BLOQUE 6:

DERIVADAS

- *Iniciación al cálculo de derivadas*
- *Aplicaciones*

6.INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

6.1 INTRODUCCIÓN

En nuestro entorno gran parte de la información que recibimos viene dada en forma de gráficas de funciones. Muchas veces, para interpretarlas, no es suficiente con analizar los valores de las variables, es necesario también observar como varían esos valores. Por ejemplo, en economía se suelen estudiar variaciones del precio de un producto a lo largo del tiempo.
En física, se estudia la velocidad de un móvil, que es la variación del espacio que recorre en función del tiempo. Cuando intentamos calcular esas variaciones en intervalos cada vez más pequeños, es decir, la velocidad instantánea, aparece el concepto de derivada.

Veamos como:

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}}$$

La velocidad media de un intervalo $[t_0, t_0+h]$ viene dada por $V_m = \dfrac{e(t_0+h)-e(t_0)}{h}$, siendo e(t) el espacio recorrido en el tiempo t.

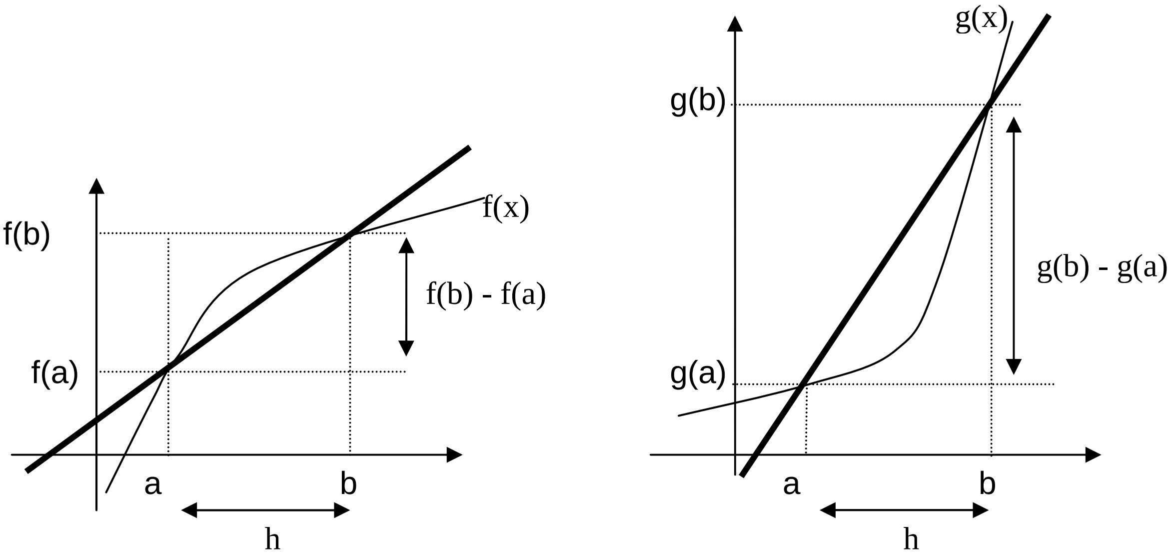
Si hacemos que h sea suficientemente pequeño, tendremos la velocidad en el instante t_0.

$$V = \lim_{h\to 0} \frac{e(t_0+h)-e(t_0)}{h}$$

6.2 CONCEPTO DE DERIVADA.

- **Tasa de variación media de una función.**

Dadas las gráficas de las funciones f(x) y g(x) ambas son crecientes pero la "rapidez" de crecimiento es mayor en g(x) que en f(x):
Recorrida la misma distancia en x (distancia h=b-a) las distancias de sus imágenes son distintas y mayores en g(x) (g(b) - g(a) > f(b) - f(a)).



Veamos cómo podemos conocer esta "rapidez" analíticamente:

Sea f una función real. Llamamos ***tasa de variación media*** **(T.V.M.) de f en el intervalo [a, b]** al cociente entre la variación de f(x) y la de x en el intervalo [a, b]:

$$\text{TVM}_{[a,b]}(f) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<u>Consecuencias</u>:

- Si comparamos dos o más funciones crecientes la de mayor tasa crece más rápido. Del mismo modo, si comparamos dos funciones decrecientes la de menor tasa decrece más rápido.
- Si la tasa de variación media en el intervalo [a,b] es positiva entonces la función es creciente en [a,b].
- Por el contrario si la tasa es negativa en [a,b] entonces la función es decreciente en [a,b].

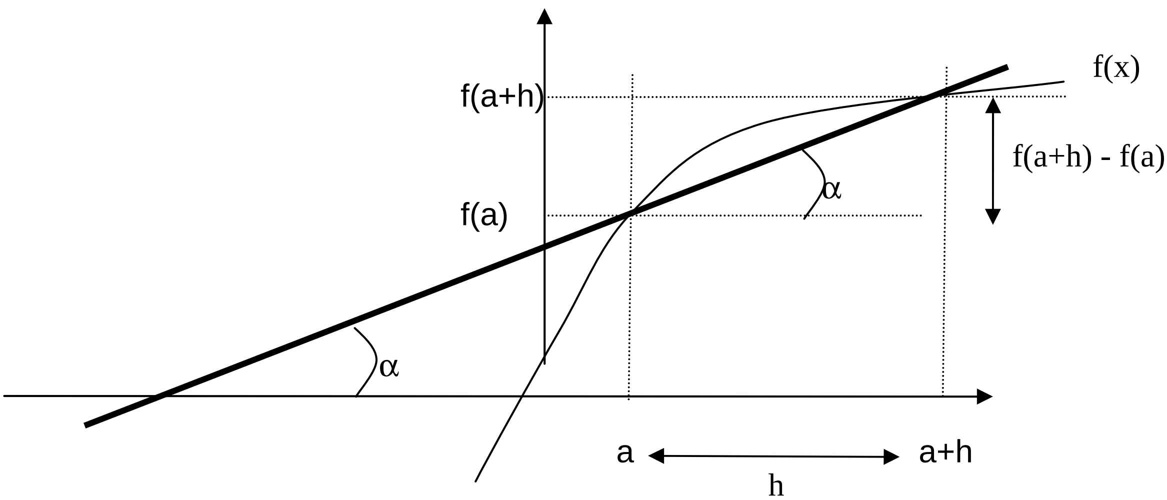
<u>EJERCICIO</u>: El número de alumnos de un centro escolar afectados por la gripe a lo largo de un mes viene dado por la función f(x)= $800\text{-}x^2$, donde x indica los días del mes transcurridos. Calcula la tasa de variación media correspondiente a los intervalos [3, 5]; [13, 15]; [10, 20]. ¿En cuál de estos intervalos disminuyó más rápido el número de alumnos enfermos?

<u>Interpretación geométrica de la tasa de variación media</u>

Si llamamos h = b –a $\Rightarrow$ b = a +h, a la expresión de la tasa de variación media también se puede escribir como:

$$\text{TVM}_{[a,a+h]} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Gráficamente la tasa de variación media de f en el intervalo [a, b] representa la pendiente de la recta que pasa por (a, f(a)) y (a+h, f(a+h)) *(recta secante a f en esos puntos).*



Pendiente de la recta = $\tan\alpha = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

- **Definición de derivada de una función en un punto**

La derivada de una función *f* en el punto de abscisa x = *a*, se define como el siguiente límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si este límite existe decimos que la función f es derivable en el punto x = a. A la derivada de una función en un punto se le llama también **tasa de variación instantánea.**

<u>**Ejemplo**</u>:

Halla la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ en el punto $x = 3$

Podemos seguir los siguientes pasos:

1º $f(3) = \dfrac{2}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$;

2º $f(3+h) = \dfrac{2}{3+h+1} = \dfrac{2}{4+h}$

3º $f(3+h) - f(3) = \dfrac{2}{4+h} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4-1.(4+h)}{2(4+h)} = \dfrac{-h}{2(4+h)}$

4º $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{-h}{2(4+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(4+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(4+h)} = \dfrac{-1}{8}$

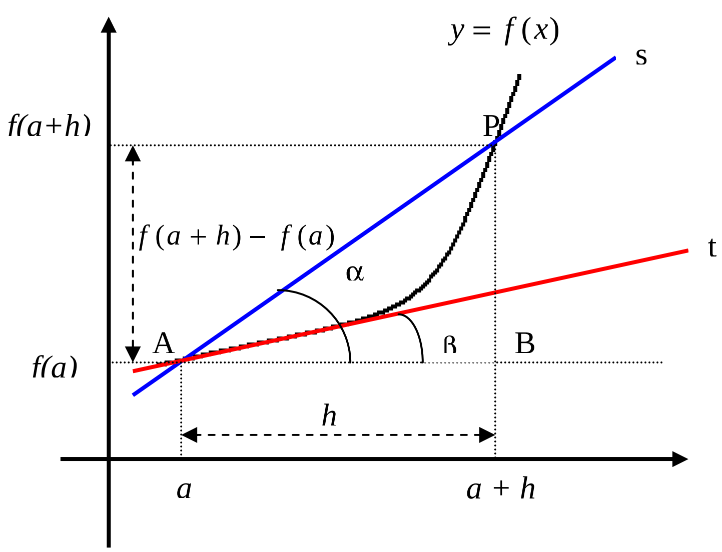
<u>**EJERCICIO**</u>. Utilizando la definición, calcula el valor de la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 5x - x^2$ en x = 1, x = 2, x = 3.

b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ en x = 1, x = -1, x = 4.

c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ en x = 1, x = -1, x = 2.

<u>*6.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS.*</u>



La recta secante ***s***, corta a la curva *y = f(x)*,en los puntos *A* y *P*.

Su pendiente es: $\tan\alpha = \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

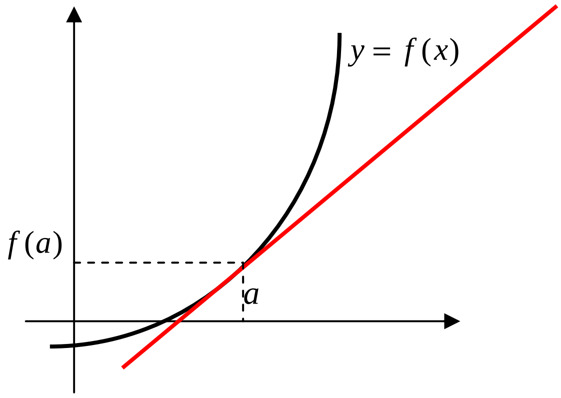
Si el punto *P* se va acercando al punto *A*, hasta confundirse con él, la recta secante *s*, se transforma en la recta tangente *t* y el ángulo α se transforma en el ángulo β, es decir, cuando $P \to A$, que es equivalente a decir que $h \to 0$, el límite de la recta secante *s*, es la recta tangente *t.*

Pero cuando $\alpha \to \beta$, $\tan\alpha \to \tan\beta$ que es equivalente a $\lim\limits_{h\to 0} \tan\alpha = \tan\beta$

Por lo tanto, $\tan\beta = \text{pendiente de t} = \lim\limits_{h\to 0} \tan\alpha = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Obtenemos entonces que l**a derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.** Por lo tanto, dicha recta tangente viene dada por la ecuación:

$y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)$ *(Ecuación punto pendiente de una recta)*



Para calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa *x = a*, procedemos de la forma siguiente:

- Calculamos el valor de la función en dicho punto, *f(a)* con el que obtendremos el punto por donde pasa la recta tangente: $(a, f(a))$
- Calculamos la pendiente de la recta, que es el valor de la derivada en el punto considerado: $m = f'(a)$
- Aplicamos la fórmula de la ecuación punto–pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, es decir, $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = x^2$, calcular la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x=2.

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada:

$$m = f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

Las coordenadas del punto son:

Para *x = 2, f(2) = 4* por lo tanto *P(2, 4).*

Aplicando la fórmula de la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x - 4$$

EJERCICIO: Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a f(x) = x^2-x en x = 0 y x = 1.

- **Derivadas laterales.**

Definimos:

Derivada por la derecha: $f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivada por la izquierda: $f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Para que una función sea derivable en un punto tienen que existir las derivadas laterales y estas ser iguales.

- **Función derivada.**

La derivada de una función en un punto de abscisa x = a, asigna a dicho punto un número real, que es el valor de la derivada en dicho punto.

También podemos considerar una función que asocie a cada punto x, el valor de la derivada en ese punto. Se define la **función derivada de f** como la función que asocia a cada x$\in$Dom(f) el valor f'(x), si existe.

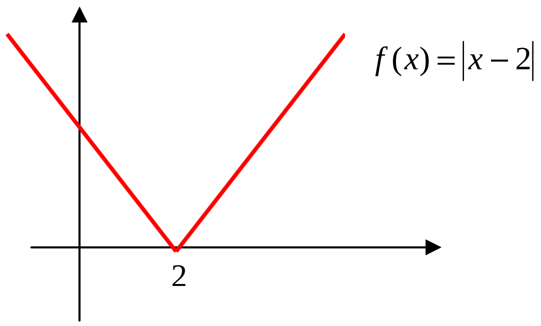
Se denota por **f'**, y se cumple que Dom(f') $\subset$ Dom(f).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

6.4 DERIVACIÓN Y CONTINUIDAD.

Si una función es derivable en un punto, es continua en dicho punto. Si la función es continua no tiene por qué ser derivable. Por lo tanto que una función f sea continua en x =a es una condición necesaria, pero no suficiente, para que f sea derivable en x =a.

Ejemplo:



Veamos que esta función es continua en x = 2:

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2 \text{ si } x-2\geq 0, \text{ es decir, si } x\geq 2 \\ -x+2 \text{ si } x-2<0, \text{ es decir, si } x<2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x+2)=0$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-2)=0$$

Los límites laterales son iguales. Y como $f(2)=2-2=0$, la función es continua en $x=2$

Sin embargo, no es derivable en dicho punto como vamos a ver:

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(2+h)+2-0}{h}=-1$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)-2-0}{h}=1$$

Existen las derivadas laterales pero como no son iguales, la función no es derivable en el punto *x = 2.*

- **Derivadas sucesivas.**

Del mismo modo que se obtiene la derivada de una función f, también es posible obtener la derivada de f’ que llamamos *derivada segunda* y denotamos por f’’.
Análogamente, definimos la *derivada tercera* de f como: (f’’)’ = f’’’
Y así sucesivamente.

6.5 REGLAS DE DERIVACIÓN

- **Derivadas de operaciones con funciones.**

Aplicando la definición de derivada se obtienen las siguientes fórmulas:

Derivada de una suma o diferencia: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Derivada de un producto: $(f.g)' = f'.g + g'.f$

Derivada de un cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - g'.f}{g^2}$

- **Derivada de una función compuesta: Regla de la cadena.**

Sea la función compuesta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{h} = \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{f(x+h)-f(x)\to 0} \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'[f(x)].f'(x)$$

es decir, la derivada de la composición de f y *g* es el producto de la derivada de *g* en el punto $f(x)$ multiplicada por la derivada de f en el punto *x*.

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)].f'(x)$$

- **<u>Cálculo de derivadas.</u>**

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo potencial	$y = x^{a}$	$y' = ax^{a-1}$
	$y = f^{\,a}$	$y' = af^{\,a-1}.f'$

<u>Ejemplos</u>:

- $y = x^{4}\,;\;\; y' = 4x^{3}$
- $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^{2}}\,;\;\; y = \dfrac{x^{1/2}}{x^{2}} = x^{1/2}.x^{-2} = x^{-3/2}\,;$

  $y' = \dfrac{-3}{2}.x^{\frac{-3}{2}-1} = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{x^{5/2}} = -\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{x^{5}}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{x^{5}}} = -\dfrac{3}{2x^{2}\sqrt{x}}$
- $y = (3x^{2}-2)^{5}\,;\;\; y' = 5(3x^{2}-2)^{4}.(3x^{2}-2)' = 30x(3x^{2}-2)^{4}$
- $y = \sqrt[3]{x^{2}-3}\,;\;\; y = (x^{2}-3)^{1/3}\,;\;\; y' = \dfrac{1}{3}(x^{2}-3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2x = \dfrac{1}{3}(x^{2}-3)^{-2/3}\cdot 2x$
- $y = \dfrac{1}{(2x+5)^{2}}\,;\;\; y = (2x+5)^{-2}\,;$

  $y' = -2(2x+5)^{-3}.(2x+5)' = -2(2x+5)^{-3}.2 = \dfrac{-4}{(2x+5)^{3}}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo raíz cuadrada	$y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
	$y = \sqrt{f}$	$y' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

<u>Ejemplo</u>:

- $y = \sqrt{x^{2}-3x}\,;\qquad y' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^{2}-3x}}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo exponencial	$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$
	$y = e^{f}$	$y = e^{f}.f'$
	$y = a^{x}$	$y = a^{x}.La$
	$y = a^{f}$	$y = a^{f}.f'.La$

Ejemplos:

- $y = e^{-x}$; $y' = e^{-x}.(-1) = -e^{-x}$
- $y = e^{3x+2}$; $y' = e^{3x+2}.(3x+2)' = e^{3x+2}.3 = 3e^{3x+2}$
- $y = 2^x$; $y' = 2^x.L2$
- $y = 5^{x^2+1}$; $y' = 5^{x^2+1}.(x^2+1)'.L5 = 2x5^{x^2+1}.L5$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo logarítmico	$y = Lx$	$y' = \frac{1}{x}$
	$y = Lf$	$y' = \frac{f'}{f}$
	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}.\frac{1}{La}$
	$y = \log_a f$	$y' = \frac{f'}{f}.\frac{1}{La}$

Ejemplos:

- $y = L(2x^3+5x)$; $y' = \frac{(2x^3+5x)'}{2x^3+5x} = \frac{6x^2+5}{2x^3+5x}$
- $y = \log_2 x$; $y' = \frac{1}{x}.\frac{1}{L2} = \frac{1}{xL2}$
- $y = \log_3(4x+1)$; $y' = \frac{(4x+1)'}{4x+1}.\frac{1}{L3} = \frac{4}{4x+1}.\frac{1}{L3} = \frac{4}{(4x+1).L3}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo seno	$y = senx$	$y' = \cos x$
	$y = senf$	$y' = \cos f.f'$

Ejemplos:

- $y = sen(4x-1)$; $y' = \cos(4x-1).(4x-1)' = 4\cos(4x-1)$
- $y = sen^3 x$; $y = (sen\, x)^3$; $y' = 3(sen\, x)^2.(sen\, x)' = 3sen^2 x.\cos x$
- $y = sen\, x^2$; $y' = \cos x^2.(x^2)' = 2x\cos x^2$
- $y = sen^2(2x^3+2x)$; $y = [sen(2x^3+2x)]^2$;
  $y' = 2sen(2x^3+2x).[sen(2x^3+2x)]' = 2\mathrm{sen}(2\mathrm{x}^3+2x).\cos(2x^3+2x).(6x^2+2)$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo coseno	$y = \cos x$	$y' = -sen x$
	$y = \cos f$	$y' = -sen f \ . f'$

Ejemplos:

- $y = \cos 5x$; $y' = -sen 5x . (5x)' = -5 sen 5x$
- $y = \cos \sqrt{x}$; $y' = -sen\sqrt{x}.(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} sen\sqrt{x} = -\frac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo tangente	$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
	$y = \tan f$	$y' = \frac{1}{\cos^2 f} . f'$

Ejemplos:

- $y = \tan 5x$; $y' = \frac{1}{\cos^2 5x} . (5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}$
- $y = \tan^2 x$; $y = (\tan x)^2$; $y' = 2\tan x . (\tan x)' = 2 \tan x . \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x - 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x$

d) $f(x) = (3x - 1)^3$

e) $f(x) = e^{3x+1}$

f) $f(x) = \frac{1 - e^x}{e^x}$

g) $f(x) = x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

h) $y = \frac{2}{x^3 + x}$

i) $y = x^3(2x-1)^5$

j) $y = L\sqrt{2x-3}$

k) $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 1}$

l) $g(x) = \frac{3}{(x-5)^2}$

m) $f(x) = L(4x+1)$

n) $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$

o) $y = \frac{2x+3}{(x+5)^2}$

p) $h(x) = 5^{3x^2+2x-1}$

q) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

r) $y = L\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

2. Demuestra, aplicando la definición, que la derivada de una constante es 0.

3. Sea la función $f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x\le 0\\ x+1 & si \quad 0<x\le 2\\ 2x-1 & si \quad x>2\end{cases}$

Estudia si es derivable en los puntos x = 0 y x = 2.

4. Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2+x+1$ en el punto de abscisa x = 2. Escribe la ecuación de dicha recta.

5. Calcula:
   a)Derivada de $f(x)=x^4+4x-1$ en el punto de abscisa *x = 1.*
   *b)*Derivada de $f(x)=L(x+3)$ en *x = 2.*

6. ¿Qué valores deben de tomar *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{si } x\le 2\\ ax^2+b & si \quad x>2\end{cases}$

sea derivable en *x = 2?*

7. El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t)=3t^2-t+1$ donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante *t = 2* segundos.

8. Di si la función $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & si \quad x\le 1\\ 2x-2 & si \quad x>1\end{cases}$ es derivable en *x = 1*.

9. Calcula en qué puntos las tangentes a las gráficas de las funciones
   a) f(x) = x^2-5x+8
   b) g(x) = $\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$

son paralelas a la bisectriz del 1ºcuadrante. Calcula también en qué puntos las rectas tangentes a dichas funciones son paralelas al eje X.

10. Calcula el valor de m y n para que la función $f(x)=\begin{cases}mx+5 & si \quad x\le 2\\ nx^2-3x-5 & si \quad x>2\end{cases}$ sea derivable en $x=2$

11. Representa gráficamente la función :

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2 & si \quad x<1\\ -x^2+4 & si \quad x\ge 1\end{cases}$$

¿Existe f´(1)? Razona la repuesta.

12. Una población de 100 millones de bacterias está siendo tratada para su eliminación y se sabe que la población p en millones en el instante t (en días) es p(t)= 100-t^2.

    a) Calcula su tasa de variación entre los días t = 1 y t = 2.
    b) ¿Cuál es la velocidad de decrecimiento de la población en t = 3?

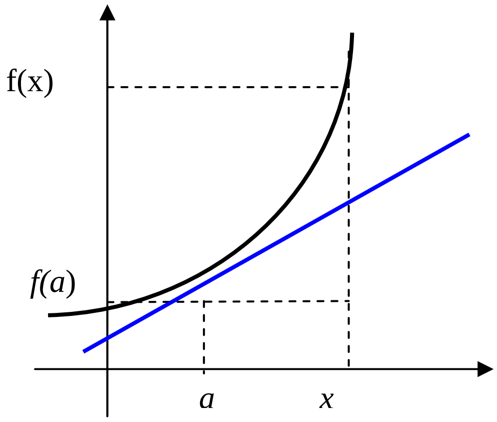
6.6 MONOTONÍA Y EXTREMOS

Cuando una función es derivable en un punto, podemos conocer si es creciente o decreciente en dicho punto:

- Si f derivable y creciente en x = a ⇒ f´(a)≥0.
- Si f derivable y decreciente en x = a ⇒ f´(a)≤0.

Veamos por qué es cierto este resultado:

Sea f(x) una función creciente



f creciente en a ⇒ signo de [f(x) – f(a)] = signo de (x –a) ⇒ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$. Por lo tanto, $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$ pues el límite de una función que toma valores positivos es positivo o nulo.

Razonando de manera análoga, si f(x) es una función decreciente obtendríamos que f'(a) ≤ 0.

- Si f es derivable en x = a y f´(a) > 0 ⇒ f es creciente en x = a.
- Si f es derivable en x = a y f´(a) <0 ⇒ f es decreciente en x = a.

Sabemos que $f´(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ y por lo tanto existe un entorno de a en que $f(x)-f(a)$ y (x – a) tienen el mismo signo.

Luego:

- si x > a ⇒ $f(x) > f(a)$
- si x< a ⇒ f(x) < f(a)

Por lo tanto, f es creciente en a.

Análogamente el segundo apartado.

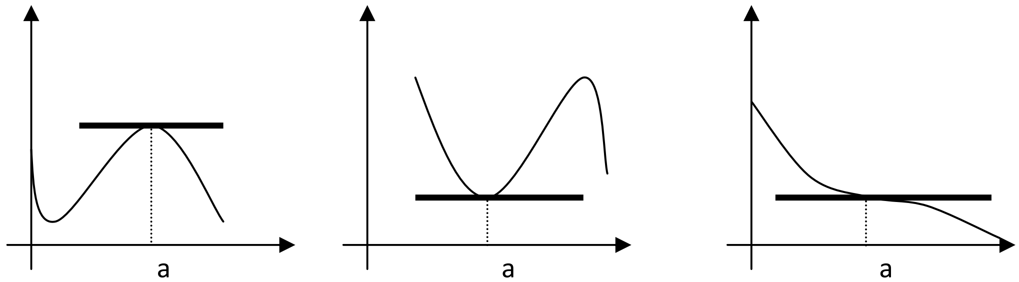
Estudiar la monotonía de una función es encontrar los intervalos en los que es creciente y decreciente.
Se procede de la siguiente forma:

1º Se calcula la función derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.
2º Con los puntos en los que se anula la derivada, y teniendo en cuenta también los puntos donde no está definida la función de existir, dividimos el dominio en intervalos.
3º Se estudia el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

Se llaman **extremos** de una función a aquellos puntos donde la función presenta un máximo o un mínimo.

- ❖ Si f es derivable en a y tiene un extremo relativo en el, entonces $f'(a)=0$. Geométricamente significa que la recta tangente a la curva en ese punto es horizontal.

Sin embargo, puede ocurrir que $f'(a)=0$ y que no haya ningún extremo relativo.



máximo relativo | mínimo relativo | no hay extremo

Para la determinación de extremos podemos utilizar los siguientes criterios:

Criterio de la primera derivada:

- Se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Existe máximo relativo en los puntos de dominio en los que la función pasa de creciente a decreciente.
- Existe mínimo relativo en los puntos en que pasa de decreciente a creciente.

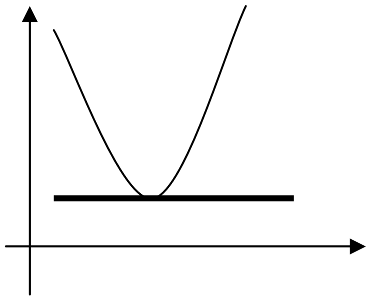
Criterio de la segunda derivada:

- Calculamos la primera derivada, la igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante $f'(x)=0$.
- Calculamos la segunda derivada: $f''(x)$.
- Las raíces de la ecuación obtenida, x_i, se sustituyen en la segunda derivada.
  Si $f''(x_i) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en x_i
  Si $f''(x_i) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en x_i

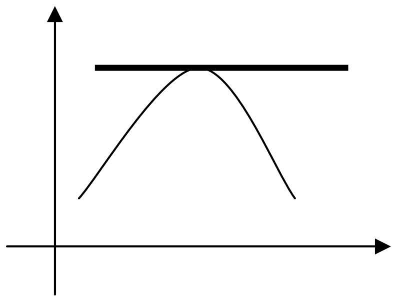
6.7 CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Se dice que una función es ***convexa*** en un punto de su dominio de definición si, en un entorno de ese punto, la gráfica de la función se mantiene por encima de la tangente a la curva en ese punto.

En el caso contrario se dice que es **cóncava**, es decir en un entorno de ese punto la gráfica de la función se mantiene por debajo de la tangente a la curva en ese punto.



Convexa



Cóncava

Se verifica el siguiente resultado:

- Si $f''(a) > 0 \Rightarrow$ f es convexa en a.
- Si $f''(a) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en a.
- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow$ f tiene un *punto de inflexión* en a, es decir, un punto donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

Estudiar la curvatura de una función consiste en encontrar los intervalos en los que es cóncava y convexa.
Se procede de la siguiente forma:

1º Se calcula la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.

2º Con los puntos en los que se anula la derivada segunda, y teniendo en cuenta los puntos donde no está definida la función si existen, dividimos el dominio en intervalos.

3º Se estudia el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada uno de los intervalos resultantes.

6.8 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para representar gráficamente una función podemos seguir el siguiente esquema en el que aparecen ordenadas todas las propiedades a tener en cuenta en el estudio de su gráfica.

	Propiedades de f obtenidas directamente	Caracterización
1	**Dominio** (Dom) de la función **Recorrido** (Im) de la función	$x\in$ Dom(f) $\Leftrightarrow$ existe y tal que y=f(x) $y\in$ Im(f) $\Leftrightarrow$ existe x tal que y=f(x)
2	**Simetrías**: a) Función par b) Función impar	 f(-x)=f(x) Eje de simetría OY f(-x)=-f(x) Centro de simetría es el origen (0,0)
3	**Periodicidad**	f(x+T)=f(x) T período mínimo
4	**Puntos de corte con los ejes** a) Corte con el eje OX b) Corte con el eje OY	 f(x)=0 Ninguno, uno o más puntos f(0)=y Ningún o un punto
5	**Regiones de existencia**: a) Positiva b) Negativa	 f(x)>0 Gráfica por encima del eje OX f(x)<0 Gráfica por debajo del eje OY
6	**Asíntotas**: a) Asíntotas verticales: x=a b) Asíntotas horizontales: y=b c) Asíntotas oblicuas: y=mx+n	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ $\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx] \end{cases}$
7	<u>**Puntos de discontinuidad**</u>	$\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$
	Propiedades de f obtenidas por las derivadas sucesivas	
8	<u>**Monotonía**</u> a) Intervalos de crecimiento b) Intervalos de decrecimiento c) Extremos	 f´(x)>0 f´(x)<0 f’(a)=0 y f’’(a)>0 Mínimo f´(a)=0 y f’’(a)<0 Máximo
9	**Curvatura:** a) Intervalos de convexidad b) Intervalos de concavidad Puntos de inflexión	 f’’>0 f’’<0 f’’(a)=0 e f’’’(a)≠0

Veamos un ejemplo: $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

- Dominio de definición:

  $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1 \Rightarrow Domf(x)=\Re-\{1,-1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\left.\begin{array}{r} Eje\ X: y=0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0 \\ Eje\ Y: x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0^3}{0^2-1} \Rightarrow y=0 \end{array}\right\} Punto\ de\ corte\ (0,0)$$

- Asíntotas:
  - Asíntotas verticales:

$$x=1\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)=+\infty \end{array}\right. \Rightarrow x=1,\ asíntota\ vertical$$

$$x=-1\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)=-\infty \end{array}\right. \Rightarrow x=-1,\ asíntota\ vertical$$

  - Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=-\infty \Rightarrow no\ hay\ asíntota\ horizontal, hay\ rama\ parabólica$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=+\infty \Rightarrow no\ hay\ asíntota\ horizontal, hay\ rama\ parabólica$$

  - Asíntotas oblicuas: como grado de P(x) = grado de Q(x) + 1 sabemos que hay alguna asíntota oblicua, por lo tanto calculamos su expresión

$$\left.\begin{array}{r} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x.(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0 \end{array}\right\} y=x\ es\ una\ asíntota\ oblicua$$

- Puntos singulares:

$$f´(x)=\frac{3x^2.(x^2-1)-x^3.2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f´(x)=0 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2.(x^2-3)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=+\sqrt{3} \\ x_3=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$f(0)=0,\ f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

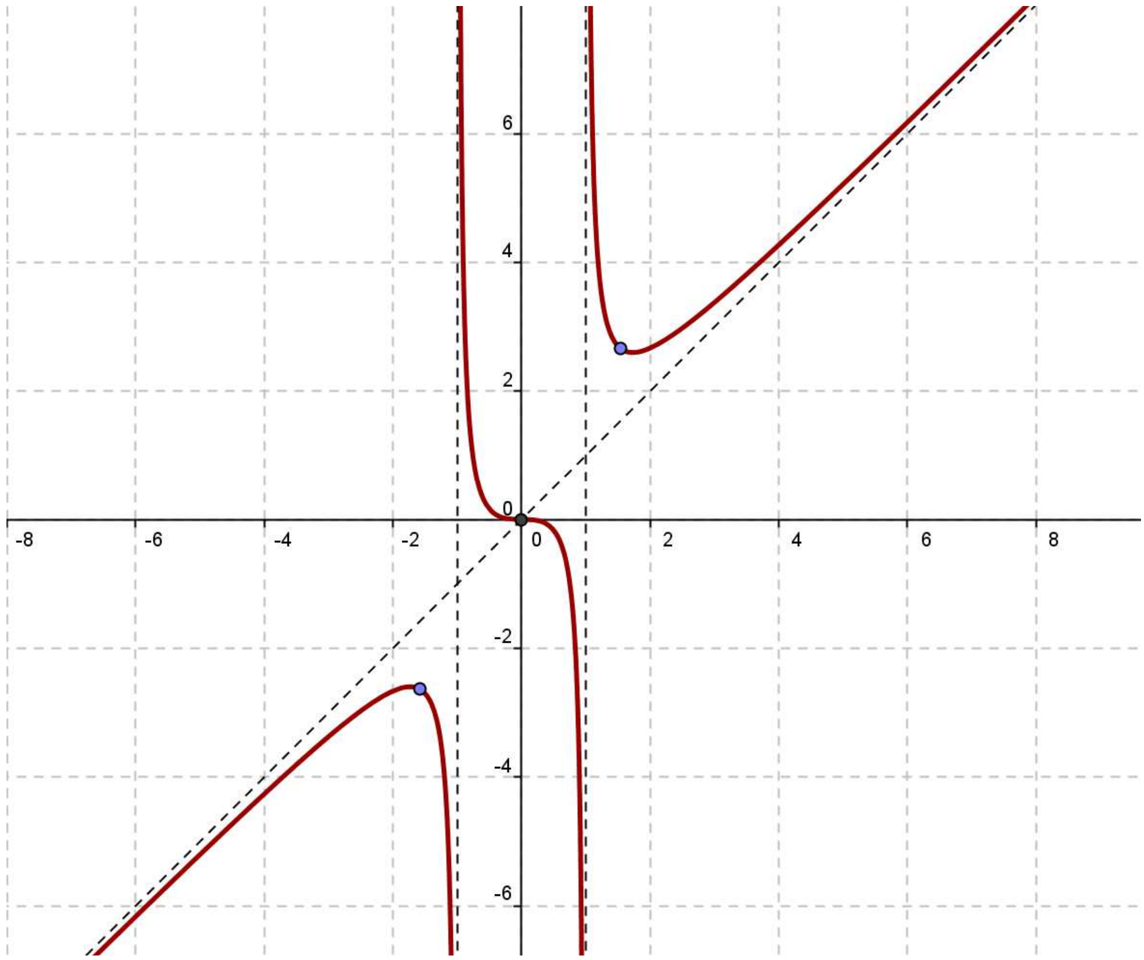
Los puntos singulares son: $(0,0), \left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\ y\ \left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

o Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$x=-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	x=0	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$x=\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	+		-		-		+
$f(x)$	Crece		Decrece		Decrece		Crece
		MÁXIMO		PUNTO SINGULAR		MÍNIMO	

$$\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \textit{es un máximo y} \left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \textit{es un mínimo}$$

o Representación gráfica:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

13. Estudia la monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:

    a. $f(x) = (x-2)^2(x-1)$ b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ c. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

14. Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de:

    a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ b. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ c. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

15. Determina p y q para que la función $f(x) = x^2 + px + q$ pase por el punto (-2,1) y presente un mínimo en x =-3.

16. Determina a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto (1,2), presente un mínimo en x = 1 y tenga un punto de inflexión en x = 3.

17. Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en su punto de inflexión.

18. Estudia las particularidades de las siguientes funciones y dibuja las curvas correspondientes:

    a) $f(x)=x^3-4x$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ c) $g(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ d) $f(x) = x^4-2x^2-3$

    e) $h(x)= e^{-x^2}$ f) $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ h) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

19. Determina el parámetro **a** para que el valor mínimo de la función $y=x^2+2x+a$ sea igual a 8.

20. Obtén los parámetros a y b para que la función $y=x^2+ax+b$ alcance un mínimo en el punto P(-1,2).

21. La curva dada por $y=x^2+ax+b$ pasa por el punto p(-2,1) y alcanza un extremo relativo en x=-3. Hallar **a** y **b**.

22. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-6x^2+16x-11$ en su punto de inflexión.

23. Hallar los parámetros para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo en el punto M(-2,21) y un mínimo en el punto m(-1,6).

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

a) Calcula la longitud que deben tener los lados de un triángulo isósceles de 24 cm de perímetro para que el área sea máxima.

b) Calcula la longitud que deben tener los lados de un terreno rectangular de 400 m^2 de área si queremos que el perímetro de su contorno sea el mínimo posible.

c) Calcula la longitud que deben tener los lados de un terreno rectangular de 400 m^2 de área si queremos que su diagonal sea mínima.

d) Queremos hacer un depósito cilíndrico de chapa metálica, sin tapa, de 3 m^3 de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que la cantidad de chapa sea mínima?

e) Un alambre de 1 m de longitud se divide en dos trozos y con ellos se construye un cuadrado y un círculo respectivamente. Calcula la longitud que tiene que tener cada trozo para que la suma de las áreas sea mínima.

f) Determina dos números reales positivos de los cuales sabes que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

g) Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base? Recuerda: $V_{cono} = \frac{\pi}{3} R^2 h$

h) Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30cm, ¿cuál es el de área máxima?

i) Hallar en la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ el punto más próximo a (3,0).

j) Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros.
a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
b) Determinar el coste del marco.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS. BLOQUE DERIVADAS.

1. Indica la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos: [1,2], [1,3],[1,4],[1,5],[1,6],[1,7],[1,8] y en el intervalo variable [1,1+h]

2. Determina usando la definición:
   a. La derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisa 4 y 5.
   b. La derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisa 1, -1 y 5.
   c. La derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ en los puntos de abscisa -2, -1, 1 y 2.

3. Indica la función derivada de las siguientes funciones usando las reglas de derivación (no es necesario usar la regla de la cadena):
   a. $y = 3x^2 - 6x + 5$
   b. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
   c. $y = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$
   d. $y = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$
   e. $y = senx \cdot \cos x$
   f. $y = tgx$
   g. $y = x \cdot e^x$
   h. $y = x \cdot 2^x$
   i. $y = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$
   j. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
   k. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$
   l. $y = \dfrac{\log x}{x}$

4. Indica, usando la regla de la cadena, la derivada de las siguientes funciones:
   a. $y = sen(x^2 - 5x + 7)$
   b. $y = \sqrt[3]{(5x+3)^2}$
   c. $y = sen(3x+1) \cdot \cos(3x+1)$
   d. $y = \dfrac{\log x^2}{x}$
   e. $y = \cos(3x - \pi)$
   f. $y = \sqrt{1 + 2x}$
   g. $y = x \cdot e^{2x+1}$
   h. $y = \dfrac{sen(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

5. Dada la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$
   a. Indicar la derivada de la función en los puntos -1, 0, 2 y 4.
   b. Calcular la recta tangente en el punto de abscisa x=2.
   c. Determinar las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.
   d. En x = 4, ¿la curva es creciente o decreciente?

6. Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y determina:
   a. Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas -1, 1 y 3.
   b. Las ecuaciones de esas rectas tangentes.
   c. Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.
   d. ¿Es f(x) creciente o decreciente en x=2?

7. Representa las siguientes funciones polinómicas:
   a. $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$
   b. $y = -3x^4 + 4x^3$
   c. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$
   d. $y = x^4 + 4x^3$

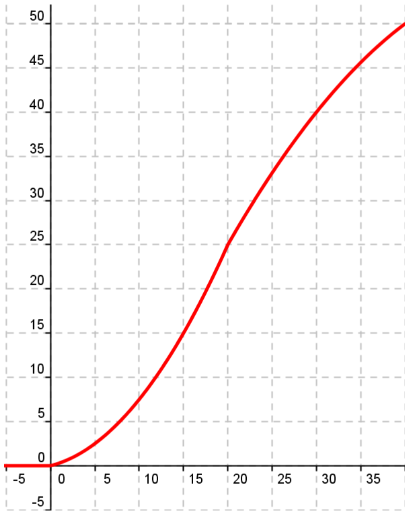
8. Representa las siguientes funciones racionales:

a. $y = \frac{x^2+3x+11}{x+1}$ d. $y = \frac{1}{x^2+1}$ g. $y = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$

b. $y = \frac{x^2+3x}{x+1}$ e. $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$ h. $y = \frac{x^2+1}{x^2-2x}$

c. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ f. $y = \frac{x^2-1}{x^2}$ i. $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

9. En la gráfica adjunta se muestra la longitud del feto (en cm) durante el embarazo (en semanas). Es una función creciente; en cambio, la rapidez del crecimiento no es la misma durante todo el embarazo. Estudia el crecimiento medio en los intervalos [0,5], [15,20] y [30,35] e indica en cuál de estos periodos crece más rápidamente.



10. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el punto x=1 aplicando la definición de derivada.

11. Indica la función derivada de:

a. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$ c. $y = \frac{3x-7}{x+2}$ e. $y = \sqrt{tgx}$

b. $y = \left(\frac{3x}{2}-5\right)^4$ d. $y = e^{-x}\ln(\cos x)$ f. $y = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

12. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ en el punto de abscisa 1.

13. Indica los puntos de tangente horizontal de la siguiente función: $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16$.

Indica además si estos puntos son máximos o mínimos y dibuja un esbozo de la función.

14. De una función polinómica sabemos que:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Tiene tangente horizontal en (0,-3) y (3,2).
- Corta al eje OX en (2,0) y en (5,0).

Represéntala gráficamente y di si los puntos de tangencia horizontal son máximos o mínimos.

15. Representa una función $y = f(x)$ que verifique:
   - Es continua en $\Re$
   - Tiene una asíntota horizontal en y = 2 y además $\begin{cases} si\ x \to +\infty,\ f(x) > 2 \\ si\ x \to -\infty,\ f(x) < 2 \end{cases}$
   - Tiene tangente horizontal en (1,3) y en (-1,1).

16. Representa una función $y = f(x)$ que verifique:
   - Su dominio de definición es $\Re - \{0\}$
   - Corta al eje OX en x = 1.
   - Tiene una asíntota vertical en x = 0 y además $\begin{cases} si\ x \to 0^-,\ f(x) \to +\infty \\ si\ x \to 0^+,\ f(x) \to +\infty \end{cases}$
   - Tiene una asíntota horizontal en y = 0 y además $\begin{cases} si\ x \to +\infty,\ f(x) < 0 \\ si\ x \to -\infty,\ f(x) > 0 \end{cases}$
   - Tiene tangente horizontal en (2,-1).

17. Estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

18. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ si sabes que pasa por (0,5) y que tiene un punto de tangente horizontal en (2,-3).

19. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^3 - 3x^2$

20. Determina la pendiente de la tangente a la curva $y = 4x - 4x^2$ en el punto de abscisa x=2, aplicando la definición de derivada.

21. Indica la función derivada de cada una de estas funciones e indica su valor en los puntos que se indican:

   a. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6; \quad en\ x = 1$
   b. $f(x) = \cos(2x + \pi); \quad en\ x = 0$
   c. $f(x) = \dfrac{x}{3} + \sqrt{2}; \quad en\ x = -\dfrac{17}{3}$
   d. $f(x) = \dfrac{1}{7x + 1}; \quad en\ x = 0$
   e. $f(x) = sen\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}; \quad en\ x = \pi$
   f. $f(x) = \dfrac{2}{(x+3)^3}; \quad en\ x = -1$
   g. $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{x}{2}; \quad en\ x = 2$
   h. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 4}}; \quad en\ x = 8$
   i. $f(x) = x \cdot sen(\pi - x); \quad en\ x = \dfrac{\pi}{2}$
   j. $f(x) = (5x - 2)^3; \quad en\ x = \dfrac{1}{5}$
   k. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 5}; \quad en\ x = 3$

22. Indica la función derivada de estas funciones:

a. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

b. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x^2}$

c. $f(x)=\sqrt[3]{(x+6)^2}$

d. $f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

e. $f(x)=\dfrac{1}{3x}+\dfrac{x}{3}$

f. $f(x)=\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2$

g. $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

h. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$

i. $f(x)=sen\dfrac{3\pi}{2}$

j. $f(x)=tg^3x^2$

k. $f(x)=arcsen\dfrac{x^2}{3}$

l. $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x}$

m. $f(x)=\sqrt{arctgx}$

n. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

o. $f(x)=(x^2-3)^3$

p. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

q. $f(x)=\sqrt{senx}$

r. $f(x)=7^{x+1}\cdot e^{-x}$

s. $f(x)=\ln 3x+e^{\sqrt{x}}$

t. $f(x)=e^{2x}\cdot tgx$

u. $f(x)=\cos^2 x+e^{senx}$

v. $f(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\cdot e^{1-x}$

w. $f(x)=\log\dfrac{x^2}{3-x}$

x. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

y. $f(x)=arctg(x^2+1)$

z. $f(x)=arctg\dfrac{\sqrt{x}}{2}+1$

aa. $f(x)=\arccos e^{-x}$

bb. $f(x)=arctg\dfrac{1-x}{1+x}$

cc. $f(x)=senx^2-sen^2x$

23. Determina los puntos en los que la derivada de $f(x)=3x^2-2x+1$ es igual a cero.

24. Escribe la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a. $y=x^2-5x+6; en\ el\ \ punto\ de\ abscisa\ x=2$

b. $y=-x^2+2x+5; en\ el\ \ punto\ de\ abscisa\ x=-1$

c. $y=\sqrt{x+1}; en\ el\ \ punto\ de\ abscisa\ x=0$

25. Escribe la ecuación de la recta tangente a $y=x^2+4x+1$ cuya pendiente sea igual a 2.

26. Obtén lo máximos y mínimos (si es que los tienen) de las siguientes funciones:

a. $y=3x^2-2x+5$

b. $y=2x^3-3x^2+1$

c. $y=x^4-4x^3$

d. $y=x^3-12x$

e. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

f. $y=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

g. $y=x^3+3x$

27. Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a. $y=\dfrac{3x+1}{2}$

b. $y=5-2x$

c. $y=x^2-3x+2$

d. $y=2x-x^2$

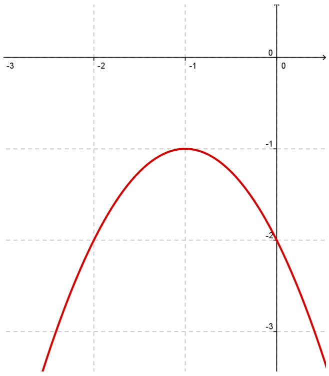
e. $y=x^3$

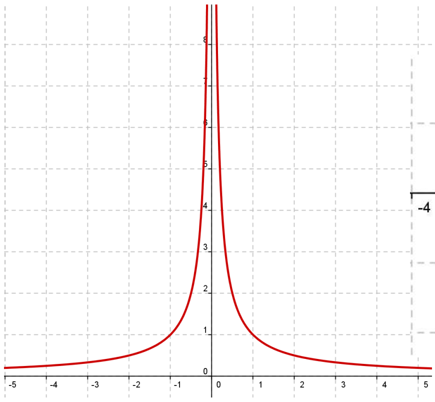
f. $y=x^3-3x$

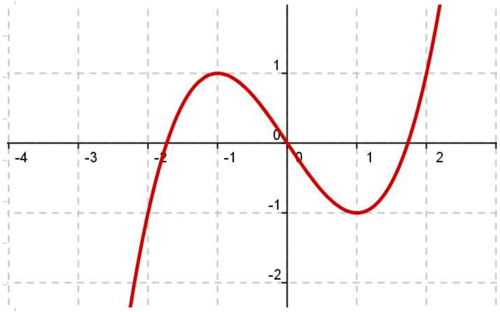
g. $y=\ln x$

h. $y=\dfrac{1}{x}$

28. Indica en las siguientes funciones los valores de x en los que f´ es negativa y en los que f´ es positiva. Indica, además, sus máximos y sus mínimos.







29. Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:

- Es continua.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- Tiene tangente horizontal en (-3,2) y en (1,5).

Indica también si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

30. Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es igual a ceo en (-2,2) y en (2,-1).
- Corta a los ejes en (0,0) y en (4,0).

31. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$

32. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

33. a) ¿Cuál es la derivada de $y = 2x + 8$ en cualquier punto?

    b) ¿Cuánto tiene que valer x para que la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sea igual a 2?

    c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 8$?

34. En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene pendiente igual a 8?

35. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $y + 2x = 0$

36. Indica los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$

37. ¿En qué puntos de $y = \frac{1}{x}$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante? ¿Existe algún punto de tangente horizontal en dicha función?

38. La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

39. Deriva las siguientes funciones aplicando las propiedades de los logaritmos:
   a. $y = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$
   b. $y = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$
   c. $y = \ln\left(x \cdot e^{-x}\right)$
   d. $y = \ln \frac{(3x-5)^3}{x}$
   e. $y = \log(tgx)^2$
   f. $y = \ln x^x$

40. En cada una de las siguientes funciones determina sus máximos y sus mínimos:
   a. $y = x^3 - 3x^2$
   b. $y = x^3 - 3x + 2$
   c. $y = x^4 + 4x^3$
   d. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
   e. $y = 12x - x^3$
   f. $y = -x^4 + x^2$
   g. $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$
   h. $y = x^4 - 8x^2 + 2$

41. Estudia y representa las siguientes funciones:
   a. $y = x^3 - 2x^2 + x$
   b. $y = -x^4 + 2x^2$
   c. $y = \frac{x}{x^2+5x+4}$
   d. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$
   e. $y = \frac{x}{(x+5)^2}$
   f. $y = \frac{2x^2}{x+2}$
   g. $y = \frac{x-3}{x+2}$
   h. $y = \frac{x^2-1}{x}$
   i. $y = \frac{x^3}{3} + 4x$
   j. $y = \frac{1}{(x-2)^2}$
   k. $y = \frac{x}{x^2-16}$
   l. $y = \frac{x}{1-x^2}$
   m. $y = \frac{x+2}{x^2-6x+5}$
   n. $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$
   o. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$
   p. $y = \frac{x^2}{1-x^2}$
   q. $y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$
   r. $y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$
   s. $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$
   t. $y = \frac{x^2-5}{2x-4}$

42. Indica una función de segundo grado si sabes que pasa por (0,1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2,-1) vale 0.

43. Indica el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

44. Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto A(2,1) y que pasa por el punto B(5,-2).

45. Determina el valor de x para que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ y $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

46. Indica a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en x = -4 y en x = 0 y que pase por (1,1).

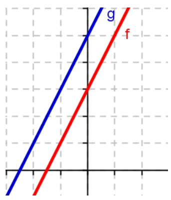
47. Calcula el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pasen por el origen de coordenadas.

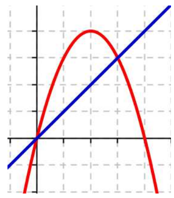
48. Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo [-1,1] y positiva para cualquier otro valor de x.

49. Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f´(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?

50. ¿Qué relación existe entre f y g?

    ¿Y entre f´ y g´?



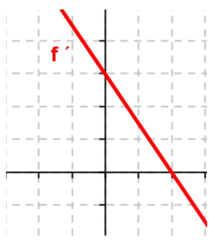


51. ¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en que la tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (0,0) y (3,3)? En caso afirmativo indícalo.

52. Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \dfrac{-b}{2a}$.

53. Si $f´(2) = 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
    a. La función f tiene un máximo o un mínimo en x=2.
    b. La recta tangente en x=2 es horizontal.
    c. La función pasa por el punto (2,0).

54. Esta es la gráfica de f´, la función derivada de f:



    a. ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?
    b. ¿Es f creciente o decreciente?

55. El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

    El coste medio por unidad es $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

    a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?
    b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que indicaste en el apartado a).

56. La función $f(x)=\dfrac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar (f(x) en miles de euros, x en años).

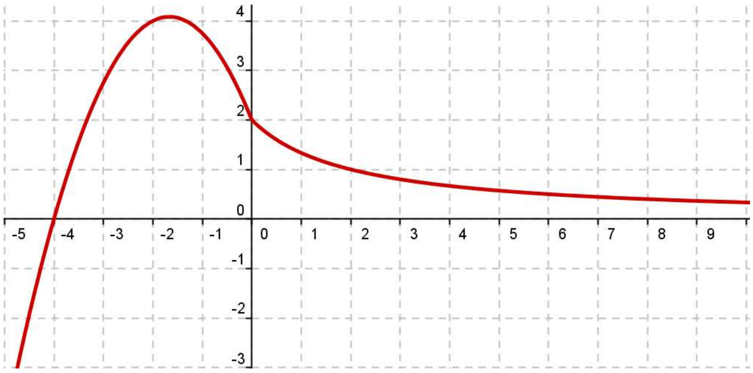
a. Represéntala gráficamente.

b. ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c. ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

AUTOEVALUACIÓN 1

1. Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde:



a. ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0,2] y [-4,2]?

b. ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c. ¿Para qué valores de x es f´(x)>0?

d. Sabemos que la tangente en el punto de abscisa x=0 es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale f´(0)?

2. Dada $f(x)=x^2-3x$, prueba que f´(2)= -7 aplicando la definición de derivada.

3. Indica la derivada de las siguientes funciones:

a. $y=\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}$

b. $y=\dfrac{x}{3}\cdot e^{-x}$

c. $y=\cos^2(\pi . x)$

d. $y=\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^3$

4. Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y=\ln x^2$ en el punto de abscisa x=1.

5. Determina los puntos singulares de la función $y=2+(1-x)^3$. ¿Tiene esta función algún máximo o mínimo relativo?

6. Determina las asíntotas y los puntos singulares de la función $y=\dfrac{x^2-2x+4}{2-x}$. Realiza, además, un esbozo de su gráfica.

7. Representa la función $y=x^3-12x+16$

8. Estudia y representa: $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

9. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$

AUTOEVALUACIÓN 2

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)}$

a. Indicar su dominio de definición.
b. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Determinar sus máximos y sus mínimos.

a) $\{Sol:\Re-\{1,-1\}\}$;

b) $\left\{Sol:\begin{array}{c} f(x)\ crece\ en\ \left(3-2\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,3+2\sqrt{2}\right) \\ f(x)\ decrece\ en\ (-\infty,-1)\cup\left(-1,3-2\sqrt{2}\right)\cup\left(3+2\sqrt{2},+\infty\right)\end{array}\right\}$;

c) $\left\{Sol:\begin{array}{l} x=3-2\sqrt{2}\ es\ un\ mínimo \\ x=3+2\sqrt{2}\ es\ un\ máximo\end{array}\right\}$

2. Sean la parábola $y=x^2-4x+4$ y un punto (p, q), tal que $0\le p\le 2$. Calcular las coordenadas de (p,q) para que el área del rectángulo formado por los lados paralelos a los ejes con vértices opuestos (0,0) y (p, q) sea máxima.

$$\left\{Sol:(p,q)=\left(\frac{2}{3},\frac{16}{9}\right)\right\}$$

3. Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de radio a.

$$\left\{Sol: base=altura=\sqrt{2}a\right\}$$

4. Se considera la función $f(x)=x^2+m$, donde m>0. Se pide:

a) Para cada valor de m, hallar el valor de a>0, tal que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (a, f(a)) pase por el origen de coordenadas.
b) Determinar el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de f(x).

$$\left\{Sol:\begin{array}{ll} a) & m=a^2 \\ b) & m=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}$$

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

a. Indicar su dominio de definición.
b. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Determinar sus máximos y sus mínimos.

a) $\{Sol:\Re\}$

b) $\left\{Sol: \begin{array}{c} f(x)\ crece\ en\ (-1,0) \\ f(x)\ decrece\ en\ (-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \end{array}\right\}$

c) $\left\{Sol: \begin{array}{c} x=-1\ es\ un\ mínimo \\ x=0\ es\ un\ máximo \end{array}\right\}$

2. Determinar la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 para que su área sea máxima.

$$\left\{Sol: base=\frac{8}{3}\quad y\quad altura=\frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$$

3. Una pista de velocidad está formada por una región rectangular con un semicírculo en cada extremo. Si el perímetro es de 200 metros, hallar las dimensiones de la pista para que el área de la zona rectangular sea máxima.

$$\{Sol: 50m\ de\ base\ el\ rectángulo\ \ y\,15.92m\ de\ radio\ los\ semicírculos\}$$

4. Se considera la función $f(x)=\frac{1}{x}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto P(a, f(a)) para a>0.
b) Encontrar los puntos de corte de la recta tangente del apartado anterior con los ejes de coordenadas.
c) Determinar el valor de a >0 que hace que la distancia entre los dos puntos de intersección hallados sea la mínima.

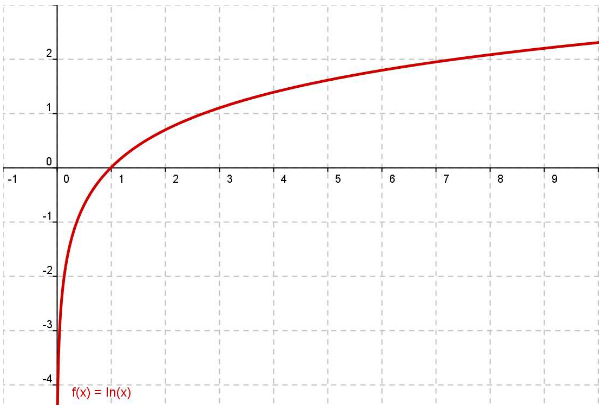
$$\left\{Sol: \begin{array}{l} a)\quad y=-\dfrac{1}{a^2}x+\dfrac{2}{a} \\ b)\ A\left(0,\dfrac{2}{a}\right)\ y\ B(2a,0) \\ c)\quad a=1 \end{array}\right\}$$

EJERCICIOS DE REPASO BLOQUE ANÁLISIS.

1. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:
   a. $y = \log(1-x)$
   b. $y = \dfrac{1}{\cos x}$

2. Representa las funciones:
   a. $y = \left|x^2 + 2x - 3\right|$
   b. $y = \log_2(x+3)$

3. Esta es la gráfica de la función $f(x) = lnx$.



A partir de ella representa:

a) $y = f(x) + 2$
b) $y = f(x-2)$
c) $y = -f(x)$

4. Si y = f(x) pasa por el punto (2,-3), di un punto de:
   a. $y = f(x) + 4$
   b. $y = f(x+4)$
   c. $y = 2f(x)$
   d. $y = -f(x)$

5. Representa y=Ent(x), xϵ[-1,3].

6. Una población de insectos crece según esta función: $y = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x}$ (x =tiempo en días; y = número de insectos en miles)
   a. ¿Cuál es la población inicial?
   b. Calcula cuánto tarda en llegar a 10000 insectos.

7. A partir de las funciones: $f(x) = e^x$; $g(x) = senx$; $h(x) = \sqrt{x}$, obtén:
   a. $(g \circ h)(x)$
   b. $(f \circ g)(x)$
   c. $(h \circ f)(x)$

8. En la función $f(x) = \begin{cases} 3x - b & si\ x < 2 \\ 3 & si\ x = 2 \\ -2x + 9 & si\ x > 2 \end{cases}$
   a. Calcula b para que tenga límite en x=2.
   b. Después de determinar b, explica si f es continua en x=2.

9. Calcula, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = \frac{3x-5}{2}$.

10. Indica la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$,que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

11. Calcula los puntos singulares de la función $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$, indica si son máximos o mínimos y con ayuda de sus ramas infinitas represéntala.

12. Determina la función derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{tgx}$

b. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

c. $f(x) = arctgx^2$

d. $f(x) = e^{\pi}$

e. $f(x) = \dfrac{arcsenx}{2}$

f. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

13. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a. $y = x^3 - 12x^2$

b. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

14. En la función $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ estudia:

a. Las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.
b. Los máximos y los mínimos relativos.
c. Representa su gráfica.

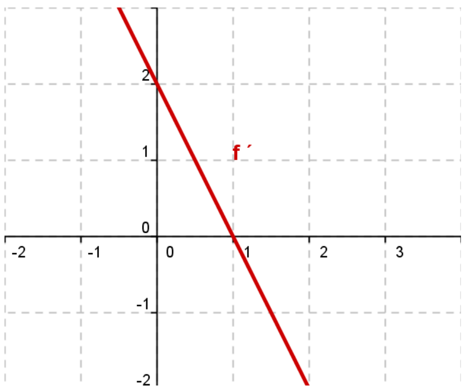
15. ¿Cuál de estas funciones tiene una asíntota oblicua?

a. $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x-1}$ b. $y = 1 + \dfrac{3}{x}$ c. $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x}$

Determina y sitúa la curva con respecto a ella.

16. Calcula a y b de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en (2,1).

17. Esta es la gráfica de f´, la función derivada de f.



a)Di para que valores de x es f creciente y para los cuales es f decreciente.

b) ¿Tiene f algún punto de tangencia horizontal? Justifícalo.