MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra

Despexe X da ecuación matricial $AB(X-I)=C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad \text{e}\qquad C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

2. Números e Álxebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1,\\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1,\\ x + m^2z = 0.\end{cases}$

3. Análise

a) Calcule os límites $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0)=0$, $f(3)=0$, $f''>0$ no intervalo $(0,1)$, $f''<0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise

Obteña a función f, sabendo que $f''(x)=2x-\mathrm{e}^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x=0$ é $y=3x-1$.

5. Xeometría

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1,-1,0)$ e é perpendicular á recta $r:\begin{cases}x=1+\lambda,\\ y=-1,\\ z=0,\end{cases}\quad \lambda\in\mathbb{R}.$

b) Calcule os dous puntos da recta $r:\begin{cases}x=\lambda,\\ y=\lambda,\\ z=\lambda,\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi: x-1=0$ é igual a 2.

6. Xeometría

a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ e $C(k,2,0)$ estean aliñados.

b) Estude a posición relativa das rectas $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ e $s:\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade

a) Se $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ e $P(B)=\frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?

b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:

- A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
- A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade

a) Calcule o valor de $P(-2\le X\le 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.

b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu-\alpha\le X\le\mu+\alpha)=0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

1. Números y Álgebra

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\left\{\begin{array}{lclclcl} x & + & (m-3)y & + & mz & = & 1, \\ & & (m-3)y & + & (m^2-m)z & = & 1, \\ x & & & + & m^2z & = & 0. \end{array}\right.$

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x.

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0)=0$, $f(3)=0$, $f''>0$ en el intervalo $(0,1)$, $f''<0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis

Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x)=2x-\mathrm{e}^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta r: $\begin{cases} x=1+\lambda, \\ y=-1, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \\ z=0, \end{cases}$

b) Calcule los dos puntos de la recta r: $\begin{cases} x=\lambda, \\ y=\lambda, \\ z=\lambda, \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x-1=0$ es igual a 2.

6. Geometría

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad

a) Si $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad

a) Calcule el valor de $P(-2\le X\le 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu-\alpha\le X\le\mu+\alpha)=0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

ABAU 2022

CONVOCATORIA ORDINARIA

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos): $\mathbf{0.75}$ por despexar X, $\mathbf{0.5}$ por calcular $(AB)^{-1}$, e $\mathbf{0.75}$ por calcular X.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos): $\mathbf{0.5}$ polo estudo do rango da matriz de coeficientes, $\mathbf{0.5}$ polo estudo do rango da matriz ampliada, $\mathbf{1} = 0.25 \times 4$ polas catro conclusións.

3. **Análise** (2 puntos)

   a) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ por cada un dos dous límites.

   b) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ por establecer relacións entre os datos e o debuxo pedido e $\mathbf{0.75}$ polo debuxo.

4. **Análise** (2 puntos): $\mathbf{1} = 0.5 + 0.5$ polas dúas integrais, $\mathbf{0.5}$ por ter en conta que $f(0) = -1$ e $f'(0) = 3$, $\mathbf{0.5}$ pola determinación da función.

5. **Xeometría** (2 puntos)

   a) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ polos elementos que determinan o plano, $\mathbf{0.5}$ pola ecuación pedida.

   b) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ por coñecer a fórmula da distancia, $\mathbf{0.75}$ polos dous puntos pedidos.

6. **Xeometría** (2 puntos)

   a) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ pola formulación do problema, $\mathbf{0.75}$ pola determinación de k e de m.

   b) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ pola posición relativa, $\mathbf{0.5}$ polo punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ por cada un dos dous casos.

b) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ por cada unha das dúas probabilidades pedidas.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

a) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ pola tipificación, $\mathbf{0.25}$ por chegar a $P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$ e $\mathbf{0.5}$ por chegar á solución.

b) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ pola tipificación, $\mathbf{0.25}$ por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) - P(Z \leq -\alpha/4) = 0.8064$, $\mathbf{0.25}$ por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) = 0.9032$ e $\mathbf{0.25}$ pola obtención do valor de α.

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
2022

Código: 20

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:
Despexe X da ecuación matricial $AB(X-I)=C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad \text{e} \qquad C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

2. Números e Álxebra:
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & (m-3)y & + & mz & = & 1,\\ & & (m-3)y & + & (m^2-m)z & = & 1,\\ x & & & + & m^2z & = & 0.\end{array}\right.$

3. Análise:
a) Calcule os límites $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.
b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0)=0$, $f(3)=0$, $f''>0$ no intervalo $(0,1)$, $f''<0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise:
Obteña a función f, sabendo que $f''(x)=2x-\mathrm{e}^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x=0$ é $y=3x-1$.

5. Xeometría:
a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1,-1,0)$ e é perpendicular á recta $r\colon\begin{cases}x=1+\lambda,\\ y=-1, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.\\ z=0,\end{cases}$
b) Calcule os dous puntos da recta $r\colon\begin{cases}x=\lambda,\\ y=\lambda,\\ z=\lambda,\end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi\colon x-1=0$ é igual a 2.

6. Xeometría:
a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ e $C(k,2,0)$ estean aliñados.
b) Estude a posición relativa das rectas $r\colon\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ e $s\colon\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:
a) Se $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ e $P(B)=\frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?
b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:

- A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
- A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade:
a) Calcule o valor de $P(-2\le X\le 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.
b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu-\alpha\le X\le\mu+\alpha)=0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

1. Números y Álgebra:
Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:
Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & (m-3)y & + & mz & = & 1,\\ & & (m-3)y & + & (m^2-m)z & = & 1,\\ x & & & + & m^2z & = & 0.\end{array}\right.$

3. Análisis:
a) Calcule los límites $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x.
b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0)=0$, $f(3)=0$, $f''>0$ en el intervalo $(0,1)$, $f''<0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis:
Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x)=2x-\mathrm{e}^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$.

5. Geometría:
a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases}x=1+\lambda,\\ y=-1, \quad \lambda\in\mathbb{R}.\\ z=0,\end{cases}$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r:\begin{cases}x=\lambda,\\ y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R},\\ z=\lambda,\end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi: x-1=0$ es igual a 2.

6. Geometría:
a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.
b) Estudie la posición relativa de las rectas $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ y $s:\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:
a) Si $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?
b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad:
a) Calcule el valor de $P(-2\le X\le 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.
b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu-\alpha\le X\le\mu+\alpha)=0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

1.

$$AB(X-I)=C \Leftrightarrow X-I=(AB)^{-1}C \Leftrightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{C}.$$

Se $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,

- $$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&6\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},\quad \det(AB)=8-6=2.$$

- $$(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-1\\-8&2&4\\-6&0&4\end{pmatrix}^T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-8&-6\\0&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\0&1&0\\-1/2&2&2\end{pmatrix}.$$

- $$(AB)^{-1}C=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\0&1&0\\-1/2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{X}=I+(AB)^{-1}C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3}&\boldsymbol{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{-1}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}\end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2. A notación F_i indicará «fila i». Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 3-m & m^2-m & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & 2(m^2-m) & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-m & 0 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente: $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (m-3)y & + & mz & = & 1, \\ & & (m-3)y & + & (m^2-m)z & = & 1, \\ & & & & (m^2-m)z & = & 0. \end{array}\right.$

$m^2 - m = m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,1\}$ e $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$

Discusión:

- **Se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3}\}$, o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é
$$z = 0, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = 0.$$

- **Se $\boldsymbol{m} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$**, temos $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (m-3)y & + & mz & = & 1, \\ & & (m-3)y & & & = & 1, \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$
O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:
$$\left[z = \lambda, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = -m\,\lambda\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- **Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$**, temos $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3z & = & 1, \\ & & 6z & = & 1, \\ & & 6z & = & 0. \end{array}\right.$
O sistema é incompatible, porque a segunda e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EXERCICIO 2:

$A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}$, $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{array}\right)$, $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & m-3 \\ 0 & m-3 \end{vmatrix} = m-3$ e $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m^2-m \end{vmatrix} = m^2-m$ non se anulan á vez, tense que $\operatorname{rank} A \geq 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= m^2(m-3) + (m-3)(m^2-m) - m(m-3) = (m-3)(m^2+m^2-m-m) \\ &= (m-3)(2m^2-2m) = 2m(m-1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,1,3\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $\boldsymbol{m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,3\}}$:** $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.

- **Caso $\boldsymbol{m = 0}$:** $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3+3 = 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2 = \operatorname{rank} A < 3 =$ n.º de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

- **Caso $\boldsymbol{m = 1}$:** $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2+2 = 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2 = \operatorname{rank} A < 3 =$ n.º de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

- **Caso $\boldsymbol{m = 3}$:** $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 3-6-9 = -12 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{x}}{\sin\boldsymbol{x}} \overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x}{\cos x} = \mathbf{1},$$

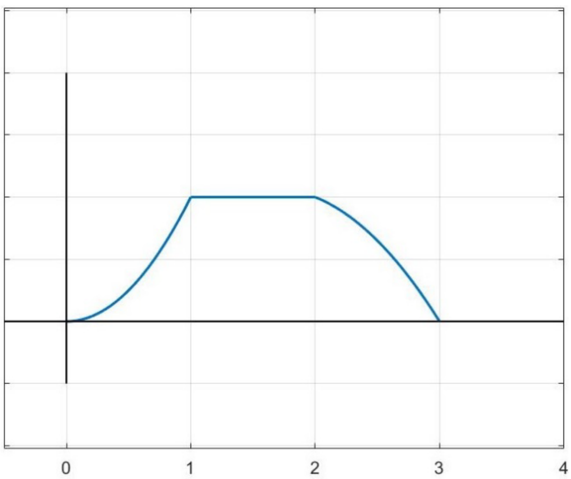
onde $\mathrm{L'H}$ indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Falando con rigor, o que asegura a regra de L'Hôpital é que o primeiro límite existe e vale 1 porque o último existe e vale 1.

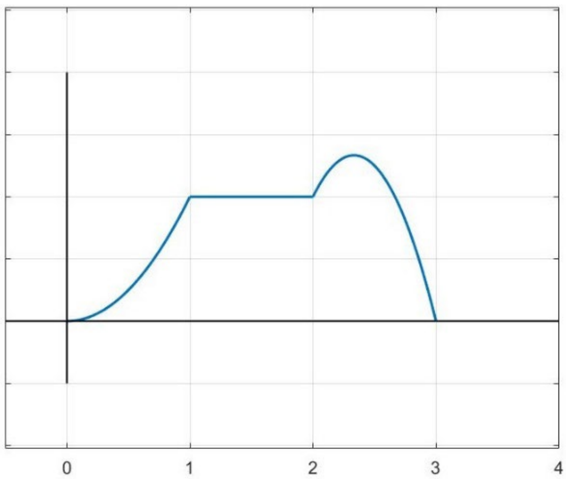
Analogamente,

$$\lim_{x\to 0^+}\boldsymbol{x}\ln\boldsymbol{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \mathbf{0},$$

onde $\mathrm{L'H}$ indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{-\infty}{\infty}$.

3.b) A función f é convexa no intervalo $(0,1)$ e cóncava no intervalo $(2,3)$. Posto que ten que ser continua e non negativa no intervalo $[0,3]$, e ademais cumprir $f(0) = f(3) = 0$ e ser constante no intervalo $(1,2)$, a súa gráfica debe seguir algún dos seguintes patróns:





MATEMÁTICAS II

4.

Integrando $f''(x) = 2x - \mathrm{e}^{-x}$ obtense

$$f'(x) = x^2 + \mathrm{e}^{-x} + C_1,$$

e, integrando esta última,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \mathrm{e}^{-x} + C_1 x + C_2 \qquad (C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes}).$$

Posto que a tanxente á gráfica de f en $(0, f(0))$ é $y = 3x - 1$, téñense que cumprir

$$f(0) = y(0) = -1, \qquad f'(0) = y' = 3.$$

De $f(0) = -1 + C_2 = -1$ e $f'(0) = 1 + C_1 = 3$ obtéñense os valores $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$, co cal

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{3} - \mathrm{e}^{-x} + 2x}.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) π pasa polo punto $P(1,-1,0)$ e é normal a $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(1,0,0)$. Logo

$$\boldsymbol{\pi: x - 1 = 0.}$$

5.b) Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, a distancia de P a π é

$$\mathrm{d}(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Entón a distancia dun punto xenérico da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{cases}$ ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é

$$\mathrm{d}(P(\lambda,\lambda,\lambda),\pi) = |\lambda - 1|.$$

Como

$$|\lambda - 1| = 2 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1,3\},$$

os dous puntos buscados son

$$\boldsymbol{P(-1,-1,-1) \quad \text{e} \quad Q(3,3,3).}$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Os puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ e $C(k,2,0)$ están aliñados se, e só se, $\overrightarrow{AB}(2-k,-3,2-m)$ e $\overrightarrow{AC}(0,-1,-m)$ son proporcionais.

De $2-k=0$ dedúcese que $\boldsymbol{k=2}$, e de $\frac{-3}{-1}=\frac{2-m}{-m}$ dedúcese que $3m=m-2$, é dicir, $\boldsymbol{m=-1}$.

6.b) Posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$.

- Como $\vec{d}_r(2,3,2)$ e $\vec{d}_s(3,2,3)$ non son proporcionais $(\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2})$, non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.

- $[P(1,-1,2)\in r,\ Q(-2,-3,-1)\in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(-3,-2,-3)$.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (dúas columnas iguais)} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanarios}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{r \text{ e } s \text{ córtanse}}.$$

- Punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 1+2\lambda, \\ y=-1+3\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}; \\ z = 2+2\lambda, \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=-2+3\mu, \\ y=-3+2\mu, \quad \mu\in\mathbb{R}. \\ z=-1+3\mu, \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} 1+2\lambda=-2+3\mu \\ -1+3\lambda=-3+2\mu \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda-3\mu=-3 \\ 3\lambda-2\mu=-2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4\lambda-6\mu=-6 \\ 9\lambda-6\mu=-6 \end{Bmatrix} \Rightarrow 5\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0.$$

Logo o punto de corte é

$$R(1+2\cdot 0,-1+3\cdot 0,2+2\cdot 0) = \boldsymbol{R(1,-1,2)}.$$

MATEMÁTICAS II

7.

7.a)

- Se A e B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{P(A)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \mathbf{\frac{1}{12}} = \mathbf{0.08\overline{3}}.$$

- Se A e B son independentes, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}P(A)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(A) \Leftrightarrow \frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \boldsymbol{P(A)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{1}{9}} = \mathbf{0.\overline{1}}.$$

7.b) CF = "ler ciencia ficción", NN = "ler novela negra".

$$P(\mathrm{CF}) = 0.21, \qquad P(\mathrm{NN}) = 0.63, \qquad P(\mathrm{CF} \cap \mathrm{NN}) = 0.17.$$

- $$\boldsymbol{P(\mathbf{NN}|\mathbf{CF})} = \frac{P(\mathrm{NN} \cap \mathrm{CF})}{P(\mathrm{CF})} = \frac{0.17}{0.21} \approx \mathbf{0.8095}.$$

- $$P(\overline{\mathrm{CF}} \cap \overline{\mathrm{NN}}) = P(\overline{\mathrm{CF} \cup \mathrm{NN}}) = 1 - P(\mathrm{CF} \cup \mathrm{NN}).$$

$$P(\mathrm{CF} \cup \mathrm{NN}) = P(\mathrm{CF}) + P(\mathrm{NN}) - P(\mathrm{CF} \cap \mathrm{NN}) = 0.21 + 0.63 - 0.17 = 0.67.$$

$$\boldsymbol{P(\overline{\mathbf{CF}} \cap \overline{\mathbf{NN}})} = 1 - 0.67 = \mathbf{0.33}.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EXERCICIO 7.b):

Vese na táboa de continxencia

	CF	$\overline{\text{CF}}$	Totais
NN	17	46	63
$\overline{\text{NN}}$	4	33	37
Totais	21	46	100

que

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{NN}|\mathbf{CF}) = \frac{17}{21} \approx \mathbf{0.8095}$$

e

$$\boldsymbol{P}(\overline{\mathbf{CF}} \cap \overline{\mathbf{NN}}) = \mathbf{0.33}.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a)

$$X \to N(1,3) \Rightarrow Z = \frac{X-1}{3} \to N(0,1).$$

$$\boldsymbol{P(-2 \leq X \leq 7)} = P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 1)\}$$
$$= P(Z \leq 2) + P(Z \leq 1) - 1 \approx 0.9772 + 0.8413 - 1 \ = \mathbf{0.8185}.$$

8.b)

$$X \to N(\mu, 4) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{4} \to N(0,1).$$

$$0.8064 = P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{4}\right)$$
$$= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \left\{1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\right\} = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1.$$

Logo

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 1.8064 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0.9032,$$

conque, segundo a táboa,

$$\frac{\alpha}{4} \approx 1.3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{5.2}.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota**: a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A.

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álxebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$

3. Análise

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X. Debuxe a gráfica de f, a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)\,\mathrm{d}x$. c) $\int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.

5. Xeometría

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a. Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π.

7. Estatística e Probabilidade

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

1. Números y Álgebra

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota**: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x)\,\mathrm{d}x$. c) $\int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π.

7. Estadística y Probabilidad

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

ABAU 2022

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionalos.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos):
   a) 0.75 puntos: $\mathbf{0.25}$ por determinar a matriz A, $\mathbf{0.5}$ por calcular a súa inversa.
   b) 1.25 puntos: $\mathbf{0.25}$ por deducir que $b_{12} = 0$ a partir da singularidade de B, $\mathbf{0.5}$ por calcular $A^{-1}B + A$ e $\mathbf{0.5}$ por deducir da igualdade $\det(A^{-1}B + A) = -1$ que $b_{22} = 2$.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos): $\mathbf{0.5}$ pola resolución da ecuación $\det A = 0$ (onde A é a matriz de coeficientes), $\mathbf{0.75}$ polo estudo dos rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada, $\mathbf{0.75} = 0.25 \times 3$ polas conclusións (tres casos).

3. **Análise** (2 puntos)
   a) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ pola ecuación da recta tanxente, $\mathbf{0.5}$ polo debuxo, $\mathbf{0.25}$ por especificar as coordenadas dos vértices.
   b) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ pola condición de continuidade, $\mathbf{0.5}$ pola determinación de a e b.

4. **Análise** (2 puntos):

a) $\mathbf{0.5}$ puntos. b) $\mathbf{0.5}$ puntos. c) $\mathbf{0.5}$ puntos. d) 0.5 puntos: **0.25** pola expresión en suma de fraccións simples, **0.25** polo cálculo final.

5. **Xeometría** (2 puntos)

a) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ por especificar os elementos que determinan o plano e $\mathbf{0.5}$ pola ecuación.

b) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ pola recta perpendicular, $\mathbf{0.25}$ polo punto de corte, $\mathbf{0.5}$ polo punto simétrico.

6. **Xeometría** (2 puntos): $\mathbf{0.25}$ por chegar á condición $5a + 2k = 0$, $\mathbf{1.5} = 0.5 \times 3$ por distinguir os tres casos posibles e $\mathbf{0.25}$ por deducir a condición de perpendicularidade.

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)

a) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ por cada unha das dúas probabilidades que se piden.

b) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ por identificar a distribución binomial e $\mathbf{0.75}$ polo cálculo da probabilidade pedida.

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)

a) 1 punto: $\mathbf{0.5}$ por chegar a $P(X \geq 16) \approx P(\tilde{X} \geq 15.5)$, con $\tilde{X}$ normal, $\mathbf{0.25}$ por chegar a $P(Z \geq 0.15)$ e $\mathbf{0.25}$ polo resultado.

b) 1 punto: $\mathbf{0.25}$ por calcular $P(X < 24)$, $\mathbf{0.5}$ por chegar a $P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) = 0.6064$ e $\mathbf{0.25}$ pola obtención de α.

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota**: a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A.

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$

3. Análise:

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X. Debuxar a gráfica de f, a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise:

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, \mathrm{d}x$. b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)\, \mathrm{d}x$. c) $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, \mathrm{d}x$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría:

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a. Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota**: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$

3. Análisis:

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibujar la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. b) $\int (\sin x)\sin(\cos x)\,\mathrm{d}x$. c) $\int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π.

7. Estadística y Probabilidad:

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

1.

1.a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ é a matriz pedida. Posto que $\det A = 1$,

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

1.b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$. Como B non ten inversa, debe ser $\det B = -b_{12} = 0$, de onde $\boldsymbol{b_{12} = 0}$. Logo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

- $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 - b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Agora de

$$\det(A^{-1}B + A) = 1 - b_{22} = -1,$$

dedúcese que $\boldsymbol{b_{22} = 2}$.

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ 0 & 0 & m-2 & -3 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m-2)z = -3. \end{cases}$$

Discusión:

- **Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é
$$z = \frac{-3}{m-2}, \quad y = -2 - (m-2)z, \quad x = \frac{-my - z}{m+1}.$$
- **Se $m = -1$**, temos
$$\begin{cases} -y + z = 0, \\ y - 3z = -2, \\ -3z = -3, \end{cases}$$
e, polo tanto, **o sistema é compatible indeterminado**, xa que ten as seguintes infinitas solucións:
$$[\,x = \lambda, \quad y = 1, \quad z = 1], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
- **Se $m = 2$, o sistema é incompatible**, porque a terceira ecuación queda $0 = -3$.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$A=\begin{pmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$, $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{array}\right)$, $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3\ \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = m+1$ e $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-2)-1$ non se anulan á vez, é seguro que $\operatorname{rank} A \geq 2\ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+1)(m-1) + m(m-2)(m+1) - (m+1) - m(m-2)(m+1) \\ &= (m+1)(m-1) - (m+1) = (m+1)(m-1-1) = (m+1)(m-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \{-1,2\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{-1,2}\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{-1}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9+2+4+3=0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2 = \operatorname{rank} A < 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{2}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4+3+4=3 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

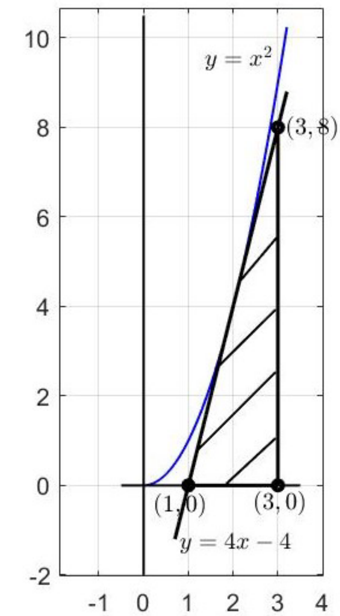
A ecuación da recta tanxente á gráfica de f en $x = 2$ é $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, é dicir, $y - 4 = 4(x-2)$ ou, equivalentemente,

$$y = 4x - 4.$$

Corte da recta co eixe X: $4x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

Ao ter lonxitude 2 o cateto que está sobre o eixe X, os vértices do triángulo son $\boldsymbol{A(1,0)}$**,** $\boldsymbol{B(3,0)}$ **e** $\boldsymbol{C(3,8)}$.

A situación é a do debuxo seguinte:



3.b) Hai que achar a e b que fagan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

Basta facer o estudo en $x = 1$.

Para ser derivable, a función debe ser continua, polo que os límites laterais $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ teñen que existir e valer $f(1)$. Agora observemos que, por unha banda, $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e, pola outra, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax^2 + bx) = a + b$. En consecuencia, ten que ser $b = 1 - a$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq 1, \\ ax^2 + (1-a)x & \text{se} \quad x > 1, \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1, \\ 2ax + 1 - a & \text{se} \quad x > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} (2ax + 1 - a) = 2a + 1 - a = a + 1,$$

e polo tanto f é derivable se, e só se, $\boldsymbol{a = -1}$ (para que $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$) **e** $\boldsymbol{b} = 1 - a = \mathbf{2}$.

MATEMÁTICAS II

4.

4.a) Facendo o cambio $z = x^2 + 1$ (co cal $\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x$) vese que

$$\int \mathbf{2x\sqrt{x^2+1}\,dx} = \int \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C}.$$

4.b) Facendo o cambio $z = \cos x$ (co cal $\mathrm{d}z = -\sin x\ \mathrm{d}x$) vese que

$$\int \mathbf{(\sin x)\sin(\cos x)\,dx} = -\int \sin z\ \mathrm{d}z = \cos z + C = \mathbf{\cos(\cos x) + C}.$$

4.c) Integrando por partes coas eleccións

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}$$

chégase a

$$\int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\ \mathrm{d}x.$$

Aplicando partes de novo coas eleccións

$$\begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x & v = \sin x \end{array}$$

tense finalmente que

$$\int \mathbf{x^2\sin x\ dx} = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x\right) = \mathbf{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C}.$$

4.d)

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}.$$

Tense que cumprir que $(A+B)x - 2A - B = 1$, polo que A e B son a solución do sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2A - B = 1. \end{cases}$$

Sumando as dúas ecuacións vese que

$$-A = 1 \Longrightarrow A = -1,$$

conque

$$B = -A = 1.$$

Así pois,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

co cal

$$\int \mathbf{\frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx} = \int\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \mathbf{\ln\frac{|x-2|}{|x-1|} + C}.$$

MATEMÁTICAS II

5. a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.
b) Calcule o punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

5.a) Ecuación implícita do plano π que contén a $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa por $P(0,1,0)$:

$Q(-1,-2,-3)$ é un punto de r. O plano pedido pasa por $P(0,1,0)$ e é paralelo ao vector director de r, $\vec{d}_r(3,2,1)$, e ao vector $\overrightarrow{QP}(1,3,3)$, polo que a súa ecuación implícita é

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6x + y - 1 + 9z - 2z - 3x - 9(y-1) = 3x - 8y + 7z + 8.$$

$$\boldsymbol{\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0.}$$

5.b) Punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto a $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(11,-14,13)$ e é perpendicular a π:
  $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(3,-8,7)$, co cal $r: \begin{cases} x = 11 + 3\lambda, \\ y = -14 - 8\lambda, \\ z = 13 + 7\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$
- Corte de r con π:
  $$3(11+3\lambda) - 8(-14-8\lambda) + 7(13+7\lambda) + 8 = 33 + 9\lambda + 112 + 64\lambda + 91 + 49\lambda + 8$$
  $$= 122\lambda + 244 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$
  Logo o punto de corte é $Q(11-6, -14+16, 13-14) = Q(5,2,-1)$.
- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x',y',z')$ ao punto,
  $$\frac{11+x'}{2} = 5 \Leftrightarrow 11 + x' = 10 \Leftrightarrow x' = -1,$$
  $$\frac{-14+y'}{2} = 2 \Leftrightarrow -14 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 18,$$
  $$\frac{13+z'}{2} = -1 \Leftrightarrow 13 + z' = -2 \Leftrightarrow z' = -15.$$
  Tense logo $\boldsymbol{P'(-1,18,-15)}$.

MATEMÁTICAS II

6. Posición relativa de $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de k e a:

$\vec{d}_r(1, k, 3)$ é vector director de r, e $\vec{n}_\pi(a, 4{,}3a)$ é normal a π.

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = a + 4k + 9a = 10a + 4k = 2(5a + 2k).$$

Se $5a + 2k = 0$, entón $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son perpendiculares, conque nese caso ou ben $r \subset \pi$, ou ben $r \parallel \pi$ (entendendo que $r \cap \pi = \emptyset$). Supoñamos $5a + 2k = 0$ e tomemos $P(-1{,}1{,}0)$, que é un punto de r. É claro que $r \subset \pi$ se, e só se, $P \in \pi$.

$$P \in \pi \Leftrightarrow -a + 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

Conclusión:

- **Se $a = 6$ e $k = \frac{-5a}{2} = \frac{-30}{2} = -15$, $r \subset \pi$.**
- **Se $5a + 2k = 0$ e $a \neq 6$, $r \parallel \pi$.**
- **Se $5a + 2k \neq 0$, r e π córtanse nun punto.**

Se é posible, diga cando r é perpendicular a π:

Obsérvese que

$$\vec{d}_r \parallel \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{k}{4} = \frac{3}{3a} \Leftrightarrow ak = 4,$$

polo que **r é perpendicular a π se, e só se, $ak = 4$**.

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) $N =$ "ser novela", $C =$ "ser clásico". Sábese que $P(N) = 0.7$, $P(C) = 0.4$ e $P(N|C) = 0.6$.

	C	$\bar{C}$	
N	$40 \times \mathbf{0.6} = 24$	46	$\mathbf{70}$
$\bar{N}$	16	14	30
	$\mathbf{40}$	60	100

Segundo a táboa de continxencia,

$$\boldsymbol{P(\bar{N} \cap C)} = \frac{16}{100} = \mathbf{0.16}$$

e

$$\boldsymbol{P(C|N)} = \frac{24}{70} \approx \mathbf{0.3429}.$$

ALTERNATIVA para 7.b):

$$P(N \cap C) = P(N|C)P(C) = 0.6 \times 0.4 = 0.24,$$

$$\boldsymbol{P(\bar{N} \cap C)} = P(C) - P(N \cap C) = 0.4 - 0.24 = \mathbf{0.16}.$$

Por outra banda,

$$\boldsymbol{P(C|N)} = \frac{P(N \cap C)}{P(N)} = \frac{0.24}{0.7} \approx \mathbf{0.3429}.$$

7.b) $X =$ "n.º de delitos que se resolven, de entre os 3".

$X \to B(n, p)$, con $n = 3$ e $p = 0.2$. Tense logo $q = 1 - p = 0.8$. Pídese $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 q^3 = (0.8)^3 = 0.512,$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 1)} = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.512 = \mathbf{0.488}.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a) $X =$ "n.º de preguntas acertadas, de entre as 60".

$X \to B(n, p)$, con $n = 60$ e $p = 0.25$. Tense logo $q = 1 - p = 0.75$. Pídese $P(X \geq 16)$.

$np = 15$, $nq = 45$, $npq = 11.25$, $\sqrt{npq} \approx 3.3541$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \to N(15, 3.3541)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 15}{3.3541} \to N(0,1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\boldsymbol{P(X \geq 16)} \approx P(\tilde{X} \geq 15.5) = P\left(Z \geq \frac{15.5 - 15}{3.3541}\right) \approx P(Z \geq 0.15) = 1 - P(Z < 0.15) \approx 1 - 0.5596 = \mathbf{0.4404}.$$

8.b) $X \to N(25, 2)$, conque $Z = \frac{X - 25}{2} \to N(0,1)$.

$$\boldsymbol{P(X < 24)} = P\left(Z < \frac{24 - 25}{2}\right) = P(Z < -0.5) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) \approx 1 - 0.6915 = \mathbf{0.3085}.$$

Por outra banda,

$$0.2128 = P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < Z < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - \left\{1 - P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right)\right\} = 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - 1,$$

de onde

$$2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) = 1.2128,$$
$$P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) = 0.6064,$$
$$\frac{\alpha}{2} \approx 0.27,$$
$$\boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{0.54}.$$