SUR
LES CERCLES
RADICAUX

PAR

Juan J. DURAN-LORIGA
COMMANDANT D'ARTILLERIE A LA COROGNE

EXTRAIT DU *JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES*

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1896

SUR LES

CERCLES RADICAUX

On sait que le lieu géométrique des points tels que leurs puissances par rapport à deux circonférences fixes conservent un rapport donné $\frac{m}{n}$ est une circonférence. Si nous supposons $m = - n$, cette ligne sera donc le lieu des points tels que leurs puissances relatives à deux autres circonférences soient égales et de signes contraires. Par une analogie naturelle, nous la nommerons *circonférence radicale* (*) des proposées.

Il est très aisé à déterminer son centre et son rayon.

Appelons P_0 et P_0' les puissances d'un point P du plan par rapport aux circonférences O,O′. L'on aura $P_0 + P_0' = 0$. D'après cela l, l' étant les distances de P aux centres, d la distance OO′; on a

$$l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2.$$

Le centre de la circonférence en question est, par conséquent, le milieu de OO′; son rayon ρ est donné par la formule

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}. \tag{1}$$

Pour que la circonférence radicale existe, il faut que l'on ait $d < \sqrt{2(R^2 + R'^2)}$; cette condition se réalise toujours, lorsque les circonférences sont tangentes (soit extérieures, soit intérieures) sécantes ou intérieures, mais si elles sont extérieures, la circonférence radicale sera réelle ou imaginaire.

Lorsque les circonférences sont sécantes, la circonférence radicale devant évidemment passer par les points communs (points de puissance zéro), l'on pourra la décrire immédiate-

---

(*) Quelques auteurs, surtout les Anglais, appellent « cercle radical » celui qui coupe orthogonalement trois autres ; mais il nous semble préférable d'adopter la dénomination très usitée de « cercle orthotomique » et d'appeler cercle radical celui dont l'étude nous occupe.

ment. Quand elles sont tangentes extérieures, la circonférence radicale sera tangente intérieurement à celle qui a le plus grand rayon au point de tangence, et comme leur centre est dans tous les cas le milieu de la ligne des centres, son tracé est immédiat. Si l'on veut calculer son rayon on fera, dans (1), $d = R + R'$, dans la valeur de ρ, et il en résulte, par conséquent

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(R - R').$$

Quand les circonférences données sont tangentes intérieurement, la circonférence radicale est tangente à celles-ci au point commun et son rayon est

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(R + R').$$

Si les circonférences données sont concentriques, la circonférence radicale est concentrique à celles-ci et l'on obtiendra son rayon faisant $d = 0$, dans la formule (1); on a donc

$$\rho_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}.$$

Pour le tracé graphique de la circonférence radicale relative à deux circonférences extérieures (quand elle existe) ou de deux circonférences intérieures, on le détermine par les considérations que nous allons exposer.

Considérons trois circonférences O, O′ et O″, appelons $\Pi_{00'}$ la circonférence radicale de O et O′; $\Pi_{00''}$ celle de O et O″; si ces circonférences se coupent, l'on aura pour les points d'intersection

$$\begin{cases} P_0 = -P_{0'}, \\ P_0 = -P_{0''}, \end{cases}$$

et, par conséquent, $P_{0'} = P_{0''}$, c'est-à-dire que l'axe radical de O′ et O″ est aussi l'axe radical de $\Pi_{00'}$ et $\Pi_{00''}$. Lorsque les circonférences radicales ne se coupent pas, il est aussi facile de donner une démonstration géométrique, et encore plus aisé de le démontrer analytiquement, comme nous ferons dorénavant.

Cette observation suggère un moyen de trouver la circonférence radicale de deux circonférences extérieures (si elle existe) ou de deux circonférences intérieures O et O′.

Coupons-les par une troisième circonférence O″ et déterminons la circonférence radicale de O et de O′; puis l'axe radical de O′ et de O″. On aura ainsi un ou deux points de la circonférence que l'on veut déterminer et dont le centre est connu.

La circonférence O″ doit être tellement choisie que l'axe et la circonférence radicale se coupent.

S'il se présente un cas où les données soient extérieures (seul cas où il peut y avoir impossibilité) pour voir si la circonférence radicale est réelle, on peut employer la construction suivante:

Élevons à l'extrémité du rayon OA la perpendiculaire AB égale au rayon R′ de l'autre circonférence; traçons OB, puis la perpendiculaire BC = OB; si la circonférence décrite avec le rayon OC enveloppe le centre O′, la circonférence radicale existe.

La simplicité de cette construction épargne d'autres explications. Lorsque deux circonférences sont orthogonales, on voit bien clairement que la circonférence radicale correspondante passe par leurs centres, comme on le déduit aussi de la valeur de ρ. On a, en effet, $R^2 + R'^2 = \overline{OO'}^2$, et par suite $\rho = \frac{1}{2}OO'$. La réciproque se vérifie facilement.

La considération de circonférences radicales nous permet de résoudre immédiatement le problème suivant :

L'on a deux circonférences Δ, Δ' *tangentes (intérieurement par exemple) de centres* O *et* O′ *et de rayons respectifs* R *et* R′; *par le point de tangence* P, *traçons des sécantes telles que* pam, *et prenons en sens contraire* am′ = am. *Quel est le lieu géométrique du point* m′?

Traçons la circonférence O″ qui ait comme circonférence radicale, par rapport à Δ, Δ'; on a, en valeur absolue, $ap.am = ap.am$; ou, $am' = am$; le lieu cherché est, par conséquent, la circonférence O″.

Pour déterminer son rayon x, il faut observer que

$$R' = \frac{1}{2}(R - x),$$

d'où
$$x = R - 2R'.$$

La circonférence trouvée est tangente (extérieurement ou intérieurement) à Δ; extérieurement, lorsque $R - 2R'$ est positif; intérieurement, dans les cas contraires. Si Δ' passe par le point O, le lieu géométrique se réduit au point P; ce résultat est évident.

Nous avons vu précédemment que si l'on a trois circonférences O, O' et O" et que l'on détermine les circonférences radicales de deux groupes (O, O' et O, O", par exemple) l'axe radical de ces circonférences radicales est le même que celui des circonférences du troisième groupe. Cela nous permet de démontrer facilement que les circonférences décrites sur les médianes d'un triangle comme diamètres ont, deux à deux, pour axes radicaux les hauteurs de ce triangle. Il faut observer, en effet, que si, sur les côtés d'un triangle comme diamètres, l'on décrit des circonférences, les radicales de celles-ci sont celles que l'on a tracées sur les médianes (par exemple, celle qui correspond aux circonférences décrites sur b et c est celle qui a comme diamètre la médiane relative au côté a); il résulte donc, de cette observation, que les axes radicaux des dernières sont les mêmes que ceux qui correspondent aux premières; c'est-à-dire les hauteurs du triangle. Nous avons donc six circonférences dont le centre radical commun est l'orthocentre du triangle donné.

Si nous considérons, à présent, les circonférences décrites des milieux des côtés comme centres avec des rayons égaux aux médianes correspondantes, et celles que nous avons nommées (par des raisons exposées, *Progreso Matematico*, vol. V, p. 70) *circonférences potentielles*, il est évident que les susdites circonférences sont celles que l'on a décrites en prenant comme diamètres les médianes du triangle anticomplémentaire. D'ailleurs, et en vertu de ce que nous avons dit précédemment, ces circonférences sont les radicales de celles que nous avons décrites sur les côtés de ce dernier triangle; nous pouvons dire, en conséquence, que les *circonférences décrites des sommets d'un triangle comme centres, avec des rayons égaux aux côtés opposés, ont pour circonférences radicales les potentielles du susdit triangle*. On voit alors pourquoi leur centre radical est l'orthocentre du triangle anticomplémentaire du proposé.

Voilà donc un second groupe de six circonférences qui ont le même centre radical.

Nous avons dit que lorsque deux circonférences sont orthogonales, la circonférence radicale a comme diamètre la ligne des centres, et comme le cercle de Longchamps (*) est orthotomique à ceux que nous avons décrits des sommets comme centres, avec des rayons égaux aux côtés opposés, il s'ensuit que les circonférences qui ont pour diamètres les droites qui joignent les sommets d'un triangle à l'orthocentre de son anticomplémentaire sont les radicales du cercle de Longchamps et des trois autres cercles cités plus haut.

Le même critérium peut nous être utile pour trouver les circonférences radicales de quelques autres circonférences remarquables du triangle; mais, dans tous les cas, on peut utilement avoir recours à la Géométrie Analytique.

Soient $C = 0$, $C' = 0$ les équations de deux circonférences, celle de la radicale sera $C + C' = 0$, soit qu'il s'agisse de coordonnées cartésiennes, soit qu'on ait affaire à des coordonnées trilinéaires; la circonférence radicale correspondant à celles qui sont représentées par les équations :

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0;$$

a pour équation :

$$x^2 + y^2 + (A + A')x + (B + B')y + \frac{1}{2}(C + C') = 0.$$

Si l'on prend, en particulier, la ligne des centres pour l'axe des x et que l'une d'elles ait son centre à l'origine (axe rectangulaire), la circonférence radicale sera :

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2(R^2 + R'^2) - \alpha^2}{4},$$

résultat qui vérifie (ce que nous avons vu précédemment) que pour que la circonférence radicale existe, la distance de centres doit être inférieure à $\sqrt{2(R^2 + R'^2}$.

Si cette distance est $\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$, la circonférence est réduite à un point placé sur la ligne des centres, intérieurement à la circonférence de plus grand rayon et à une distance de son centre égale à la moitié de la précédente quantité.

Quand il s'agit de coordonnées barycentriques et que les

(*) Voyez *J. S.*, 1886, p. 57.

circonférences données sont, dans la forme indiquée par M. de Longchamps (*J. S.*, 1886, p. 57), représentées par

$$\Sigma\alpha \times \Sigma u\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = o,$$
$$\Sigma\alpha \times \Sigma u'\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = o,$$

la circonférence radicale a pour équation

$$\Sigma\alpha \,.\, \Sigma(u + u')\alpha - 2\Sigma a^2\beta\gamma = o.$$

Il est très facile de prouver analytiquement un cas que nous avons observé précédemment; c'est que si nous avons trois circonférences O O′ O″ et que nous les groupions deux à deux, l'axe radical des circonférences radicales de deux groupes l'est aussi du troisième.

Nous avons, en effet, si nous appelons $C = o$, $C' = o$, $C'' = o$, les équations des trois circonférences données :

La circonférence radicale de $\left.\begin{array}{l} C = o, \\ C' = o, \end{array}\right\}$ est $C + C' = o$; celle de $\left.\begin{array}{l} C = o, \\ C'' = o, \end{array}\right\}$ est $C + C'' = o$.

L'axe radical de $\left.\begin{array}{l} C + C' = o, \\ C + C'' = o, \end{array}\right\}$ est $C' - C'' = o$. L'axe radical de $\left.\begin{array}{l} C' = o, \\ C'' = o, \end{array}\right\}$ est $C' - C'' = o$.

Si, après avoir trouvé les circonférences radicales correspondant à trois circonférences données, nous opérons de même (quand on le peut) avec celles que nous obtenons successivement, il pourra en résulter des séries triples de cercles soumis à certaines liaisons dont l'étude ne peut manquer d'être bien curieuse.

La considération de circonférences radicales dans la Géométrie du triangle appliquée à des cercles remarquables de celui-ci, à d'autres cercles et à des droites ou à des points remarquables de ce triangle, conduira, croyons-nous, à des faits intéressants. Pour l'instant, nous nous bornerons à signaler des idées que nous nous proposons de développer à une autre occasion.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10134-5-96. — (Encre Lorilleux).