BLOQUE 3:

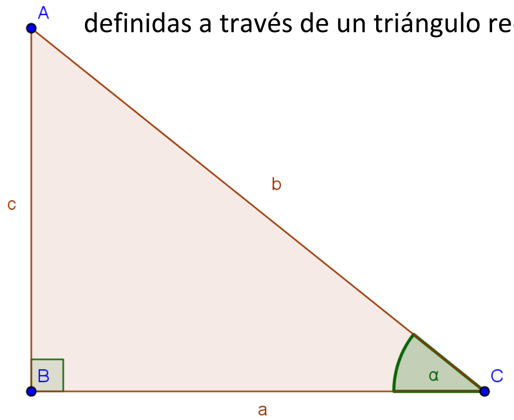
TRIGONOMETRÍA

- Resolución de triángulos
- Funciones y fórmulas trigonométricas.

3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

3.1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Recordamos las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente) de un ángulo agudo, α, definidas a través de un triángulo rectángulo construido sobre él:



$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \qquad \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

Entre ellas se dan además las siguientes relaciones fundamentales:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le sen\alpha, \cos\alpha \le 1$$

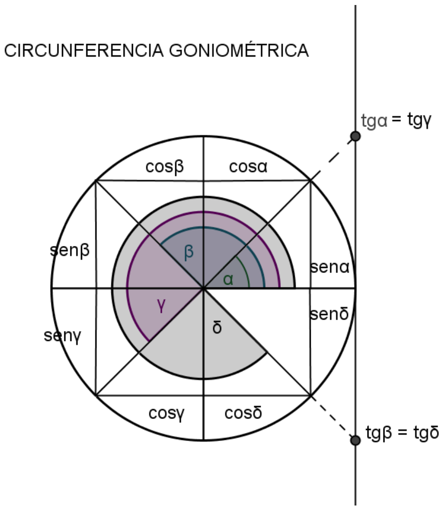
$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$1 + \cot g^2\alpha = cosec^2\alpha$$

3.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Como podemos ver en la circunferencia goniométrica, el signo de las razones trigonométricas depende del cuadrante en el que se encuentren:

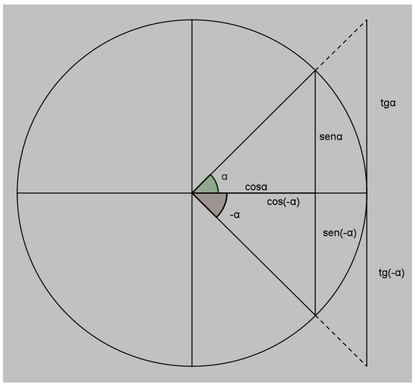


	sen	cos	Tg
I cuadrante	+	+	+
$90° = \frac{\pi}{2}$ rad	1	0	∄
II cuadrante	+	-	-
180° = π rad	0	-1	0
III cuadrante	-	-	+
$270° = \frac{3\pi}{2}$ rad	-1	0	∄
IV cuadrante	-	+	-
0° = 360° = πrad	0	1	0

3.3 RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

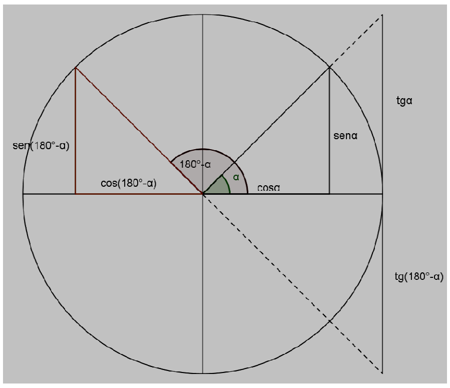
Las siguientes relaciones son muy útiles y muy fáciles de visualizar:

- **ÁNGULOS OPUESTOS:** α **y -** α



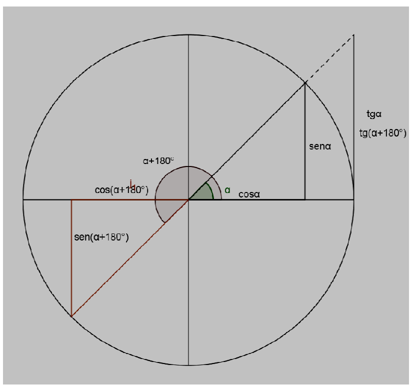
$$\boxed{\begin{aligned} sen(-\alpha) &= -sen\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ tg(-\alpha) &= -tg\alpha \end{aligned}}$$

- **ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS:** α **y 180° -** α



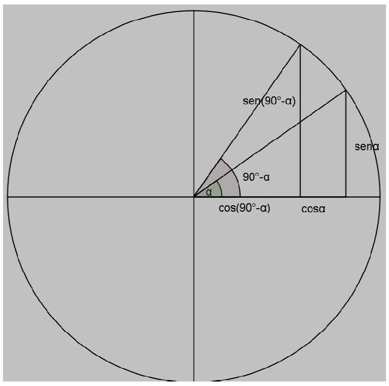
$$\boxed{\begin{aligned} sen(180^\circ - \alpha) &= sen\alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos\alpha \\ tg(180^\circ - \alpha) &= -tg\alpha \end{aligned}}$$

- **ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180°:** α **y** α **+ 180°**



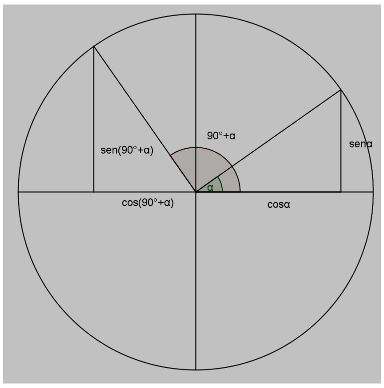
$$\boxed{\begin{aligned} sen(\alpha + 180^\circ) &= -sen\alpha \\ \cos(\alpha + 180^\circ) &= -\cos\alpha \\ tg(\alpha + 180^\circ) &= tg\alpha \end{aligned}}$$

- **ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS:** α **y 90° -** α



$$sen(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = sen\alpha$$
$$tg(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

- **ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 90°:** α **y** α **+ 90°**



$$sen(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = -sen\alpha$$
$$tg(90^\circ + \alpha) = \frac{\cos\alpha}{-sen\alpha} = -\frac{1}{tg\alpha}$$

3.4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es determinar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

En un triángulo rectángulo tenemos que tener en cuenta las relaciones entre sus lados y ángulos y que además siempre conocemos uno de sus ángulos, el recto.

Elementos conocidos	Cómo se calculan los demás
CASO I: Dos lados	El tercer lado se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras
	El ángulo que forman dos lados conocidos se determina a partir de la razón trigonométrica que los relaciona
CASO II: Un lado y un ángulo	Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y con el ángulo conocidos.
	El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos.

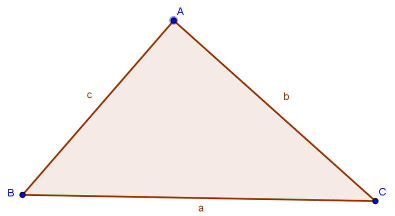
3.5 <u>RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALQUIERA</u>

Para resolver un triángulo que no es rectángulo tenemos dos opciones:

- o Descomponer dicho triángulo en dos triángulos rectángulos gracias a una de sus alturas
- o Utilizar los teoremas del seno y el coseno para calcular los elementos desconocidos.

- **TEOREMA DEL SENO:**

En un triángulo cualquiera de lados a, b c, y de ángulos $\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{C}}$, se cumplen las siguientes igualdades:



$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}}$$

- **TEOREMA DEL COSENO:**

En un triángulo cualquiera de lados a, b c, y de ángulos $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

Análogamente:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}} \qquad \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}}$$

Elementos conocidos	Cómo se calculan los demás
CASO I: Dos ángulos y un lado	Con el teorema del seno podemos calcular el otro lado
CASO II: Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos	Con el teorema del seno podemos calcular otro ángulo
	Con el teorema del coseno calculamos el otro lado
CASO III: Los tres lados	Con el teorema del coseno calculamos cualquier ángulo
CASO IV: Dos lados y el ángulo que forman	Con el teorema del coseno calcularemos el otro lado y, después, con el teorema del seno, determinaremos cualquiera de los ángulos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Pasa a grados los siguientes ángulos expresados en radianes:

$a)\ \frac{\pi}{6}$ $\quad b)\ \frac{2\pi}{3}$ $\quad c)\ \frac{\pi}{5}$ $\quad d)\ \frac{3\pi}{2}$

2. Pasa a radianes los siguientes ángulos expresados en grados:

a) 15º $\quad$ b) 45º $\quad$ c) 240º $\quad$ d) 330º

3. Expresa en grados y en radianes el ángulo que forman las manecillas del reloj a las 2 horas y 30 minutos.

4. ¿Cuántos grados gira la tierra en 3 horas y 20 minutos?

5. Los catetos de un triángulo rectángulo ABC miden : b = 4m y c = 3m . Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo mayor.

6. Halla todas las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

7. Halla, comparando con ángulos conocidos (sin calculadora), las razones trigonométricas de:

a) 120º $\quad$ b) 210º $\quad$ c) 300º $\quad$ d) 225º $\quad$ e) 330º
f) 150º $\quad$ g) 240º $\quad$ h) -60º $\quad$ i) -225º $\quad$ j) 315º
k) 1215º $\quad$ l) 4440º $\quad$ m) $\frac{23\pi}{6} rad$ $\quad$ n) $\frac{29\pi}{4} rad$ $\quad$ ñ) $\frac{26\pi}{3} rad$

8. Calcula todos los valores del ángulo en cada uno de los casos siguientes:

a) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
d) $\cos x = 2$ $\quad$ e) $\operatorname{cosec} x = -2$ $\quad$ f) tg x = 0

9. Halla el resto de razones trigonométricas del ángulo con los datos que se dan:

a. $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$, $\alpha \in$ II cuadrante

b. $sen\,\alpha = \frac{4}{5}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

c. $\cot\alpha = -0'8,\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

d. $\operatorname{cosec}\alpha = 1'2;\ 810^\circ < \alpha < 900^\circ$

e. $tg\,\alpha = \frac{4}{3}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

f. $sen\,\alpha = -\frac{3}{5}$; tg α >0

g. $tg\,\alpha = -3, sen\,\alpha > \cos\alpha$

10. A 30 m de la chimenea de una fábrica se ve la cima de ésta bajo un ángulo de 68º. Calcula la altura de la chimenea.

11. Desde la torreta de un faro, que está a 50 m sobre el nivel del mar, se ve un barco bajando el teodolito 40º. ¿A qué distancia del faro se encuentra el barco?

12. Calcula los ángulos de un rombo de perímetro 20 cm y de diagonal mayor 8 cm.

13. Halla la longitud del lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. ¿Y si estuviera circunscrito?

14. La altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles mide 12 cm y el ángulo desigual del triángulo es de 30º. Halla sus otros dos ángulos, perímetro y área.

15. Un triángulo equilátero tiene de perímetro 30 cm. Calcula su altura y su área.

16. Un aerotaxi vuela a 400 km/h si no hay viento. En un vuelo hacia el Este, con un viento Sur de 60 km/h, ¿cuál es la dirección de vuelo?

17. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 50 cm y los ángulos iguales miden, cada uno, 40º. Determina el perímetro, tercer ángulo y área de ese triángulo.

18. Calcula el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio.

19. Calcula el lado de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.

20. Una circunferencia tiene 4 cm de radio. Calcula la longitud de la cuerda correspondiente a un ángulo central de 68º.

21. Calcula la longitud de la sombra de un árbol de 18 m de altura, cuando los rayos solares forman con el suelo un ángulo de 22º.

22. Una escalera de 6’50 m de longitud se apoya en una pared, formando con ella un ángulo de 18º. Calcula la altura que alcanza.

23. Para subir con una carretilla un desnivel de 1’50 m de altura, se coloca un tablón de apoyo. Calcula la longitud mínima que debe tener dicho tablón, si se desea que su inclinación no supere los 15º.

24. Desde un determinado punto situado en el suelo se observa una torre bajo un ángulo de 22º. Si nos apartamos 10 m más de la base de la torre, el ángulo de visión es de 15º. ¿Qué altura tiene la torre? ¿A qué distancia de la torre se encuentra el primer punto de observación?

25. Con objeto de determinar la altura de una montaña situada en las proximidades de la costa, se lanza una visual desde un barco, obteniéndose un ángulo de elevación de 26º13’17”. Después de que el barco recorre una distancia de 1 km en dirección a la montaña, se lanza una segunda visual, obteniéndose un ángulo de 39º43’2”. ¿Cuál es, en metros, la altura de la montaña?

26. Desde un punto A se trazan dos tangentes a una circunferencia de radio 10 cm. Se sabe que la distancia del centro de la circunferencia al punto A es de 25 cm. Calcula el ángulo que forman las tangentes.

27. Una construcción en forma de pirámide cuadrangular mide 40 m de altura, y su base, 50 m de lado. Halla el ángulo de inclinación de sus caras laterales respecto del suelo.

28. Desde un punto A al pie de una colina, una persona camina 300 m, subiendo una pendiente de 24º, y a continuación, recorre 100 m en la misma dirección por una pendiente de 31º hasta alcanzar la cima de la colina. Calcula la altura de la colina, la distancia en línea recta desde A a la cima de la colina, y el ángulo de elevación de la misma observado desde A.

29. Un avión vuela en línea horizontal hacia el Este. Desde un punto situado en el suelo, al Sur del avión, se ve a éste bajo un ángulo de 45º. Cuando el avión ha volado 1000 m, desde ese punto se le ve con un ángulo de elevación de 30º. ¿Cuál es la altura de vuelo?

30. Desde un avión que vuela a 950 m de altura se observa un helicóptero que está a 200 m de altura, bajo un ángulo de depresión de 28º. ¿A qué distancia se encuentran ambos?

31. En una circunferencia de 7 cm de radio trazamos una cuerda de 9 cm. ¿Qué ángulo central abarca dicha cuerda?

32. Halla la longitud de una cuerda correspondiente a un ángulo central de 40º en una circunferencia de 10 cm de radio.

33. Resuelve los siguientes triángulos:

a. c=5 cm , A=60º, B=40º
b. a=10 cm , b=12 cm , c=14 cm
c. a=3 m , b=2 m , c=6 m
d. a=7 m , b=12 m , C=50º
e. A=30º, a=3 cm , b=8 cm
f. A=30º, a=3 cm , b=6 cm
g. A=30º, a=3 cm , b=4 cm
h. b=11 cm , c=17 cm , C=140º
i. b=7 cm , c=10 cm , A=40º
j. a=7cm , b=10 cm , c=6 cm
k. a=30 m , b=40 m , A=40º
l. a=35 m , b=20 m , c=40 m
m. A=55º , B=72º , a=11 m
n. a=6 cm , b=4 cm , A=12º
o. a=6´5 m , b=7 m , A=57º

34. Dos barcos salen del mismo puerto con rumbos que difieren en un ángulo de 25º. Suponiendo que han navegado en línea recta, si uno ha recorrido 200 Km y el otro 320 Km, ¿cuál es la distancia que los separa?

35. Una persona debe ir de A a C bordeando un campo cultivado. De A a B hay 50 m y de B a C hay 70 m; el ángulo B mide 112º 40’. ¿Cuántos metros menos recorrería si siguiese el camino recto de A a C?

36. Calcula los lados y ángulos de un paralelogramo cuyas diagonales, de 6 m y 8 m , se cortan en un ángulo de 50º .

37. Estamos a un lado de una autopista y queremos saber la distancia entre dos puntos A y B que están al otro lado. Nos situamos en un punto P y marcamos otro, Q, a 400 m. Desde P y Q medimos, con el teodolito, los siguientes ángulos: APB=36º, BPQ=32º, AQP=43º y BQP=80º. Halla la distancia entre A y B.

38. La resultante de dos fuerzas concurrentes vale 40 kg , y forma con cada una de ellas, ángulos de 45º y 30º. Calcula el valor de dichas fuerzas.

39. Resuelve el triángulo en el que se conocen: $a = 10\ cm,\quad b = 5\ cm \quad \text{y} \quad \mathrm{C} = 60^{\circ}$

40. Un futbolista ve la portería bajo un ángulo de 60º y está a 5 m y 8 m de los postes. ¿Cuál es el ancho de la portería? ¿Cuál es el área del triángulo formado?

41. Las manecillas de un gran reloj miden, 50 cm la horaria y 70 cm la minutera. Averigua el ángulo que forman a las 8 horas, y la distancia entre sus extremos.

42. Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido mide 60º. Halla los otros dos ángulos.

43. Los lados de un triángulo miden 2*x*, 3*x* y 5*x* cm. Calcula el ángulo α opuesto al lado mediano. Interpreta el resultado.

44. Halla razonadamente (comparando con ángulos conocidos del primer cuadrante):

   a. $\cos 120^{\circ} - \operatorname{cosec} 330^{\circ} - \operatorname{tg} 225^{\circ} =$

   b. $(\cos 30^{\circ} - \cos 60^{\circ}) : (\operatorname{tg} 60^{\circ} - \operatorname{tg} 30^{\circ}) =$

   c. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 120^{\circ} - 3\operatorname{tg} 300^{\circ} - \frac{1}{6}\cos 150^{\circ} - 2\operatorname{cotg} 240^{\circ} =$

RECUERDA:

$$\pi \text{ rad} = 180° \Rightarrow \begin{cases} x\ grados = \dfrac{\pi}{180} \cdot x\ rad \\ n\ rad = \dfrac{180}{\pi} \cdot n\ grados \end{cases}$$

	sen	**cos**	**tg**
30° = $\frac{\pi}{6} rad$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45° = $\frac{\pi}{4} rad$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60° = $\frac{\pi}{3} rad$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

AUTOEVALUACIÓN 1

1. De un triángulo rectángulo ABC conocemos la hipotenusa a = 12cm y el cateto c = 7cm. Determina sus ángulos agudos.

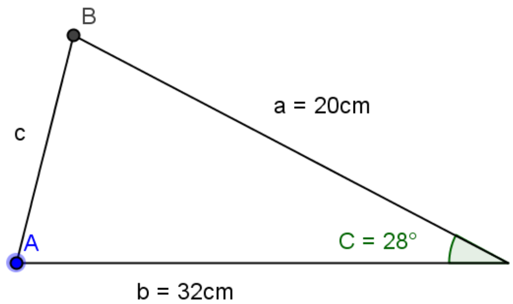
2. Expresa con un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154°, 207°, 318°, 2456°.

3. Si $\text{sen}\alpha = 4/5$ y $\alpha > 90°$, calcula sin determinar el ángulo α:

   a. $\cos\alpha$
   b. $\text{tg}\alpha$
   c. $\text{sen}(180° + \alpha)$
   d. $\cos(90° + \alpha)$
   e. $\text{tg}(180° - \alpha)$
   f. $\text{sen}(90° + \alpha)$

4. Si $\text{tg}\alpha = -3{,}5$, indica α con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo [0, 360°) y obtén su seno y su coseno.

5. Calcula el área del triángulo ABC



6. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 50° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.

7. Resuelve el triángulo ABC en estos casos:

   a. c = 19cm a = 33cm $\hat{B} = 48°$
   b. a = 15 cm b = 11cm $\hat{B} = 30°$

8. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia en un mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre los dos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50° y el otro con un ángulo de 38°.

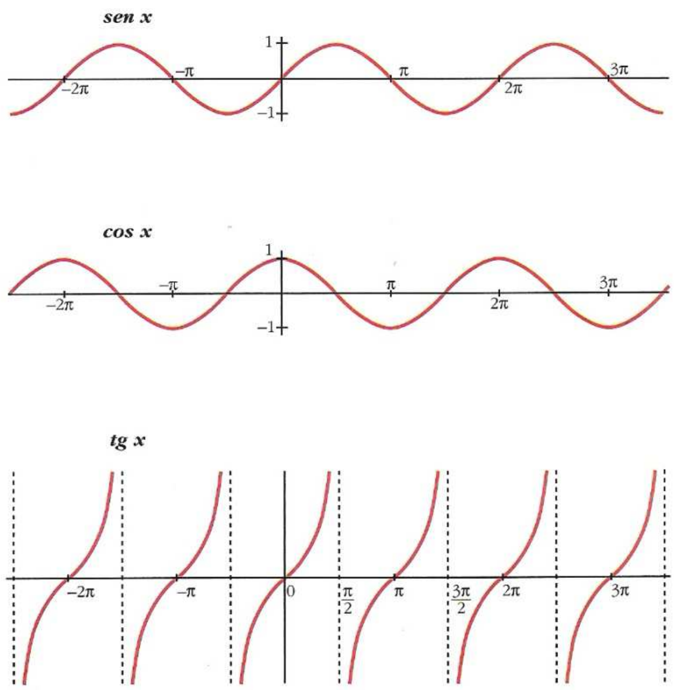
   ¿Qué distancia hay de cada uno de ellos a la cometa?

9. Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52°. Calcula la longitud de la diagonal mayor.

3.6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES

A las funciones y=senx, y=cosx e y= tgx se les llama funciones trigonométricas o funciones circulares.

Se trata de funciones periódicas en un intervalo de longitud 2π, puesto que los ángulos están relacionados de la siguiente forma: $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ (α' y α en radianes y $k \in Z$), o bien, $\alpha' = \alpha + 360° k$ (α' y α en grados y $k \in Z$)



La función y = tgx no está definida en los puntos de la forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde $k \in Z$.

3.7 FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

- **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO SUMA:**

$$\boxed{\begin{aligned} sen(\alpha+\beta) &= sen\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.sen\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta - sen\alpha.sen\beta \\ tg(\alpha+\beta) &= \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta} \end{aligned}}$$

- **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA RESTA DE DOS ÁNGULOS**

$$\boxed{\begin{aligned} sen(\alpha-\beta) &= sen\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.sen\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta + sen\alpha.sen\beta \\ tg(\alpha-\beta) &= \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha.tg\beta} \end{aligned}}$$

- **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE:**

$$\boxed{\begin{array}{l} sen(2\alpha) = 2sen\alpha.\cos\alpha \\ \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ tg(2\alpha) = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \end{array}}$$

- **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD**

$$\boxed{\begin{array}{l} sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\ tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{array}}$$

- **SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y COSENOS**

$$\boxed{\begin{array}{l} senA + senB = 2\cdot sen\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2} \\ senA - senB = 2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot sen\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2\cdot sen\dfrac{A+B}{2}\cdot sen\dfrac{A-B}{2} \end{array}}$$

3.8 <u>ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS</u>

Las ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen funciones trigonométricas actuando sobre un ángulo incógnita que, como en todas las ecuaciones, hay que despejar.

Salvo que se pida expresamente, el valor de la incógnita puede darse indistintamente en grados o en radianes.

Las soluciones que se obtengan deben ser comprobadas sobre la ecuación inicial, pues es frecuente que se obtengan soluciones extrañas (valor que se obtiene en el proceso de resolución pero que no verifica la ecuación)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Simplifica las siguientes expresiones :

a) $(senx+\cos x)^2+(senx-\cos x)^2$ b) $2sen^2x+\cos 2x$ c) $\cos 2x-2\cos^2 x$

d) $\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)-sen^4\left(\frac{x}{2}\right)$ e) $\frac{sen2x}{sen^2x}$ f) $\frac{\cos^2 x}{1-senx}$

g) $\frac{sen2x}{1+\cos 2x}$ h) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ i) $\frac{\cot g^2x}{1+\cot g^2x}$

2. Comprueba las siguientes identidades :

a) tg x + cotg x = sec x · cosec x b) sec x – cos x = tg x · sen x

c) $tg^2\alpha-sen^2\alpha=tg^2\alpha\cdot sen^2\alpha$ d) $\cot g^2\alpha-\cos^2\alpha=\cot g^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

e) $\frac{\cos\alpha}{1-sen\alpha}=\frac{1+sen\alpha}{\cos\alpha}$ f) $\frac{\cot g\alpha+tg\alpha}{\cot g\alpha-tg\alpha}=\sec 2\alpha$

g) $\sec^2 x\cdot\cos ec^2x=\sec^2 x+\cos ec^2x$ h) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-sen^2\alpha$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas :

a) 2 sen x + 1 = 0 b) cos x – sen 2x = 0

c) tg x = 2 sen x d) 3 tg x = 2 cos x

e) 5 sen x + 3 cos 2x = 4 f) 2 cos 2x = -3 sen x – 2 sen^2x

g) $2sen^2x-senx-1=0$ h) cos 2x + sen x = 1

i) sen 2x · cos x = 6 sen^3x j) cos 2x = sen x

k) cos 2x + cos x = 0 l) $2\cos^2 x+\cos 2x\cdot\cos x=0$

m) sec x = $\sqrt{2}$ cotg x n) $\cot g^2x=1-\cos ecx$

o) $1+2tgx=3tg^2x$ p) cos 2x + 6 $\cos^2 x$ = 1

q) sen 2x = - cos x r) 3 cotg x = 4 – tg x

s) 5 sec x – 4 cos x = 8 t) $sen^4x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$

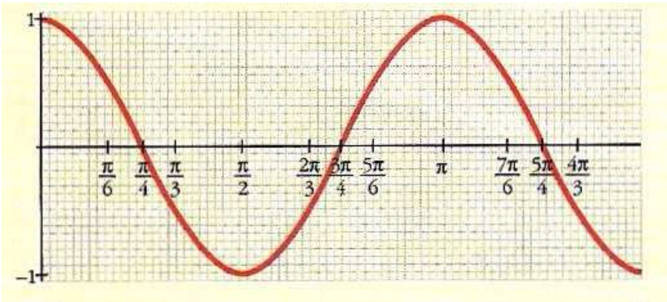
AUTOEVALUACIÓN 2

1. Expresa en grados: $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{2}$ rad, 2 rad.

2. Expresa en radianes y da el resultado en función de π : 60°, 225° y 330°.

3. En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?

4. Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cual es su periodo:



a)y = cosx   b) y = cos2x c) y = 2cosx

Completa estos puntos para que pertenezcan a la gráfica: $\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\ y\ -\frac{\pi}{4}$.

5. Si cos α = $\frac{-1}{4}$ y $\alpha < \pi$, determina:

a) sen2 α

c) tg $\frac{\alpha}{2}$

b)cos ($\pi + \alpha$)

d)sen($\frac{\pi}{6} - \alpha$)

6. Demuestra cada una de estas igualdades:

a) $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

b) $sen(\alpha + \beta) \cdot sen(\alpha - \beta) = sen^2\alpha - sen^2\beta$

7. Resuelve:

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$b)\ 2tgx \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - senx = 1$

8. Simplifica:

a) $$\frac{sen60^\circ + sen30^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}$$

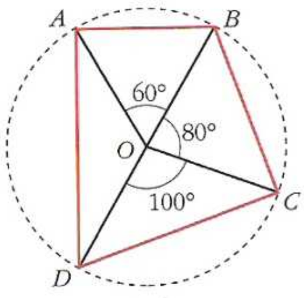
b) $$\frac{sen^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\left(1+tg^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

EJERCICIOS DE REPASO BLOQUE 3 (TRIGONOMETRÍA)

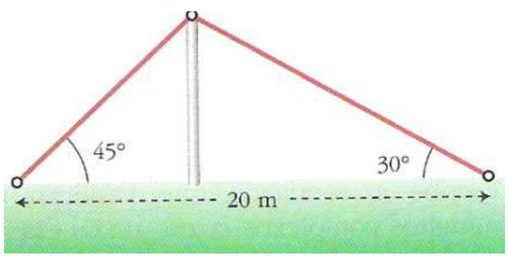
1. En el triángulo ABC, rectángulo en A, conocemos tgB = 1,5 y b = 6cm.

   Calcula los lados y los ángulos del triángulo.

2. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio



3. Colocamos un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura. ¿Cuánto miden el mástil y el cable?



4. Justifica si existe algún ángulo α tal que tgα = $\frac{2}{3}$ y senα = $\frac{1}{2}$

5. Las diagonales de un paralelogramo miden 16 y 28 cm y forman un ángulo de 48°. Calcula el perímetro y el área del paralelogramo.

6. Busca en cada caso un ángulo del primer cuadrante que tenga una razón trigonométrica igual que el ángulo dado y di cual es esa razón:

   a) 297°

   b) 1252°

   c) -100°

   d) $\frac{13\pi}{5}$

7. Si tg α =2 y cos α > 0, calcula:

a) $\cos 2\alpha$

b) $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

c) $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

d) $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

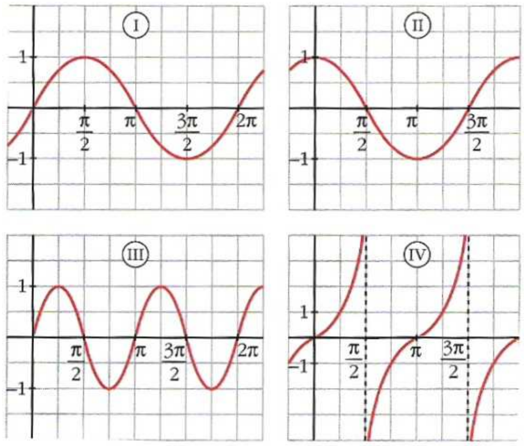
8. Asocia a cada gráfica su fórmula correspondiente:

a) $y = tgx$

b) $y = sen2x$

c) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

d) $y = sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$



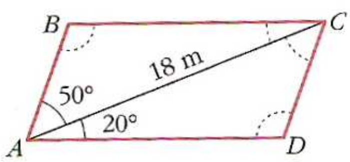
9. Demuestra que: $\cos^4 x - sen^4 x = 2\cos^2 x - 1$

10. Resuelve:

a) $2senx + \cos x = 1$

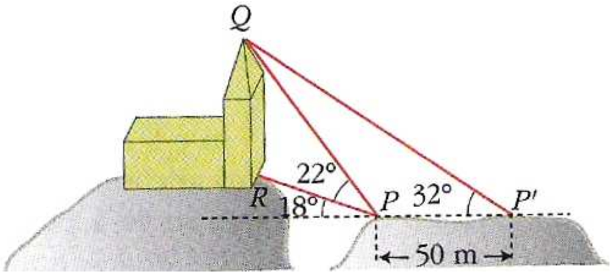
b) $\begin{cases} sen3x + seny = \frac{3}{2} \\ \cos\frac{3x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

11. Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:

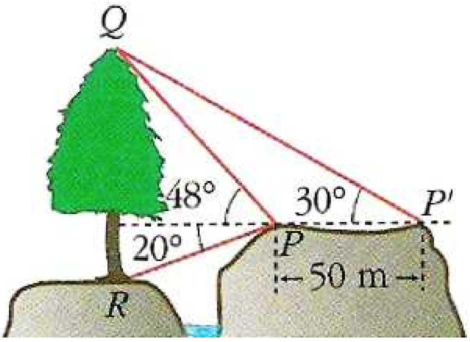


$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50°$.

12. Calcula la altura de QR con los datos de la figura:



13. Calcula la altura del árbol QR con los datos de la figura:



14. Explica si las siguientes igualdades referidas a un triángulo ABC, rectángulo en A son verdaderas o falsas:

a) $a = \dfrac{b}{senA}$

b) $c = a.\cos B$

c) $c = \dfrac{b}{tgC}$

d) $b = a.senC$

e) $tgB.tgC = 1$

f) $c.tgB = b$

g) $senB - \cos C = 0$

h) $a = \dfrac{b}{\cos C}$

i) $b = \dfrac{c}{tgB}$

j) $\sqrt{1 - sen^2 B} = \dfrac{c}{a}$

k) $senB \cos C = 1$

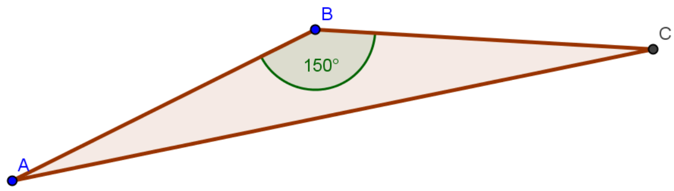
l) $\dfrac{senB}{\cos C} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Si A, B y C son los tres ángulos de un triángulo, demostrar que se cumple la igualdad:

$$\cos(A-C)-\cos B=2\cos A\cdot\cos C$$

2. Tres puntos A, B y C están situados sobre un plano de modo que los segmentos AB y BC miden 6 y 9 unidades, respectivamente, y la amplitud del ángulo determinado por ellos es de 150°. Calcular la distancia entre los puntos A y C.



3. Sabiendo que $sen\alpha=\frac{1}{5}$ y que α es un ángulo del segundo cuadrante, calcular de forma razonada (sin hallar el ángulo) los valores de:

   a) $sen2\alpha$

   b) $tg\frac{\alpha}{2}$

   c) $sen\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

4. a) Calcular todos los ángulos x que verifican la ecuación: $\cos^2 x=3sen^2 x$

b) Resolver este sistema de ecuaciones, hallando las soluciones comprendidas entre 0 y 2π radianes.

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ senx+\cos y=\sqrt{2} \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN 4

1. Hallar la medida del lado desigual de un triángulo isósceles, sabiendo que sus lados iguales miden 40 cm y que la amplitud de sus ángulos iguales es de 30°.

2. Siendo A, B y C los ángulos de un triángulo, demostrar que:

$$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$$

3. Sea α un ángulo del cuarto cuadrante tal que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Calcular de forma razonada (sin hallar el ángulo) los valores de:

   a. $tg\,2\alpha$

   b. $sen\,\frac{\alpha}{2}$

   c. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$

4. a) Calcular todos los ángulos x que verifican la ecuación:

$$tg^2 x - 3 = 2tgx$$

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, hallando las soluciones comprendidas entre 0° y 360°.

$$\begin{cases} senx + \cos y = \sqrt{2} \\ 5senx - 3\cos y = \sqrt{2} \end{cases}$$