JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE

M. G. DE LONGCHAMPS
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

PUBLICATION FONDEE EN 1877 PAR M. BOURGET

Extrait du N°

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

SECONDE NOTE

SUR LES

CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

PAR

Juan J. DURAN-LORIGA

COMMANDANT D'ARTILLERIE A LA COROGNE

EXTRAIT DU *JOURNAL DE MATHÉMAMIQUES ÉLÉMENTAIRES*

(1897)

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

SECONDE NOTE

SUR LES

CERCLES RADICAUX ET ANTI-RADICAUX

Dans l'article précédent (*), nous avons considéré la circonférence radicale comme le lieu géométrique des points tels que leurs puissances par rapport à deux cercles fixes (O) et (O') soient égales et de signes contraires; nous avons vu que le susdit cercle a pour centre le milieu du segment qui joint les centres des circonférences en question, et que son rayon ρ était donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}.$$

On comprend bien la possibilité de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire, étant données deux circonférences (O) et (ρ), trouver une autre circonférence qui, jointe à (O), ait pour circonférence radicale (ρ) que nous appelons *circonférence anti-radicale de* (O) *par rapport à* (ρ); mais avant d'entrer dans cette investigation, nous amplifierons un peu ce que nous avons dit par rapport aux circonférences radicales dans l'étude précitée.

Il faut remarquer, d'abord, que les deux circonférences données et la circonférence radicale faisant partie d'un faisceau de cercles, étant posé que les trois circonférences appartiennent à un sys-

(*) Voyez J. E. 1896, p. 78.

tème coaxial, elles auront les propriétés de ces systèmes et l'on pourrait faire dériver leur étude de la géométrie projective, bien que nous ayions voulu la présenter sous une forme plus élémentaire.

La considération de circonférences radicales nous permet la discussion des rapports des coefficients pour que deux circonférences soient orthogonales, prenant comme fondement, que si deux cercles sont orthogonaux, la circonférence radicale passe par leurs centres et *réciproquement*. On vérifiera donc dans le cas d'orthogonalité cette condition nécessaire et suffisante, que les coordonnées du centre d'un des cercles vérifient l'équation du cercle radical.

Soient les équations des cercles orthogonaux

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0;$$

le cercle radical a pour équation

$$2(x^2 + y^2) + 2(A + A')x + 2(B + B')y + C + C' = 0,$$

les coordonnées du centre d'un des cercles, (par exemple, du premier) sont : — A et — B, et par suite on a

$$2(A^2 + B^2) - 2(A + A')A - 2(B + B')B + C + C' = 0,$$

qui se réduit à la relation connue

$$2(AA' + BB') = C + C'.$$

Lorsque les équations des cercles sont écrites en coordonnées barycentriques, ce procédé permettra facilement de rechercher si deux cercles sont orthogonaux, surtout quand on connait *a priori* les coordonnées du centre d'un des susdits cercles. Proposons-nous par exemple, de démontrer que le cercle de Longchamps (voyez J. S., 1886, p. 57) est orthogonal par rapport aux cercles potentiels. Nous appelons *cercles potentiels* ceux qui sont décrits des milieux des côtés comme centres avec des rayons égaux aux médianes correspondantes (voyez P. M. vol. v, p. 70), nous avons en effet :

Équation du cercle de Longchamps

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma)-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0.$$

Équation du cercle potentiel (P_a)

$$-p_a(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma)-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0.$$

Équation du cercle radical

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma-p_a\beta-p_a\gamma)-2(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta)=0.$$

Nous avons appelé p_a la quantité

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Comme le centre de (P_a) est le milieu du côté a, ses coordonnées barycentriques sont représentées par $\alpha=0$ et $\beta=\gamma$, et par conséquent

$$2\beta(b^2\beta+c^2\beta-2p_a\beta)-2a^2\beta^2=0, \text{ etc., etc.}$$

Si l'une des circonférences se réduit à un cercle-point, la circonférence radicale aura pour rayon

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$$

et lorsque les deux cercles restent réduits à des cercles-points, la circonférence radicale sera toujours imaginaire et aura pour rayon

$$\rho=\frac{d}{2}\sqrt{-1}.$$

Il faut observer que l'on peut généraliser la notion de cercle radical lorsque le rapport des puissances a une valeur $\frac{m}{n}$.

Tous les cercles ainsi obtenus font partie d'un faisceau de cercles ayant beaucoup de propriétés communes.

Le théorème classique : *si l'on a trois cercles et qu'on les combine deux à deux, l'axe radical des circonférences radicales de deux groupes l'est du troisième*, sera également évident quoique la notion de cercle radical soit généralisée et par conséquent :

Si l'on a trois circonférences et que l'on trace les radicales de deux groupes, quel que soit le rapport des puissances, tous ces cercles font partie du même faisceau.

Nous dirons finalement, que l'on peut étendre la notion de cercle radical aux sphères et aux cercles tracés sur une surface sphérique.

II

Passons à l'étude de ce que nous avons appelé précédemment *cercles anti-radicaux*.

Etant données une circonférence (O) et la radicale (ρ), on peut déterminer (O') circonférence anti-radicale de (O) par rapport à (ρ). En prenant une distance $\rho O' = O\rho$, on obtiendra son centre O'; pour calculer son rayon, il faut déterminer R' d'après la formule qui donne la valeur de ρ; on a donc

$$R' = \sqrt{2(\rho^2 + d^2) - R^2};$$

si nous appelons d la distance $O\rho$.

Pour que la circonférence (O') soit réelle, on doit avoir

$$d > \sqrt{\frac{R^2 - 2\rho^2}{2}}.$$

En supposant

$$2(\rho^2 + d^2) - R^2 = 0,$$

la circonférence anti-radicale se réduit à un *cercle point*.

Etant données les équations de deux circonférences (C) et (C')

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0,$$

la circonférence anti-radicale de (C) par rapport à (C') est représentée par :

$$x^2 + y^2 + 2(2A' - A)x + 2(2B' - B)y + 2C' - C = 0.$$

Quand il s'agit de coordonnées barycentriques, on a

$$(c)\ (\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$
$$(c')\ (\alpha + \beta + \gamma)(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

et, pour la circonférence anti-radicale de (C), par rapport à (C'),

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left[(2u'-u)\alpha+(2v'-v)\beta+(2w'-w)\gamma\right]-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0.$$

Lorsqu'une des circonférences dégénère en *cercle point*, le rayon de la circonférence anti-radicale de (O) par rapport à un point ρ a pour valeur

$$R' = \sqrt{2d^2 - R^2},$$

d étant la distance $O\rho$; son centre, sur $O\rho$, est à une distance $OO' = 2O\rho$.

La circonférence anti-radicale sera réelle, réduite à un point, ou imaginaire, selon qu'on supposera

$$2d \gtreqless R\sqrt{2}.$$

Si l'équation de la circonférence est :

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

a et b étant les coordonnées du point ρ, on aura pour équation de la circonférence anti-radicale de (O) par rapport à ρ,

$$x^2 + y^2 - 2(2a + A)x - 2(2b + B)y + 2(a^2 + b^2) - C = 0.$$

Lorsque la circonférence a son centre à l'origine et que le point ρ est sur l'axe des x, à une distance d, l'équation est :

$$x^2 + y^2 - 4dx + 2d^2 + R^2 = 0.$$

De l'expression donnant la valeur du rayon R′ de la circonférence anti-radicale, nous déduisons :

$$2(R^2 + R'^2) = \overline{OO'}^2.$$

Il en résule, que les points de contact des tangentes communes à une circonférence et son anti-radicale par rapport à un point sont, quatre à quatre, sur deux droites qui coupent la ligne OO′ en un même point dont la distance à O est égale à $\frac{R^2}{d}$. Ainsi, ce point est le pied de la polaire de ρ par rapport à (O). De plus, ces droites sont inclinées de 45° sur la ligne de centres et les tangentes menées d'un point quelconque de ces droites aux circonférences (O) et (O′) sont en relation harmonique.

Enfin, si la circonférence (O) reste fixe et que le point C se meuve sur la ligne OO′, l'enveloppe des cercles anti-radicaux est l'hyperbole équilatère correspondant à l'équation

$$x^2 - y^2 = R^2.$$

Il est évident que toutes les circonférences qui passent par les points H et K où l'anti-radicale (O') coupe la ligne de centres, sont aussi anti-radicales de (O) par rapport au point ρ, mais nous appelons particulièrement anti-radicale celle qui a son centre sur $O\rho$.

Si nous cherchons les circonférences radicales du faisceau que l'on obtiendrait, et de la circonférence donnée, elles passeront par le point ρ, d'où il suit que l'on aura les susdites lignes en joignant un point quelconque du diamètre perpendiculaire à HK avec le centre O ; puis, en prenant comme centre le milieu I de cette droite et pour rayon la distance $I\rho$.

Si la circonférence (O) dégénère aussi en un *cercle point*, nous aurons à trouver la circonférence anti-radicale d'un point O par rapport à un autre point ρ ; il est facile de voir, qu'il suffira, pour l'obtenir, de prolonger $O\rho$ d'une longueur $\rho O' = O\rho$. On a ainsi le centre O' ; le rayon R' aura pour valeur $d\sqrt{2}$; il en résulte, par conséquent, que la circonférence anti-radicale d'un point par rapport à un autre point est toujours réelle et que ces deux points sont inverses par rapport à la circonférence.

Si le point O reste fixe et que l'autre se meuve sur la ligne $O\rho$, l'hyperbole équilatère H, enveloppe des cercles anti-radicaux, que nous considérons dans le cas où nous associons une circonférence et un point, dégénère dans ce cas en deux droites qui ont pour équation

$$y = \pm x ;$$

ce sont les asymptotes de l'hyperbole H.

Puisque deux points et la circonférence anti-radicale sont tels que les susdits points sont *les points limites*, nous pourrions citer plusieurs propriétés correspondantes ; nous nous bornerons à énoncer la suivante, que nous aurons à utiliser dans la suite.

Si l'on joint un point quelconque A, du plan, aux deux points O et ρ et que, sur les extrémités de AO et $A\rho$, on élève des perpendiculaires, ces droites et la polaire de A par rapport à la circonférence anti-radicale correspondant aux points O, ρ, sont concourantes.

Si l'on veut trouver le lieu géométrique des points d'intersection de ces droites, lorsque A décrit une certaine ligne, il faudra avoir recours aux formules suivantes, bien faciles à obtenir,

$$x = d - X, \quad y = \frac{X(X-d)}{Y};$$

en appelant d la distance Oρ, et en prenant pour axes cartésiens la droite Oρ et la perpendiculaire en O. Ces formules font voir que si le point A décrit une droite passant par O, le point correspondant décrit une autre droite, perpendiculaire, en O, à la première. Lorsque le point A décrit une droite parallèle à l'axe des y, le point correspondant décrit une autre parallèle.

Si le point décrit une parallèle à l'axe des x, l'autre point décrit une parabole. Tout cercle qui passe par Oρ se correspond à lui-même. A la parabole ayant pour équation $x^2 = 2py$, correspond une hyperbole, etc...

Etant donnée une circonférence (O′), sur un de ses diamètres, il n'y a que deux points O et ρ (ou les symétriques par rapport à O′), tels que le cercle anti-radical de O par rapport à ρ soit (O′). Nous pourrions nommer ces points, ainsi liés à chaque circonférence du plan, *points radicalement associés à la susdite circonférence*. Si l'on ne fixe pas le diamètre, dans ce cas les lieux géométriques de O et ρ sont deux circonférences concentriques à la proposée ; le rayon de l'une est double de celui de l'autre et celui de (O′) est, par rapport à ceux-ci, la moyenne proportionnelle. Nous pourrions donner aussi à ces cercles la dénomination de *cercles radicalement associés à* (O′). D'ailleurs, et en vertu de ce que nous venons de dire, on peut déduire la proposition suivante.

On considère une circonférence de centre O *et ses deux circonférences radicalement associées, et l'on trace un rayon quelconque* oabc (a, b et c sont les points où il coupe successivement les trois circonférences). *Si nous joignons un point quelconque* A *du plan aux points* a *et* c *et que nous élevions des perpendiculaires, en ces points, aux droites obtenues, les perpendiculaires et la polaire de* A *par rapport au cercle donné sont concourantes.*

Si l'on prend en particulier le point A sur la circonférence donnée (O) il en résulte cette autre proposition.

Les perpendiculaires aux extrémités des droites qui joignent un point A d'une circonférence aux extrémités d'un même rayon des circonférences radicalement associées se coupent sur la tangente en A à la circonférence primitive; par conséquent, cette tangente est le lieu géométrique des intersections de toutes les perpendiculaires relatives au point A.

Si les coordonnées de deux points A et A' sont respectivement a et b, a' et b' l'équation de la circonférence anti-radicale de A par rapport à A' est :

$$x^2 + y^2 + 2(a - 2a')x + 2(b - 2b')y + 2(a'^2 + b'^2) - (a^2 + b^2) = 0.$$

La considération des circonférences radicales et anti-radicales dans la géométrie de triangle, appliquée à des circonférences effectives ou évanouissantes, nous conduirait à des faits bien intéressants, comme nous l'avons observé précédemment dans l'article cité.

Nous nous bornerons à étudier, comme application très simple les circonférences anti-radicales d'un sommet d'un triangle par rapport à un autre.

Soit ABC le triangle proposé et supposons son périmètre parcouru dans un certain sens, par exemple, dans l'ordre alphabétique, nous trouverons la circonférence anti-radicale de A par rapport à B, de B par rapport à C, et de C par rapport à A ; nous les désignerons, respectivement, par

$$(C_1), (A_1) \quad \text{et} \quad (B_1).$$

Nous obtiendrons les centres des circonférences, en prolongeant les côtés (dans le sens que l'on considère) d'une longueur égale à eux-mêmes; quant aux rayons, ils auront pour valeurs, $c\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$.

Cherchons l'équation du cercle (A_1).

Nous savons que dans la forme indiquée par M. de Longchamps (J. S. 1886, p. 57) l'équation de tout cercle est

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

u, v et w, étant les puissances des sommets du triangle par rapport au cercle que l'on considère.

Dans le cas où nous sommes placé l'on a :

$$u = 2b^2 - c^2, \quad v = 2a^2, \quad w = -a^2;$$

l'équation du cercle (A_1) est donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left[(2b^2 - c^2)\alpha + 2a^2\beta - a^2\gamma\right] - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

D'une manière analogue, ou par permutation circulaire, l'on obtiendra celles de (B_1) et (C_1).

Si l'on veut avoir le centre radical de (A_1), (B_1) et (C_1) on écrira

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 p_a : b^2 p_b : c^2 p_c.$$

Il coïncide donc avec le centre du cercle circonscrit.

Calculons le rayon du cercle orthotomique.

La puissance de O par rapport à (A_1) est

$$\overline{OA_1}^2 - 2a^2,$$

mais comme

$$\overline{OA_1}^2 = R^2 + 2a^2,$$

il en résulte que le cercle orthotomique a pour rayon R, et coïncide avec le cercle circonscrit.

On devait prévoir ce résultat en observant que les sommets étant les points limités du faisceau auquel appartiennent les cercles anti-radicaux, la circonférence, passant à la fois par les trois sommets, doit être orthogonale à ces cercles ; c'est donc la circonférence orthotomique de (A_1), (B_1), (C_1).

Les polaires du centre du cercle circonscrit par rapport aux cercles que nous étudions, passent par les sommets du triangle tangentiel (*) car les perpendiculaires à OB, OC et OA en leurs extrémités se coupent sur les points en question.

Les polaires dont nous parlons partagent les côtes du triangle fondamental dans le rapport de 2 : 1.

La polaire du sommet A par exemple, par rapport au cercle (A_1) passe par le point A' symétrique de A par rapport au centre du cercle circonscrit, parce que les perpendiculaires en B et C aux côtés AB et AC se coupent en A'.

Les points B et C étant inverses par rapport au cercle (A_1) il en résulte, que si nous traçons, par C, une corde quelconque mn dans ce cercle, les points m, n, B et A_1 sont *concycliques*.

(*) C'est le triangle formé par les points associés au point de Lemoine.

Comme les points H et K (points où le côté BC coupe le cercle (A_1) sont conjugués harmoniques par rapport à B et C, on a :

$$\frac{HB}{HC} = \sqrt{2};$$

par conséquent, pour un point quelconque n de la circonférence (A_1) on a :

$$\overline{nB}^2 = 2\overline{nC}^2.$$

Ainsi, cette circonférence est le lieu géométrique de points I tels que le carré de IB soit le double du carré de IC.

Les polaires d'un sommet quelconque du triangle par rapport aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1) sont concourantes.

Les polaires d'un des points de Brocard, par rapport aux circonférences que nous étudions, passent par le point diamétralement opposé de la circonférence adjointe correspondante. On peut vérifier un fait analogue, si l'on considère les centres isogones et les cercles de Torricelli.

Si sur OA_1, OB_1 et OC_1, comme diamètres, on décrit des circonférences, celles-ci sont les radicales du cercle circonscrit et des cercles (A_1), (B_1) et (C_1). Ainsi on voit d'une autre manière que les axes radicaux de ces derniers passent par O. Les puissances des sommets du triangle par rapport aux cercles de Neuberg et aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1) sont égales et de signes contraires; par exemple, la puissance de C par rapport à N_a est égale, au signe près, à celle de C par rapport à (A_1), c'est, pour ce motif, que les circonférences radicales des cercles énoncés passent par les sommets du triangle fondamental.

L'équation de ces cercles radicaux, par exemple, celle du cercle qui correspond à (N_a) et (A_1) est :

$$(1)\quad (\alpha + \beta + \gamma)\left[(2b^2 - c^2)\alpha + 3a^2\beta\right] - 2a^2\beta\gamma - 2b^2\alpha\gamma - 2c^2\alpha\beta = 0.$$

Si nous voulons calculer le rayon ρ de la circonférence (1), il suffira de substituer dans la formule

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2},$$

les valeurs

$$R = a\sqrt{2}, \quad R' = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\omega - 3}, \quad d = \frac{a}{2}\sqrt{9 + \cot^2\omega},$$

on trouve ainsi

$$\rho = \frac{a}{4} \operatorname{cosec} \omega.$$

L'on pourrait obtenir aussi ce résultat en faisant observer que la droite qui joint C au centre du cercle radical est parallèle et égale à la moitié de BN_a.

Les axes radicaux des cercles de Neuberg et des cercles (A_1), (B_1) et (C_1) passent par les sommets du premier triangle de Brocard (points semi-réciproques du point de Lemoine) et coupent les côtés du triangle fondamental dans le rapport 2 : 1. Par exemple, l'axe radical de (N_a) et (A_1), passe par le sommet A_1 dont les coordonnées sont

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : c^2 : b^2.$$

Les polaires du point de Tarry par rapport aux cercles (A_1), (B_1) et (C_1), concourent au point de Steiner.

Le triangle des centres A_1 B_1 C_1 est triplement homologique avec le fondamental ; A, B, C étant les centres d'homologie et les côtés du premier étant les axes de cette homologie.

Entre les côtés du triangle A_1 B_1 C_1 on a

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2 = 7\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

c'est-à-dire que la *puissance totale* du premier triangle est sept fois celle du second.

La polaire du sommet B par rapport au cercle (A_1) est la perpendiculaire à BC au point C; les axes radicaux des mêmes éléments sont les médiatrices.

Dans le cas particulier ou dans un triangle on a

$$c^2 = 2b^2,$$

(A_1) devient le cercle d'Apollonius.

Si le périmètre est parcouru en sens contraire, il en résultera d'autres cercles (A_2), (B_2) et (C_2) ayant des propriétés analogues à ceux des (A_1), (B_1) et (C_1). De la combinaison des uns et des autres on peut déduire d'autres propriétés; par exemple, les centres radicaux de (N_a), (A_2), (A_1) ; (N_b), (B_2), (B_1) etc., sont les sommets du premier triangle de Brocard.

L'on pourrait citer plusieurs autres propriétés ; mais nous nous réservons pour un troisième article l'exposition des applications à la géométrie du triangle, en particulier, qui se déduisent facilement de la considération et des propriétés des *cercles radicaux et anti-radicaux*.

La Corogne, Août 1896.