cercles associés passe respectivement par le point direct et le point inverse de Jérabek.

5° Point réciproque de l'orthocentre.

Axes radicaux, la droite K H_0 G et ses deux isobariques.

4. Si, dans l'équation du cercle ε on intervertit deux des paramètres p_a, p_b, p_c on obtient trois nouveaux cercles ε_1, ε_2, ε_3 représentés par :

$$\sigma(p_a\alpha + p_c\beta + p_b\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

$$\sigma(p_c\alpha + p_b\beta + p_a\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

$$\sigma(p_b\alpha + p_a\beta + p_c\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

nous les appelons les *semi-associés* de ε.

Les propriétés suivantes se démontrent facilement.

Les trois cercles semi-associés ont pour centre radical le centre de gravité G ; les axes radicaux d'un cercle ε par rapport à ses semi-associés sont les médianes de ABC ; les axes radicaux des cercles semi-associés sont les droites semi-réciproques des axes radicaux d'un cercle par rapport à ses associés ; un cercle quelconque, ses associés et ses semi-associés ont même cercle orthotomique.

Sur les cercles dérivés et semi-dérivés

5. Si dans l'équation d'un cercle ε

$$\sigma(p_a\alpha + p_b\beta + p_c\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

on change le signe des paramètres p_a p_b p_c, on obtient un nouveau cercle σ qui est le cercle anti-radical (sur les cercles anti-radicaux voyez *Journal de M. de Longchamps 1897*) de ε par rapport au cercle circonscrit ; nous l'appelons le cercle *dérivé* de ε ; ainsi, par exemple, le cercle dérivé de celui de Longchamps a pour centre l'orthocentre de ABC et son rayon est 2R, c'est-à-dire il est circonscrit au triangle anticomplémentaire du triangle fondamental. On peut de même considérer des cercles dérivés d'un point remarquable du triangle ; ainsi le cercle dérivé du point de Lemoine a pour équation

$$\frac{\sigma}{m^4} \cdot \varepsilon b^2c^2(3a^2 - 2m^2)\alpha - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

Le cercle dérivé d'un point M est toujours réel, son rayon est donné par la formule

$$\delta = \sqrt{2(R^2 + d^2)} \qquad (d = MO)$$

et son centre est le point symétrique de M par rapport à O

6. Si dans l'équation d'un cercle ε

$$\sigma(p_a\alpha + p_b\beta + p_c\gamma) - \varepsilon a^2\beta\gamma = 0$$

on change le signe d'un des paramètres on obtient les cercles σ_1, σ_2, σ_3 représentés par

$$\sigma(-p_a\alpha+p_b\beta+p_c\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

$$\sigma(p_a\alpha-p_b\beta+p_c\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

$$\sigma(p_a\alpha+p_b\beta-p_c\gamma)-\varepsilon a^2\beta\gamma=0$$

et nous dirons que σ_1 est le *premier semi-dérivé*, σ_2 le second et σ_3 le troisième de ε

Les axes radicaux des couples (ε, σ_1), (ε, σ_2), (ε, σ_3) sont les côtés du triangle, et par suite les centres radicaux des triples $(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_2)$, $(\varepsilon, \sigma_1, \sigma_3)$ etc., sont les sommets.

Les axes radicaux des couples (σ_1, σ_2), (σ_1, σ_3), (σ_2, σ_3) sont respectivement les transversales angulaires

$$p_a\alpha-p_b\beta=0 \quad , \quad p_a\alpha-p_c\gamma=0 \quad , \quad p_b\beta-p_c\gamma=0$$

et le centre radical a pour coordonnées

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{p_a}}=\frac{\beta}{\frac{1}{p_b}}=\frac{\gamma}{\frac{1}{p_c}}$$

Ainsi, les cercles semi-dérivés du cercle de Longchamps ont pour centre radical le point réciproque du point de Lemoine.

Les semi-dérivés du cercle polaire conjugué ont pour centre radical l'orthocentre. Pour le cercle de Brocard on trouve le point de Lemoine etc., etc... De même pour les points remarquables. Ainsi par exemple le centre radical des cercles semi-dérivés du point rétrograde de Brocard est le factorien de ce point et le point de Lemoine, etc., etc.

Les cercles semi-dérivés d'un cercle quelconque concentrique avec le cercle circonscrit ont pour centre radical le centre de gravité du triangle.

7. La considération des cercles dérivés donne lieu à quelques exercices, nous citerons par exemple les suivantes :

1° Soit ε un cercle quelconque du triangle A B C; A t, B t', C t'' les tangentes tracées de A, B, C au cercle ε; α A, α B, α C les droites joignant le point α symétrique du centre de ε par rapport à O aux sommets du triangle de référence, enfin P Q, R S, T U, les perpendiculaires aux extrémités des droites α A, α B, α C.

Si nous prenons en sens contraire A P = A Q = A t, B R = B S = B t' C T = C U = C t'', les points P, Q, R, S, T, U sont concycliques.

On peut remplacer le cercle ε par un point remarquable quelconque et en déduire un théorème analogue.

2° En particulier, soit (I) la circonférence inscrite au triangle A, B, C, p, q, r les points de tangence avec B C, A C, A B, faisons la construction antérieure et prenons A P = A Q = A r, B R = B S = B p, C T = C U = C q, les points P, Q, R, S, T, U sont concycliques.

3° Soient P, Q, R, les milieux du côté B C, A C, A B du triangle, H l'orthocentre ; prenons sur ceux côtés en sens contraire $PH_1 = PH_2 = PH$, $QH_3 = QH_4 = QH$, $RH_5 = RH_6 = RH$. Les points H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, sont concycliques.

4° Soit P, Q, R le triangle polaire d'un point M, O_1 le centre du cercle circonscrit à P Q R, M_1 le point symétrique de M par rapport à O_1 ; prenons sur B C, A C, A B en sens contraire $PP_1 = PQ_1 = PM_1$, $QP_2 = QQ_2 = QM_1$, $RP_3 = RQ_1 = RM_1$; les points P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3 sont concycliques.

Nantes — Emile Grimaud, imprimeur breveté, place du Commerce, 4.

ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Extrait des Statuts et Règlement

STATUTS

ART. 4. — Les membres de l'Association sont admis, sur leur demande, par le Conseil.

ART. 5. — Sont membres de l'Association les personnes qui versent la cotisation annuelle. Cette cotisation peut toujours être rachetée par une somme versée une fois pour toutes. Le taux de la cotisation et celui du rachat sont fixés par le Règlement.

ART. 6. — Sont membres fondateurs les personnes qui ont versé, à une époque quelconque, une ou plusieurs souscriptions de 500 francs.

ART. 7. — Tous les membres jouissent des mêmes droits. Toutefois, les noms des membres fondateurs figurent perpétuellement en tête des listes alphabétiques, et ces membres reçoivent gratuitement, pendant toute leur vie, autant d'exemplaires des publications de l'Association qu'ils ont versé de fois la souscription de 500 francs.

RÈGLEMENT

ARTICLE PREMIER. — Le taux de la cotisation annuelle des membres non fondateurs est fixé à 20 francs.

ART. 2. — Tout membre a le droit de racheter ses cotisations à venir en versant, une fois pour toutes, la somme de 200 francs. Il devient ainsi membre à vie.

Il sera loisible de racheter les cotisations par deux versements annuels consécutifs de 100 francs.

Les membres ayant payé pendant 20 années consécutives la cotisation annuelle de 20 francs pourront racheter les cotisations à venir moyennant un seul versement de 100 francs.

Tout membre qui pendant 10 années consécutives aura versé annuellement une somme de 10 francs en sus de la cotisation annuelle sera libéré de tout versement ultérieur.

La liste alphabétique des membres à vie est publiée en tête de chaque volume, immédiatement après la liste des membres fondateurs.

Les membres ayant racheté leurs cotisations pourront devenir membres fondateurs en versant une somme complémentaire de 300 francs.

Les souscriptions des membres fondateurs peuvent être versées en une seule fois ou en deux versements annuels consécutifs de 250 francs.

Les souscriptions sont reçues :
AU SECRÉTARIAT, 28, rue Serpente, à Paris.

Nantes. — Emile Grimaud, imprimeur breveté, place du Commerce, 4.