BLOQUE 1:

ARITMÉTICA

- Números reales
- Números complejos
- Sucesiones

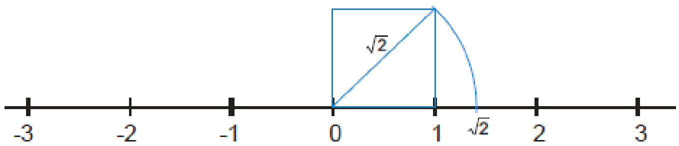
1. NÚMEROS REALES

1.1 ***LA RECTA REAL*:** en la recta real podemos distinguir los siguientes conjuntos

$$\begin{cases} N \text{ es el conjunto de los números naturales (enteros positivos)} \\ Z \text{ es el conjunto de los números enteros (positivos y negativos)} \\ Q \text{ es el conjunto de los números racionales (se pueden poner como cociente de dos números enteros)} \\ I \text{ es el conjunto de los números irracionales (no se pueden poner como cociente de dos números enteros)} \\ R \text{ es el conjunto de números reales } (R = Q \cup I) \end{cases}$$

1.2 ***REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS REALES*.** Los números reales, al igual que los racionales, también se pueden representar en una recta, la recta real.

Vamos a verlo con un ejemplo, representemos $\sqrt{2}$



Representemos $\dfrac{3}{5}$

Ejercicio:

Representa: $a)\ 2{,}3561\ldots \qquad b)\dfrac{14}{3}$

APROXIMACIONES Y ERRORES

En general, al utilizar un número real sólo necesitamos una parte de su desarrollo decimal redondeando el resto de las cifras por defecto o por exceso.

Número de cifras significativas: es el número de cifras exactas que utilizamos para describir una magnitud o un valor numérico. Depende de la necesidad de la situación que queramos describir y de la precisión de las medidas de que dispongamos.

ERROR ABSOLUTO: diferencia entre el valor real y el valor aproximado:

Error absoluto = |Valor real - Valor aproximado|

ERROR RELATIVO: error por unidad. Se utiliza para comparar errores en los valores de magnitudes diferentes:

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{Error\ absoluto}{Valor\ real} \right|$$

1.3 ***INTERVALOS Y SEMIRECTAS***: recordamos la nomenclatura que se usa para designar algunos tramos de la recta real

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO		REPRESENTACIÓN
INTERVALO ABIERTO	(a,b)	{x / a<x<b}	Números comprendidos entre a y b, ambos no incluidos.	a ○——○ b a (——) b
INTERVALO CERRADO	[a,b]	{x / a≤x≤b}	Números comprendidos entre a y b, ambos incluidos.	a ●——● b a [——] b
INTERVALO SEMIABIERTO	(a,b]	{x / a<x≤b}	Números comprendidos entre a y b, a no incluido, b incluido.	a ○——● b a (——] b
	[a,b)	{x / a≤x<b}	Números comprendidos entre a y b, a incluido, b no incluido.	a ●——○ b a [——) b
SEMIRRECTA	(-∞,a)	{x / x<a}	Números menores que a, este no incluido.	←——○ a ←——) a
	(-∞,a]	{x / x≤a}	Números menores que a y el propio a.	←——● a ←——] a
	(a,+ ∞)	{x / a<x}	Números mayores que a, este no incluido.	a ○——→ a (——→
	[a,+ ∞)	{x / a≤x}	Números mayores que a y el propio a.	a ●——→ a [——→

1.4 ***VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL:*** el valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta su signo.

El valor absoluto de un número real, a, es el propio número a, si es positivo, o su opuesto, -a, si es negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

1.5 Se llama **ENTORNO** de centro a y radio r (r>0) al conjunto de números reales que están a una distancia de a menor que r.

$$E(a,r) = \{x \in \Re \,/\, |x-a| < r\}$$

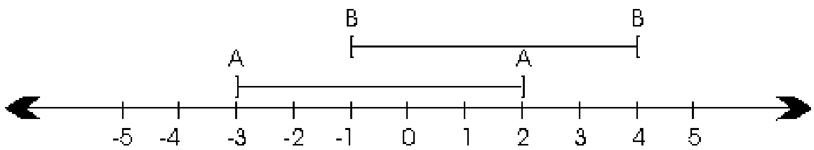
$$E(a,r) = (a - r, a + r).$$

1.6 ***UNIÓN E INTERSECCIÓN DE INTERVALOS***. La unión de dos conjuntos A, B se denota

$A \cup B$ y contiene todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B o a ambos. La intersección de A, B se denota $A \cap B$ y contiene todos los elementos que pertenece a A y B al mismo tiempo.

Ejemplo:

Sean los intervalos A= (–3, 2] y B=[–1, 4)



Por lo tanto: A ∪ B= (–3, 4) A ∩ B= [–1, 2]

1.7 *NOTACIÓN CIENTÍFICA*. Un número en notación científica es de la forma $a \cdot 10^b$, donde a es un número decimal exacto del intervalo [1, 10) y el exponente b es un número entero. El término a se llama *mantisa* del número y b es el *orden de magnitud.* Se utiliza para abreviar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Ejemplo:

$$2350000000000 = 2{,}35 \cdot 10^{12} \qquad 0{,}000000007 = 7 \cdot 10^{-9}$$

Operaciones

Suma y resta: Tienen que tener la misma potencia de 10 para poder sumarlos o restarlos directamente. Se suman o restan los coeficientes y se mantiene la potencia.

$3 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6 = 8 \cdot 10^6$	$5{,}1 \cdot 10^4 + 3{,}2 \cdot 10^4 = 8{,}3 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^4 = 14 \cdot 10^4 = 1{,}4 \cdot 10^5$

Producto y división: Pueden tener cualquier potencia de 10. Se operan los coeficientes y se suma o resta los exponentes.

$2{,}9 \cdot 10^4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^6 = 3{,}48 \cdot 10^{10}$	$2{,}2 \cdot 10^7 : 1{,}8 \cdot 10^2 = 1{,}33 \cdot 10^5$

1.8 *RADICALES. PROPIEDADES*

Un radical es un número de la forma $\sqrt[n]{a}$, en el que se verifica**:**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a}$$

Si a ≥ 0, $\sqrt[n]{a}$ existe siempre; si a ≤ 0, $\sqrt[n]{a}$ solo existe para os valores impares de n.

Todo radical podemos escribirlo como potencia:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}\text{; en particular } \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Propiedades de los radicales:

$$\sqrt[n.p]{a^p} = \sqrt[n]{a} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \qquad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

NOTA: Sólo podremos sumar radicales semejantes

NO OLVIDES:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a \qquad \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a \qquad \left(a - \sqrt{b}\right)\left(a + \sqrt{b}\right) = a^2 - b$$

1.9 ***RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES***:

Racionalizar consiste en transformar fracciones que tengan radicales en el denominador en otras equivalentes que no los tengan.

Metodología: dependerá del tipo de radical que haya en el denominador
Para suprimir una raíz cuadrada, basta multiplicar y dividir por la misma raíz

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para suprimir una raíz n-ésima, se multiplica y divide por otra raíz n-ésima que complete el radicando

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5}} = \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{5^3}} = \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{2\sqrt[4]{5^4}}{5}$$

Para suprimir una suma (resta) de raíces se multiplica y divide por el conjugado del denominador

NOTA: (a+b).(a-b) = $a^2 - b^2$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2-\sqrt{6}}{2-3} = \frac{2-\sqrt{6}}{-1} = \sqrt{6}-2$$

1.10 ***LOGARITMOS. PROPIEDADES***

Si P>0, a>0, y a$\neq$1, se llama logaritmo en base a de P (y lo escribimos como $\log_a P$) al exponente al que hay que elevar a para obtener P; es decir: $\boxed{\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P}$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS:

1. Dos números distintos tienen logaritmos distintos

   $$si\ P \neq Q,\ entonces\ \ \log_a P \neq \log_a Q$$

   Además $si\ a > 1\ y\ P < Q, entonces \log_a P < \log_a Q$

2. El logaritmo de la base es 1: $\log_a a = 1$

3. El logaritmo de 1 es 0 (cualquiera que sea la base) $\log_a 1 = 0$

4. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

   $$\log_a (P.Q) = \log_a P + \log_a Q$$

5. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador: $\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$

6. El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia: $\log_a P^n = n.\log_a P$

7. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice:

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$$

8. Cambio de base. El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base: $\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$

Tenemos dos tipos de logaritmos que se usan a menudo:

- Los logaritmos decimales, que son los logaritmos en base 10: $\log_{10} a = \log a$
- Los logaritmos neperianos, cuya base es el número e: $\log_e a = \ln a$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Efectúa y simplifica:

   a. $$\frac{\frac{1}{2}+0\acute{}25-\frac{1}{4}:0\acute{}\widehat{3}}{0\acute{}\widehat{6}:0\acute{}\widehat{9}}$$

   b. $$3-2\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\left(3+\frac{5}{3}\right)$$

2. Calcula :

   a. $\dfrac{2^0+2^{-2}-2^{-3}}{2^{-2}-2^{-3}}$ =

   b. $\left\{\left[\left(-\dfrac{3}{5}\right)^3\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2\right]^3:\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{15}\right\}-\left(\dfrac{4}{3}\right)^3\left(\dfrac{3}{2}\right)^4$ =

   c. $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-1}\cdot\left[\dfrac{3}{10}-\dfrac{5}{4}\left(3-\dfrac{17}{5}\right)^2\right]\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}+1$ =

   d. $\sqrt[3]{\dfrac{-1}{125}(-8)27}-3\left[\dfrac{4}{3}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+1\right]^{-1}$ =

3. Representa los siguientes conjuntos numéricos como intervalo y en la recta real:

   a. Números mayores que 0

   b. Números menores o iguales que 1

   c. $\{x/-2\leq x<3\}$

   d. $\{x/1\leq x\leq 4\}$

   e. Números menores que 1 excluyendo el 0

   f. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

   g. $\{x/x^2\geq 4\}=\{x/x\leq -2\}\cup\{x/x\geq 2\}$

   h. $\{x/|x|\leq 3\}$

4. Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

   a. Centro -1 y radio 2

   b. Centro 2 y radio $\dfrac{1}{3}$.

5. Describe como entornos los siguientes intervalos:

a. $(-1,1)$ b. $(-1,2)$ c. $(-2'2, 0'2)$

6. Halla el valor absoluto de: -7, π, $-\sqrt{2}$, 3-π, 2-$\sqrt{2}$, 1-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ y 7-$\sqrt{50}$.

7. ¿Para qué valores de x se cumplen cada una de las siguientes expresiones? :

a. $|x| = 3$ c. $|x| < 2$

b. $|x+1| = 3$ d. $|x| \geq 1$

8. Expresa, mediante intervalos, los valores que puede tomar x en cada caso:

a. $|x-2| \leq 3$ b. $|x+1| \geq 5$

9. Calcula el valor numérico de estos radicales:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[5]{-100.000}$ d) $\sqrt[3]{-216}$ e) $\sqrt[4]{625}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

10. Extrae los factores que puedas de la raíz:

a) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{12}$ g) $\sqrt[3]{1.000}$

b) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{98}$ f) $\sqrt{75}$ h) $\sqrt[3]{40}$

11. Introduce factores dentro del radical:

a) $2\sqrt[3]{5}$ c) $3\sqrt[5]{15}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ g) $2\sqrt[3]{7}$ i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

b) $4\sqrt[4]{20}$ d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ j) $\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

12. Representa las siguientes raíces en la recta real:

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$

13. Dadas las siguientes operaciones: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

a) Racionaliza cada fracción y después opera.

b) Haz la operación indicada y después racionaliza.

14. Escribe como potencia y simplifica: $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}\right):\left(a\cdot\sqrt{a}\right)$

15. Multiplica y simplifica: $\sqrt[3]{9.a^2.b}\cdot\sqrt[6]{18.a^3b^2}$

16. Racionaliza:

a. $\dfrac{4+\sqrt{6}}{2.\sqrt{3}}$ b. $\dfrac{2}{3-\sqrt{3}}$

17. Reduce: $\sqrt{63}-2.\sqrt{28}+\sqrt{175}$

18. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{20}-3\sqrt{125}+2\sqrt{45}$ b) $7\sqrt[3]{81}-2\sqrt[6]{3^2}+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{5}$

19. Opera y simplifica:

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$ c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

20. Aproxima 4,635 ; $3,\widehat{57}$; $\sqrt{3}$ a las centésimas.

21. Calcula los errores cometidos al redondear 2,387 a las centésimas.

22. ¿Qué error cometemos al aproximar el resultado de 45,96 + 203,7 + 0,823 por el número 250,49?

23. Un truncamiento de 8,56792 es 8,56. Calcula el error absoluto y el error relativo.

24. Escribe en notación científica los siguientes números:

a) 0,0000085 c) 31.940.000.000
b) 5.000.000.000.000 d) 0,000000000479

25. Realiza estas operaciones:

a. $9{,}76\cdot 10^3+2{,}43\cdot 10^2-3{,}1\cdot 10^{-1}$

b. $\left(2{,}1\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}2\cdot 10^4\right):\left(8\cdot 10^3\right)$

26. Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto

a. A las diezmilésimas
b. A las cienmilésimas
c. A las millonésimas

27. Realiza estas operaciones:

a) $1{,}32 \cdot 10^4 + 2{,}57 \cdot 10^4$
b) $8{,}75 \cdot 10^2 + 9{,}46 \cdot 10^3$
c) $3{,}62 \cdot 10^4 + 5{,}85 \cdot 10^{-3}$
d) $2{,}3 \cdot 10^2 + 3{,}5 \cdot 10^{-1} + 4{,}75 \cdot 10^{-2}$
e) $3{,}46 \cdot 10^{-2} + 5{,}9 \cdot 10^4 + 3{,}83 \cdot 10^2$

28. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 64$ b) $\log_3 27$ c) $\log_2 \frac{1}{8}$

d) $\log 0{\acute{}}0001$ e) $\log_2 \sqrt{2}$ f) $\log_5 \frac{1}{125}$

g) $\log_3 \sqrt[5]{9}$ h) $\log_4 \frac{2}{32}$ i) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}}$

j) $\ln 1$ k) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ l) $\log_{\frac{1}{5}} 625$

m) $\log_4 2$ n) $\log_7 \sqrt[3]{\frac{1}{49}}$ ñ) $\log_3 \frac{2}{18}$

29. Calcula x en las siguientes igualdades:

a) $\log_x 2 = -1$ b) $\log_x 64 = 2$ c) $\log_3 81 = x$

d) $\log_{81} 3 = x$ e) $\log_{\sqrt[3]{4}} x = 2$ f) $\log_{\frac{5}{3}} \left(\frac{27}{125}\right) = x$

g) $\log_x 25 = -4$ h) $\log_x \frac{1}{32} = -5$ i) $\log_x 0{\acute{}}001 = 3$

j) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$ k) $\log_3 \left(3\sqrt{3}\right) = x$ l) $\log_2 (\log_3 3) = x$

30. Sabiendo que log x =2´4 , calcula:

a) log 10x b) $\log \frac{x}{100}$ c) $\log\left(10^{\log x}\right)$ d) $\log \sqrt[5]{x^2}$ e) $\log \frac{x}{10\sqrt{x}}$

31. Sabiendo que log 2 = 0´301 y log 3 = 0´477 , calcula:

a) log 15 ; b) log 24 ; c) log 150 ; d) log 0´002 ; e) $\log \frac{5}{12}$; f) $\log \sqrt[5]{0{\acute{}}016}$

32. Calcula : $\log_b 0{\acute{}}01 + 3 \cdot \log_b 100 - 4 \cdot \log_b 10$

33. Justifica que: log 125 = 3(1-log2)

34. Prueba que: $\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \cdots\cdots + \log \frac{98}{99} + \log \frac{99}{100} = -2$

AUTOEVALUACIÓN 1

1. Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

   a. Todo número entero es racional

   b. Hay números irracionales que son enteros

   c. Todo número irracional es real

   d. Todos los números decimales son racionales

   e. Entre dos números racionales hay infinitos irracionales

   f. Los números racionales llenan la recta real

2. Dados los números: $-\frac{58}{45}, \frac{51}{17}, \frac{\pi}{3}, \sqrt[4]{-3}, \sqrt[3]{-8}, \sqrt[5]{2^3}, 1.0\hat{7}$

   a. Clasifícalos indicando a cuales de los conjuntos numéricos pertenecen

   b. Ordena los reales de menor a mayor

   c. ¿Cuáles de ellos pertenecen al intervalo $\left(-2, \frac{11}{9}\right]$?

3. Si n $\neq$ 0 es un número natural, determina para que valores de n estos números pertenecen a Z:

   a. $\frac{n}{2}$

   b. $\frac{3}{n}$

   c. $n-5$

   d. $n+\frac{1}{2}$

   e. $\sqrt{n}$

4. Representa los siguientes conjuntos:

   a. $\{x / -3 \leq x < 1\}$

   b. $[4, +\infty)$

   c. $[-1,4) \cup (4,10]$

   d. $(-\infty, 5) \cap (-1, +\infty)$

5. Expresa en forma de intervalo en cada caso:

   a. $|x| \geq 8$

   b. $|x-4| < 5$

6. Multiplica y simplifica: $\sqrt{8ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}$

7. Reduce: $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}$

8. Escribe como potencia y simplifica: $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{12}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\right):\left(a\cdot\sqrt[4]{a^{-2}}\right)$

9. Efectúa tras racionalizar primero: $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3-\sqrt{3}}$

10. Se consideran los números A = 543.210.000.000 y B = 0,000000678. Expresar en notación científica los resultados de las siguientes operaciones:

    a. A·B $\{3{,}6829638.10^3\}$

    b. $\frac{A}{B}$ $\{8{,}01.10^{17}\}$

11. Responde los siguientes apartados correctamente:

    a. Hallar el resultado de $2\sqrt[4]{162}+3\sqrt[4]{32}-5\sqrt[4]{1250}$ $\{-13\sqrt[4]{2}\}$

    b. Racionalizar y simplificar: $\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\{-4\sqrt{2}+4\sqrt{3}\}$

12. Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones:

    $a)\log(x-1)=\log\left(\sqrt{5+x}\right)+\log\left(\sqrt{5-x}\right)$ {x=4}

    $b)2^{x-3}=45$ $\left\{x=\frac{\log 45}{\log 2}+3=8{,}49\right\}$

    $c)2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=896$ $\{x=10\}$

13. Obtén x en las siguientes expresiones (utilizando la definición de logaritmo):

    $\log_3 x=-\frac{1}{4}$ $\ln\frac{x}{3}=-1$ $\log_x 125=3$

14. Aplica las propiedades de los logaritmos e indica el valor de A:

    $\log A=2\log 3+0{,}5\log 4-3\log 2$

AUTOEVALUACIÓN 2

1. Resolver de forma exacta las siguientes operaciones:

   a. $1,2-0.2\widehat{3}$ $\{\frac{29}{30}\}$

   b. $0,\widehat{72}:0,91\widehat{6}$ $\{\frac{96}{121}\}$

2. La capacidad de memoria de un ordenador se mide en megabytes (Mb). Un megabyte tiene 10^6 bytes de información, de forma que cada byte contiene un símbolo (dígito, letra, etc.). Si por término medio, una palabra está compuesta por cuatro símbolos, estimar cuantas palabras puede archivar un ordenador con una memoria de 500 Mb.

   {$1,25\cdot 10^8$, es decir, 125 millones de palabras}

3. Resuelve correctamente los dos apartados siguientes:

   a. Hallar el resultado de $4\sqrt{80}-5\sqrt{245}+6\sqrt{605}-\sqrt{320}$ $\{39\sqrt{5}\}$

   b. Racionaliza y simplifica: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$ $\{\sqrt[6]{5}\}$

4. Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones:

   a. $\log(x-1)=1-\log(x+2)$ {x=3}

   b. $3^{x+1}=240$ $\left\{x=\frac{\log 240}{\log 3}-1=3,99\right\}$

   c. $25^x-5^x=600$ {x=2}

2. ***NÚMEROS COMPLEJOS***

Los números complejos aparecieron muy temprano en el paisaje de las matemáticas, pero fueron ignorados sistemáticamente, por su carácter extraño, carentes de sentido e imposibles de representar.

En el año 1977 Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de *i* (de *imaginario*), pero fue Gauss en 1831, cuando publica un trabajo donde expone las propiedades de estos números y su representación geométrica, el que acabó de darles la entidad necesaria para que fueran plenamente aceptados.

Los números complejos se introducen para dar sentido a la raíz cuadrada de números negativos. Así se abre la puerta a un curioso y sorprendente mundo en el que todas las operaciones (salvo dividir entre 0) son posibles.

En esta unidad se presenta este mundo: expresión de los números complejos, su representación gráfica, operaciones y su forma polar. El enfoque es muy geométrico para facilitar la comprensión.

La importancia de los números complejos está marcada por sus múltiples aplicaciones en diversas Áreas (Matemáticas, Física, Ingeniería, Tecnología, ...)

2.1. ***DEFINICIONES***

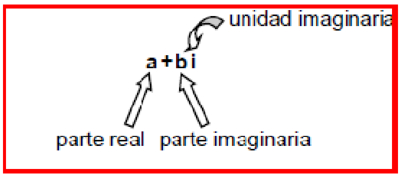
Al resolver ecuaciones del tipo: $x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$ que no tiene solución en los números reales.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como número válido a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

UNIDAD IMAGINARIA: Se llama así al nuevo número $\sqrt{-1}$. Y se designa por la letra *i.*

$$\boxed{i=\sqrt{-1} \Rightarrow i^2=-1}$$

NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA: Son las expresiones: $a+bi$, donde *a* y *b* son números reales. Se dice que *a* es la parte real y que *b* es la imaginaria.



Nº COMPLEJO EN FORMA BINÓMICA

El conjunto de todos los números complejos se designa: $\boxed{\mathbb{C}=\{a+bi \,/\, a,b\in\mathbb{R}\}}$

Si $b=0$ queda la parte real *a*. (Los reales son complejos de la forma $a+0i$) por eso, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Si $a=0$ queda bi, un número **imaginario puro.**

Ejemplo:

$$x^2-2x+5=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2}=\begin{cases}1+2i\\1-2i\end{cases}$$

Fíjate que las soluciones imaginarias de una ecuación de 2º grado siempre son conjugadas.

IGUALDAD: Dos números complejos son iguales sólo cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.

OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO: $z=a+bi \rightarrow -z=-a-bi$

CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO: $z=a+bi \rightarrow \overline{z}=a-bi$

Ejercicios:

Resuelve las siguientes ecuaciones, y expresa sus soluciones como números complejos:

a) $3x^2-3x+2=0$ b) $x^2-x+1=0$

Determina *x* e *y* para que estos números complejos sean iguales.

a) $-2x+3i$ y $\frac{3}{2}-2yi$ b) $-x+yi$ y $7-6i$

2.2. *OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA*

SUMA Y DIFERENCIA: Se realiza sumando (o restando) por separado sus partes reales e imaginarias:

$$z+z'=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$z-z'=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}z=3+5i\\z'=4-2i\end{array}\right\}$ $z+z'=7+3i$ $z-z'=-1+7i$

PRODUCTO: Se realiza calculando los cuatro productos posibles y teniendo en cuenta que $i^2=-1$:

$$z\cdot z'=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Nota: Si multiplicamos un número complejo por su conjugado obtenemos un número real:

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

Este hecho será útil para el cociente que vamos a definir a continuación:

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} z=3+5i \\ z'=4-2i \end{array}\right\} z\cdot z'=(3+5i)(4-2i)=12-6i+20i-10i^2 \underset{i^2=-1}{=} 22+14i$

COCIENTE: Se realiza multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z}{z'}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo: $\frac{z}{z'}=\frac{3+5i}{4-2i}=\frac{(3+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{12+6i+20i+10i^2}{16-4i^2} \underset{i^2=-1}{=} \frac{2+26i}{20}=\frac{1}{10}+\frac{13}{10}i$

POTENCIAS DE *i*: $i^0=1;\ \ i^1=i;\ \ i^2=-1;\ \ i^3=-i;\ \ i^4=1\ldots$

La secuencia de potencias de *i* se repite sin cesar.

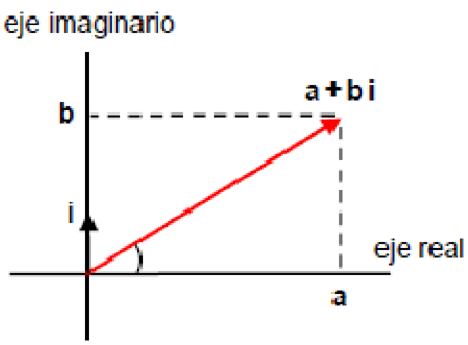
$i^n \rightarrow$ se divide n entre cuatro y nos quedamos con el resto (0,1,2,3) $\rightarrow i^n=i^r$.

Ejemplo: $i^{151}=i^3=-i$ teniendo en cuenta que $\begin{array}{r|l} 151 & 4 \\ \hline 31 & 37 \\ 3 & \end{array}$

2.3. *REPRESENTACIÓN GRÁFICA*

Las sucesivas categorías de números (naturales, enteros, racionales,...) se pueden representar sobre la recta. Los reales la llenan por completo, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.

Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la recta real al *plano complejo*.



Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama eje real y el Y, eje imaginario. El número complejo a + bi se representa mediante el punto (a,b) que se llama **afijo**, o mediante un vector de origen (0,0) y extremo (a,b).

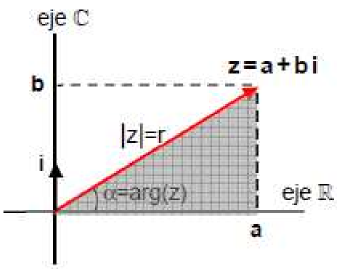
Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

La longitud del vector se denomina **módulo**, y se suele designar como ***r*** o $|z|$.

El ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje x se llama **argumento**, y se designa por α o $\arg(z)$.

Ejercicio: Representa el siguiente número complejo, su opuesto y su conjugado: $z=3+4i$

2.4. *NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR*:



Consiste en representar un complejo mediante dos valores: su módulo y su argumento, designándolo como r_α.

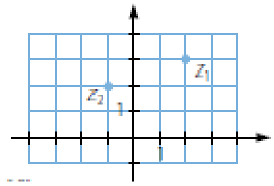
Para hallar el módulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Para obtener el argumento, aplicamos la trigonometría elemental en el mismo triángulo:

$$tg\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha = arctg\frac{b}{a};\quad 0^\circ \le \alpha \le 360^\circ}$$

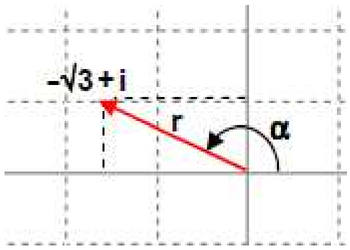
Ejercicio: Determina la expresión polar de los complejos representados:



PASO DE FORMA BINÓMICA A FORMA POLAR

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} r = +\sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a} \text{ si } a \neq 0 \text{ (Teniendo en cuenta el cuadrante)} \\ 90^\circ \text{ si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ 270^\circ \text{ si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo: Pasa a forma polar: $z = -\sqrt{3} + i$

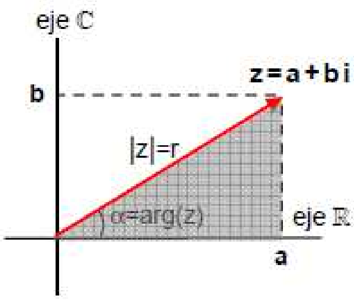


$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2 \\ \alpha = arctg\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \begin{cases} 150^\circ \\ \cancel{330^\circ} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow z = -\sqrt{3} + i = 2_{150^\circ}$$

IGUALDAD: $r_\alpha = r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + 360^\circ k;\quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ejemplos: $2_{30^\circ} = 2_{390^\circ}$ $\quad 5_{330^\circ} = 5_{-30^\circ}$ $\quad 2_\pi = 2_{3\pi}$ $\quad \sqrt{2}_{30^\circ} = \sqrt{2}_{750^\circ}$

PASO DE FORMA POLAR A FORMA BINÓMICA

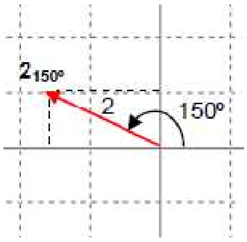


$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\alpha \\ \text{sen}\alpha = \dfrac{b}{r} \Rightarrow b = r\text{sen}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = r_\alpha = a + bi = r\cos\alpha + r\text{sen}\alpha i = r\left(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha\right)$$

Esta expresión $r\left(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha\right)$ se llama **<u>forma trigonométrica</u>** y sirve para pasar de polar a binómica.

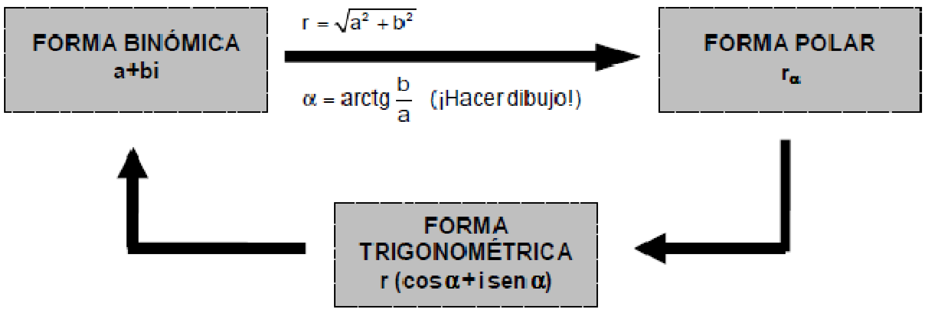
Ejemplo: Pasa $2_{150^{o}}$ a forma binómica.



$$\left.\begin{array}{l}\cos 150^{o}=\cos\left(180^{o}-30^{o}\right)=-\cos 30^{o}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ sen150^{o}=sen\left(180^{o}-30^{o}\right)=-sen30^{o}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2_{150^{o}}=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$$

ESQUEMA:



OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR:

PRODUCTO:

El producto de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el producto de los módulos y argumento la suma de éstos.

$$\boxed{r_{\alpha}\cdot r'_{\alpha'}}=r\left(\cos\alpha+isen\alpha\right)\cdot r'\left(\cos\alpha'+isen\alpha'\right)=$$
$$=r\cdot r'\left[\left(\cos\alpha\cos\alpha'-sen\alpha sen\alpha'\right)+i\left(sen\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha sen\alpha'\right)\right]=$$
$$=r\cdot r'\left[\cos\left(\alpha+\alpha'\right)+isen\left(\alpha+\alpha'\right)\right]=\boxed{\left(r\cdot r'\right)_{\alpha+\alpha'}}$$

Ejemplos:

$3_{60^{o}}\cdot 2_{45^{o}}=6_{105^{o}};\qquad \sqrt{3}_{135^{o}}\cdot 1_{270^{o}}=\sqrt{3}_{405^{o}}=\sqrt{3}_{45^{o}}$

Se puede generalizar a tres o más complejos:

$\sqrt{3}_{120^{o}}\cdot 2_{50^{o}}\cdot\sqrt{3}_{90^{o}}=6_{360^{o}}=6_{0^{o}}$

COCIENTE:

El cociente de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el cociente de los módulos y argumento la resta de éstos:

$$\frac{r_{\alpha}}{r'_{\alpha'}}=\left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$$

Ejemplos:

$$\frac{6_{85^o}}{3_{20^o}}=2_{65^o}; \qquad \frac{\sqrt{2}_{90^o}}{2_{120^o}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-30^o}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330^o}$$

Nota: *Sumas y restas de complejos sólo se pueden hacer en binómica.*

POTENCIA: Para elevar un complejo en forma polar a un exponente se eleva su módulo al exponente y se multiplica su argumento por dicho exponente:

$$\boxed{\left(r_\alpha\right)^n}=r_\alpha\cdots r_\alpha=\left(r\cdots r\right)_{\alpha+\cdots+\alpha}=\boxed{\left(r^n\right)_{n\alpha}}$$

Ejemplos:

$$\left(2_{30^o}\right)^3=8_{90^o}; \qquad \left(\sqrt{3}_{135^o}\right)^4=9_{540^o}=9_{180^o}$$

FÓRMULA DE MOIVRE: Se obtiene si pasamos ambos miembros de la fórmula anterior a forma trigonométrica.

$$\left(r_\alpha\right)^n=\left(r^n\right)_{n\alpha}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left[r\left(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\right]^n=r^n\left(\cos\ n\alpha+i\,\mathrm{sen}\ n\alpha\right)$$

RADICALES:

$$\sqrt[n]{r_\alpha}=R_\beta\Rightarrow\left(R_\beta\right)^n=r_\alpha$$

Aplicando la fórmula de la potencia:

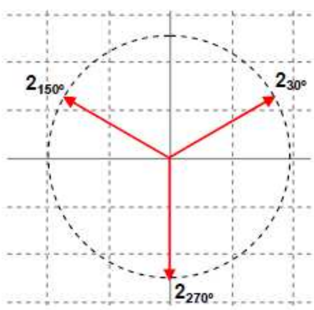
$$\left(R^n\right)_{n\beta}=r_\alpha\Rightarrow\begin{cases}R^n=r\Rightarrow R=\sqrt[n]{r}\\ n\beta=\alpha+360^o k\Rightarrow\beta=\dfrac{\alpha+360^o k}{n};\ \text{con } k=0,1,2,\ldots,n-1\end{cases}$$

si $k=n$, volveríamos al mismo ángulo, un complejo tiene *n* raíces con el mismo módulo, si las dibujamos forman un polígono regular de *n* lados.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8_{90^o}}=R_\beta\Rightarrow\begin{cases}R=\sqrt[3]{8}=2\\ \beta=\dfrac{90^o+360^o k}{3}=30^o+120^o k\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}k=0\to\beta=30^o\\ k=1\to\beta=150^o\\ k=2\to\beta=270^o\end{array}\right\}\Rightarrow\text{Sol: }2_{30^o},2_{150^o},2_{270^o}$$



Si dibujamos las tres raíces comprobamos que sus afijos son los vértices de un triángulo equilátero.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dado el número complejo $z=-2x+\frac{y}{2}i,$ determina el valor de *x* e *y* para que sea:

   a) Un número real.
   b) Un número imaginario puro.
   c) Un número complejo que no sea ni real ni imaginario puro.

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-2x+2=0$ $\{1\pm i\}$

b) $x^2+3=0$ $\{\pm\sqrt{3}i\}$

c) $x^2-2x+4=0$ $\{1\pm\sqrt{3}i\}$

d) $x^2+x+1=0$ $\left\{\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

e) $x^3-6x^2+21x-26=0$ $\{2, 2\pm 3i\}$

f) $x^4-1=0$ $\{\pm 1, \pm i\}$

3. Completa:

COMPLEJO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA	OPUESTO	CONJUGADO
$z=2+3i$	2	3	$-z=-2-3i$	$\overline{z}=2-3i$
$z=3-i$				
$z=1+i$				
$z=3-3\sqrt{3}i$				
$z=3$				
$z=-2i$				
$z=i$				

4. Dados los complejos: $z_1=2+3i,\ z_2=-1+4i,\ z_3=2-5i$, hallar:

a) z_1+z_2 $\{1+7i\}$

b) z_1+z_3 $\{4-2i\}$

c) z_1-z_2 $\{3-i\}$

d) z_3-z_2 $\{3-9i\}$

e) $3z_2+2z_3$ $\{1+2i\}$

f) $2z_1+3z_2$ $\{7-6i\}$

g) $z_3-3z_1+4z_2$ $\{-8+2i\}$

h) $z_1+\overline{z_2}$ $\{1-i\}$

i) $z_3+\overline{z_3}$ $\{-10i\}$

j) $2\overline{z_1}-z_1$ $\{2-9i\}$

5. Calcular:

a) $(2+5i)(3+4i)$ $\{-14+23i\}$

b) $(1+3i)(1+i)$ $\{-2+4i\}$

c) $(1+i)(-1-i)$ $\{-2i\}$

d) $(2-5i)i$ $\{5+2i\}$

e) $(2+5i)(2-5i)$ $\{29\}$

f) $(1+i)(1-i)$ $\{2\}$

g) $(3+5i)^2$ $\{-16+30i\}$

h) $(-2-5i)(-2+5i)$ $\{29\}$

6. Dados los complejos del ejercicio 4, hallar:

a) $z_1 \cdot z_2$	$\{-14+5i\}$	e) $(z_1)^2$	$\{-5+12i\}$
b) $z_1 \cdot z_3$	$\{19-4i\}$	f) $(z_1 - z_3)^2$	$\{-64\}$
c) $z_1(z_3+z_2)$	$\{5+i\}$	g) $z_1 \cdot \overline{z_1}$	$\{13\}$
d) $z_1 - z_2 \cdot z_3$	$\{-16-10i\}$	h) $z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot z_3$	$\{75-28i\}$

7. Dados los complejos $2-mi$ y $3-ni$ hallar *m* y *n* para que su producto sea $8+4i$.

$$\{m_1=-2; n_1=1; m_2=2/3; n_2=-3\}$$

8. Calcular:

a) $\dfrac{1+3i}{1+i}$	$\{2+i\}$	e) $\dfrac{19-4i}{2-5i}+\dfrac{3+2i}{i}$	$\{4\}$
b) $\dfrac{1+i}{1-i}$	$\{i\}$	f) $\dfrac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}}$	$\left\{\dfrac{12}{5}-\dfrac{14}{5}i\right\}$
c) $\dfrac{3+5i}{1-i}$	$\{-1+4i\}$	g) $\dfrac{(3-2i)(1+i)}{\overline{1+i}-2i}$	$\left\{\dfrac{1}{5}+\dfrac{8}{5}i\right\}$
d) $\dfrac{2-5i}{i}$	$\{-5-2i\}$	h) $\dfrac{-a+bi}{b+ai}$	$\{i\}$

9. ¿Cuánto debe valer *m* para que el complejo $z=(m-2i)(2+4i)$ sea un número real? ¿E imaginario puro? ¿De qué números se trata?

$$\{m=1 \text{ y } m=4; z=10 \text{ y } z=-20i\}$$

10. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es $-7+i$.

$$\{3+i \text{ y } -2+i\}$$

11. Calcula el inverso de los siguientes complejos en forma binómica:

a) $3i$	$\left\{\dfrac{-1}{3}i\right\}$	c) $2+3i$	$\left\{\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i\right\}$	e) $-2+i$	$\left\{\dfrac{-2}{5}-\dfrac{1}{5}i\right\}$
b) $1+i$	$\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right\}$	d) $1-i$	$\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}$	f) i	$\{-i\}$

12. Calcula las potencias de *i:*

a) i^{12} $\{1\}$ b) i^{77} $\{i\}$ c) i^{723} $\{-i\}$ d) $\dfrac{1}{i^2}$ $\{-1\}$ e) i^{-4} $\{1\}$ f) i^{544} $\{1\}$

13. Calcula las siguientes operaciones combinadas en forma binómica:

a) $(1+i)^3$	$\{-2+2i\}$	d) $\dfrac{2i-1}{i^{45}}+\dfrac{4-3i}{\overline{\overline{1+2i}}}$	$\{4+2i\}$
b) i^{-131}	$\{i\}$	e) $-2-5i-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{8+2i-5+3i}$	$\{-5-i\}$
c) $\dfrac{i^7-1}{1+i}$	$\{-1\}$	f) $\dfrac{(2+3i)(3-2i)-(2-3i)^2}{17(1-i^{13})}$	$\{i\}$

14. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es -7+*i*.

$$\{3+i \text{ y } -2+i\}$$

15. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

a) $1\pm 3i$ $\{x^2-2x+10=0\}$ b) $5\pm 2i$ $\{x^2-10x+29=0\}$ c) $\pm i$ $\{x^2+1=0\}$

16. Pasar a forma polar los siguientes complejos (se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento):

a) $4+4\sqrt{3}i$ $\{8_{60^\circ}\}$ d) 8 $\{8_{0^\circ}\}$ g) $1+i$ $\{\sqrt{2}_{45^\circ}\}$

b) $3-3\sqrt{3}i$ $\{6_{300^\circ}\}$ e) i $\{1_{90^\circ}\}$ h) -8 $\{8_{180^\circ}\}$

c) $\sqrt{3}-i$ $\{2_{330^\circ}\}$ f) $-8i$ $\{8_{270^\circ}\}$

17. Hallar un número complejo del 2º cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que Re(z)=-1. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución.

$$\{-1+\sqrt{3}i=2_{120^\circ}\}$$

18. Hallar un complejo de argumento 45º tal que sumado a 1+2*i* dé un complejo de módulo 5 .

$$\{2+2i\}$$

19. Encontrar un complejo tal que sumándolo con 1/2 dé otro complejo de módulo 3 y argumento 60º.

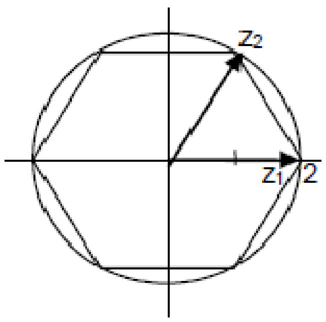
$$\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$$

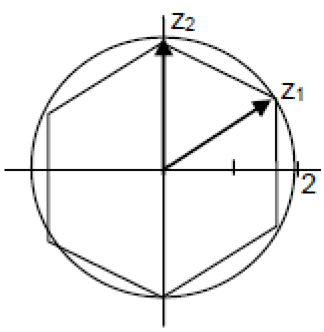
20. Pasa a forma binómica:

a) 4_{30° $\{2\sqrt{3}+2i\}$ c) 2_{150° $\{-\sqrt{3}+i\}$ e) 2_{180° $\{-2\}$

b) 2_{60° $\{1+\sqrt{3}i\}$ d) 1_{30° $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right\}$

21. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:





22. Determinar el valor de a para que el complejo z=(3-6i) (2-ai) sea

   a) Un número real. ¿De qué número se trata?
   b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata?
   c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^er y 3^er cuadrantes. ¿De qué número se trata?

$$\{\text{a)}a=-4;\ 30\ \text{b)}a=1;\ \ -15i\ \text{c)}a=6;\ \ -30-30i\}$$

23. Dado $z=2_{45^\circ}$, hallar $\overline{z}$ en polar.

$$\{2_{315^\circ}\}$$

24. Halla un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\overline{z}=3_{70^\circ}$

25. Dados los números complejos 3_{30° y 5_{60°, comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo.

$$\{15i\}$$

26. Lo mismo con $3i$ y $2-2i$.

$$\{6+6i=6\sqrt{2}_{45^\circ}\}$$

27. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $4_{120^\circ}\cdot 3_{60^\circ}$ $\{12_{180^\circ}\}$

b) $\dfrac{6_{\pi}}{2_{\frac{\pi}{4}}}$ $\left\{3_{\frac{3\pi}{4}}\right\}$

c) $4_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2_{270^\circ}$ $\{8_{330^\circ}\}$

d) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$ $\left\{25_{\frac{2\pi}{3}}\right\}$

e) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6$ $\{27_{\pi}\}$

f) $\dfrac{2_{15^\circ}(1+i)}{2_{-15^\circ}(1-i)}$ $\{1_{120^\circ}\}$

g) $\dfrac{2_{15^\circ}\cdot 4_{135^\circ}}{8_{170^\circ}}$ $\{1_{340^\circ}\}$

28. El complejo de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50°. Escribir en forma binómica el otro complejo.

$$\{2\sqrt{3}+2i\}$$

29. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\frac{\pi}{2}}\cdot 1_{\alpha}$ sea:

   a) Un número real positivo.
   b) Un número real negativo.

$$\left\{a)\alpha=\frac{3\pi}{2};b)\alpha=\frac{\pi}{2}\right\}$$

30. Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer m para que el complejo $z=(m-2i)(2+4i)$ tenga módulo 10.

$$\{m=\pm 1\}$$

31. Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de a para que el módulo del complejo $z=\dfrac{a+2i}{1-i}$ sea 2.

$$\{a=\pm 2\}$$

32. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es -8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar).

$$\left\{\left(2\sqrt[3]{4}\right)_{0^\circ};\left(\sqrt[3]{2}\right)_{0^\circ}\right\}$$

33. Calcula $sen2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ utilizando la fórmula de Moivre.

34. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1-i}$ $\quad\left\{\sqrt[6]{2}_{105^\circ};\sqrt[6]{2}_{225^\circ};\sqrt[6]{2}_{345^\circ}\right\}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+3i}{2-i}}$ $\quad\left\{\sqrt[6]{2}_{45^\circ};\sqrt[6]{2}_{165^\circ};\sqrt[6]{2}_{285^\circ}\right\}$

c) $\sqrt[3]{8i}$ $\quad\left\{2i;\pm\sqrt{3}+i\right\}$

d) $\sqrt[3]{8}$ $\quad\left\{2;-1\pm\sqrt{3}i\right\}$

e) $\sqrt[5]{-243}$ $\quad\left\{3_{30^\circ};3_{108^\circ};3_{180^\circ};3_{252};3_{324^\circ}\right\}$

f) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ $\quad\left\{\sqrt{3}+i;-1+\sqrt{3}i;-\sqrt{3}-i;1-\sqrt{3}i\right\}$

35. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=3i$ y $z_3=1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}$ $\quad\left\{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}i\right\}$

b) $z_1\cdot z_3$ $\quad\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right\}$

c) $\left(z_1\right)^4$ $\quad\left\{-8+8\sqrt{3}i\right\}$

d) $\overline{z_2}$ $\quad\left\{-3i\right\}$

3. SUCESIONES

3.1 SUCESIONES NUMÉRICAS

Una sucesión numérica es un conjunto ordenado de números, que se llaman términos de la sucesión.
Cada término se representa por una letra y un subíndice que indica el lugar que ocupa dentro de ella.

a_1 es el primer término de la sucesión

a_2 es el segundo término de la sucesión

...

a_n es el término enésimo

Así una sucesión puede representarse como:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots \text{ o simplemente } a_n$$

EJEMPLOS:

- Sucesión formada por los cuadrados perfectos:

  1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225,…
- Los números pares :

  2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,…
- La suma de cada natural y su cuadrado:

  2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90,…

TÉRMINO GENERAL

El término general o término n-ésimo, a_n , de una sucesión es una expresión matemática que nos permite calcular cualquier término de la sucesión en función del lugar que ocupa.
Por ejemplo, en la sucesión de los cuadrados perfectos, cada término se obtiene elevando al cuadrado el lugar que ocupa en ella:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 4, a_3 = 9, \ldots$$

En esta sucesión, el término general será: $a_n = n^2$

CÁLCULO DEL TÉRMINO GENERAL

Dados los términos de una sucesión, para calcular su término general tenemos que buscar una regla que relacione el valor de cada término con el lugar que ocupa en la sucesión. Para hallar esta relación debemos descomponer los términos en expresiones numéricas que tengan la misma estructura dependiendo del lugar que ocupan.

EJEMPLO:

Consideremos la siguiente sucesión: 2, 5, 10, 17, 26, 37.....
Para calcular el término general nos ayudamos de la siguiente tabla:

LUGAR	1	2	3	4	5	…	n
TÉRMINO	$2 = 1^2 + 1$	$5 = 2^2 + 1$	$10 = 3^2 + 1$	$17 = 4^2 + 1$	$26 = 5^2 + 1$		$a_n = n^2 + 1$

Una vez que tenemos el término general, podemos calcular cualquier término de la sucesión, por ejemplo:

$$a_{10} = 10^2 + 1 = 101$$

A veces no es posible obtener una fórmula para el término general, y otras veces no se consigue de forma inmediata.

SUCESIONES RECURRENTES

Una sucesión es recurrente cuando todos sus términos se pueden calcular a partir de uno dado.

La fórmula mediante la cual se pueden calcular los términos se llama ley de recurrencia.

EJEMPLO:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

En este tipo de sucesiones, necesitamos saber cuál es el primer término, $a_1 = 4$. A partir de él podemos calcular el resto:

$$a_2 = 4 + 2 = 6$$
$$a_3 = 6 + 3 = 9$$
$$a_4 = 9 + 4 = 13$$
$$\ldots$$

SUCESIONES MONÓTONAS

Si comparamos los términos de una sucesión, podemos clasificarla:

- Una sucesión es **monótona creciente** si cada término es menor o igual que el siguiente:

$$a_{n-1} \leq a_n$$

- Una sucesión es **estrictamente creciente** si cada término es menor que el siguiente:

$$a_{n-1} < a_n$$

- Una sucesión es **monótona decreciente** si cada término es mayor o igual que el siguiente:

$$a_{n-1} \geq a_n$$

- Una sucesión es **estrictamente decreciente** si cada término es mayor que el siguiente:

$$a_{n-1} > a_n$$

EJEMPLO:

Para comprobar la monotonía de la sucesión $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, comparamos dos términos consecutivos:

$$¿a_{n-1} < a_n?$$

$$a_{n-1} = \frac{n-1-1}{n-1+1} = \frac{n-2}{n}$$

$$\frac{n-2}{n} < \frac{n-1}{n+1} \Rightarrow (n-2)(n+1) < n(n-1) \Rightarrow n^2 - n - 2 < n^2 - n \Rightarrow -2 < 0$$

Lo que es cierto, por lo tanto la sucesión es estrictamente creciente.

SUCESIONES ACOTADAS

Una sucesión está **acotada superiormente** por un número real K si todos los términos son menores o iguales que K. Decimos que K es una **cota superior** de la sucesión.

$a_n = -1, -2, -3, -4, \ldots, -n$ está acotada superiormente por -1

Una sucesión está **acotada inferiormente** por un número real k si todos los términos son mayores o iguales que k. Decimos que k es una **cota inferior** de la sucesión.

$a_n = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ está acotada inferiormente por 1

Una sucesión se dice **acotada** si lo está superior e inferiormente.

$a_n = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, ..., \frac{n+1}{n}$ está acotada inferiormente por 1 y superiormente por 2

OPERACIONES CON SUCESIONES

Como los términos de las sucesiones son números reales, podemos efectuar con ellas operaciones basadas en las que definimos para los números reales:

- La suma de dos sucesiones a_n y b_n es otra sucesión s_n que se obtiene sumando término a término los correspondientes de las dos sucesiones. Análogamente se define la diferencia de sucesiones.
- El producto de dos sucesiones a_n y b_n es otra sucesión p_n que se obtiene al multiplicar término a término los correspondientes de las dos sucesiones.
- Para que exista el cociente de dos sucesiones a_n y b_n, los términos de b_n han de ser diferentes de 0. La sucesión cociente c_n se obtiene dividiendo los términos correspondientes de las dos sucesiones.

EJEMPLO:

Dadas las sucesiones: $a_n = n^2 - 1 \quad y \quad b_n = n + 1$

$$a_n + b_n = n^2 + n$$

$$a_n - b_n = n^2 - n - 2$$

$$a_n b_n = (n^2 - 1)(n + 1) = n^3 + n^2 - n - 1$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 - 1}{n + 1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} = n - 1$$

3.2 *LÍMITE DE UNA SUCESIÓN*

Vamos a estudiar el comportamiento de una sucesión para términos muy avanzados para comprobar su tendencia.

Este comportamiento que presenta una sucesión al estudiarla para valores muy grandes de n, se llama **límite de una sucesión**.

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

N	1	2	3	4	…	100	…	10000
a_n	0.5	0.8	0.9	0.94	…	0.9999	…	0.99999999

A medida que n se va haciendo más grande, los términos de la sucesión se van aproximando a 1. Diremos que $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

$$b_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

N	1	2	3	4	…	100	…	10000
b_n	-1	0.25	-0.1111	0.0625	…	0.0001	…	0.0000001

A medida que n se va haciendo más grande, los términos de la sucesión, a pesar de ir alternando el signo, se van aproximando a 0. Diremos que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

$c_n = 2n+1$

N	1	2	3	4	...	100	...	10000
c_n	3	5	7	9	...	201	...	20001

A medida que n se va haciendo más grande, los términos de la sucesión van creciendo. Diremos que $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Se dice que una sucesión a_n tiene por límite L si y sólo si para cualquier número positivo ε que tomemos, existe un término a_k, a partir del cual todos los términos de a_n, siguientes a a_k cumplen que $|a_n - L| < \varepsilon$.

Se dice que una sucesión a_n tiene por límite $+\infty$ cuando para todo M>0 existe un término a_k, a partir del cual todos los términos de a_n, siguientes a a_k cumplen que $a_n > M$.

Se dice que una sucesión a_n tiene por límite $-\infty$ cuando para todo N >0 existe un término a_k, a partir del cual todos los términos de a_n, siguientes a a_k cumplen que $a_n < -N$

Una sucesión que tiene por límite un número real se llama **sucesión convergente**.
Una sucesión que tiene como límite $\pm\infty$ se dice **divergente**.
Las sucesiones con límite 0 reciben el nombre de **infinitésimos**.

Sucesiones oscilantes: No son convergentes ni divergentes. Sus términos alternan de mayor a menor o viceversa.

1, 0, 3, 0 , 5, 0, 7, ...

Sucesiones alternadas: Son aquellas que alternan los signos de sus términos. Pueden ser convergentes, divergentes u oscilantes.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

- El límite, si existe, es único.
- Todas las sucesiones convergentes están acotadas.
- Hay sucesiones acotadas que no son convergentes.
- Todas las sucesiones monótonas y acotadas son convergentes.
- Hay sucesiones convergentes que no son monótonas.

Los límites de las sucesiones se pueden calcular usando procedimientos que se verán en el tema 5 para el cálculo de límites de funciones.

OPERACIONES CON LÍMITES

$\lim (a_n + b_n) = \lim (a_n) + \lim (b_n)$
$\lim (a_n - b_n) = \lim (a_n) - \lim (b_n)$
$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim (a_n) \cdot \lim (b_n)$
$\lim (a_n : b_n) = \lim (a_n) : \lim (b_n)$
$\lim k \cdot a_n = k \cdot \lim a_n$
$\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$
$\lim \log_a a_n = \log_a \lim a_n$

EL NÚMERO e

El número e es uno de los números irracionales más importantes en matemáticas. Se le conoce también como número de Euler.

e =2,718281828459045235…

Es el límite de la sucesión $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$
\begin{array}{ll}
n=1 & a_1 = 2 \\
n=2 & a_2 = 2.25 \\
\ldots & \\
n=100 & a_{100} = 2.704 \\
n=10000 & a_{10000} = 2.7181 \\
\ldots &
\end{array}
$$

3.3. *PROGRESIONES*

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una progresión aritmética es una sucesión recurrente en la que cada término, a excepción del primero, se obtiene sumando al anterior un mismo número, d, que se llama diferencia de la progresión.

EJEMPLO:
2, 6, 10, 14, 18, ... d = 4

TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN ARTIMÉTICA

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

EJEMPLO:

$a_1 = 1 \quad d = 3$

$a_n = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$

SUMA DE LOS N PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$$

Sumando término a término:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

En una progresión aritmética la suma de dos términos equidistantes de los extremos a_1 y a_n es igual a la suma de esos extremos, por lo tanto:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EJEMPLO:
Suma de los 50 primeros números pares:

$a_1 = 2$

$d = 2 \qquad \Rightarrow S = \dfrac{(2+100)50}{2} = 2550$

$a_{50} = 2 + 49 \cdot 2 = 100$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una progresión geométrica es una sucesión recurrente en la que cada término, a excepción del primero, se obtiene multiplicando el anterior por un mismo número, r, que se llama razón de la progresión.

EJEMPLO:

2, 6, 18, 54, 162,.. r = 3

TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$\ldots$$
$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

EJEMPLO:

$a_1 = 2 \qquad r = 5$

$a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

SUMA DE LOS N PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$r \cdot S_n = ra_1 + ra_2 + ra_3 + \ldots + ra_{n-1} + ra_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + ra_n$$

Calculamos:

$$r \cdot S_n - S_n = ra_n - a_1 \Rightarrow (r-1) \cdot S_n = ra_n - a_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{ra_n - a_1}{r-1} = \frac{r \cdot a_1 \cdot r^{n-1} - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

SUMA ILIMITADA DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DECRECIENTE

En una progresión geométrica decreciente, para valores muy grandes de n, los términos de ésta son prácticamente nulos. Por lo tanto en ese caso, la suma de todos los términos de una progresión geométrica puede escribirse:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

Utilizaremos esta fórmula cuando $|r| < 1$

PRODUCTO DE LOS N PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

En una progresión geométrica el producto de dos términos equidistantes de los extremos a_1 y a_n es igual al producto de esos extremos.

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$
$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_2 \cdot a_1$$
$$P_n \cdot P_n = (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1})(a_3 \cdot a_{n-2}) \ldots (a_{n-1} \cdot a_2)(a_n \cdot a_1)$$
$$P_n^{\,2} = (a_1 \cdot a_n)^n \Rightarrow P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En las sucesiones de término general $a_n = 5n - 3 \quad y \quad b_n = 2n$ hallar los términos primero, quinto y décimo.

2. Completa los términos intermedios que faltan en las siguientes sucesiones:
   a. 8,____, 4, 2, ____, -2, ...
   b. 1, 4, ____, 16, ____, 36, 49, ...

3. ¿Es 24 un término de la sucesión que tiene de término general $a_n = 3n + 12$?

4. Halla el término general de las sucesiones:
   a. $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$
   b. -2, -4, -6, -8,…
   c. $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \ldots$
   d. 5, 7, 9, 11, 13, 15, …
   e. 5, 10, 17, 26, 37, 50, ..
   f. -4, 9, -16, 25, -36, 49, ...
   g. $\frac{2}{4}, \frac{5}{9}, \frac{8}{16}, \frac{11}{25}, \frac{14}{36}, \ldots$

5. Estudia la monotonía, convergencia o divergencia y cotas de las sucesiones:
   a. a_n = 2, 3/2, 4/3, 5/4, ..., n+1 /n
   b. a_n= 2, -4, 8, -16, 32, ..., $(-1)^{n-1}\ 2^n$
   c. $a_n = \frac{n+2}{2n-1}$
   d. $1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \ldots$
   e. $a_n = \frac{n}{n+1}$

6. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión de la que sabemos $a_1 = 7 \quad a_2 = 5 \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

7. Escribe los seis primeros términos de la sucesión: $a_1 = 5 \qquad a_n = 3a_{n-1} - 8$

8. En una progresión aritmética sabemos que $a_2 = 1$ y $a_5 = 7$. Halla el término general y calcula la suma de los 15 primeros términos.

9. En una progresión aritmética, el sexto término vale 10,5; y la diferencia es 1,5. Calcula el primer término y la suma de los 9 primeros términos.

10. En una urbanización realizaron la instalación del gas natural en el año 1999. Consideramos que en ese momento se hizo la primera revisión. Sabiendo que las revisiones sucesivas se realizan cada 3 años, responde:
 A)¿En qué año se realizará la décima revisión?
 B)¿Cuál es el número de revisión que se realizará en el año 2035?

11. Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de razón positiva en la que $a_2 = 10$ y $a_4 = 250$.

12. En una progresión geométrica $a_2 = 6$ y r=0,5 . Calcula la suma de todos sus términos.

13. La población de un cierto país aumenta por término medio un 1% anual. Sabiendo que en la actualidad tiene 3 millones de habitantes:
 A) ¿Cuántos tendrá dentro de 10 años?
 B) ¿Y dentro de 20 años?

14. En una progresión aritmética sabemos que d = 3, $a_n = 34$ y $S_n = 133$. Calcula n y a_1.

15. En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?

16. Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:

 a. $a_n = 3n^2 - 10$
 b. $b_n = 3n - n^2$
 c. $c_n = 1 - (n+2)^2$
 d. $d_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$
 e. $e_n = \dfrac{2n^2-5}{n^3}$

17. Se consideran 10 términos consecutivos de una progresión aritmética. Los dos extremos suman 22 y el producto del tercero y el cuarto es 48.Halla los términos de la progresión.

18. Intercalar 4 términos entre 4 y 972 de modo que formen una progresión geométrica.

19. En una progresión geométrica a_1= 2 y la razón r = 3, hallar el término a_5 y el producto de los cinco primeros términos.

20. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 31 y su producto 125.

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Halla la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:

   a) De los 10 primeros términos de: 1, 6, 11...
   b) de los 20 primeros términos de: 22, 23, 24...
   c) De los 30 primeros términos de: 1/2, 3/4, 1...

   {a) a_{10}=46, S=235; b) a_{20}=41, S=630; c) a_{30}=31/4, S=495/4}

2. Hallar el producto de los 7 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el central vale 5. {78125}

3. Determinar cuatro números en progresión geométrica tal que los dos primeros sumen 95 y los dos últimos 36. {3, 6, 12, 24}

4. Halla la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica: 1/4, 1/8,1/16... {63/128}

5. Dadas las sucesiones convergentes $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{n}{n+1}$, calcula:

   a. $\lim a_n$ y $\lim b_n$
   b. $\lim(a_n + b_n)$
   c. $\lim(a_n \cdot b_n)$
   d. $\lim(a_n / b_n)$ {a)0 y 1; b)1; c) 0; d)0}

6. Encuentra la suma de los múltiplos de 5 mayores que 42 y menores que 158.

7. Halla las siguientes sumas:

   a. $3+7+11+...+43$
   b. $1000+1000\cdot 1{,}1+1000\cdot 1{,}1^2+...+1000\cdot 1{,}1^{15}$
   c. $80+40+20+10+5+...$

   {a)253; b)31772,48; c)160}

8. En una progresión aritmética conocemos $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$. Calcula:

   a. $a_1 + a_{100}$
   b. a_{220}

9. Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que el perímetro vale 48 cm. {3, 5, 7, 9, 11, 13}

10. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y a_2= 1. Calcula a_1 y la razón. {a_1=2 r = $\frac{1}{2}$ }