CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

Código: 20

XUÑO 2019

MATEMÁTICAS II

(O/A estudante debe responder soamente as preguntas dunha das opcións. A puntuación máxima por preguntas é a seguinte: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A+I$ é invertible, despexa X na ecuación $A-X=AX$.

b) Se $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Mediante integración por partes, demostra que $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1)+C$. Logo, demostra a mesma igualdade mediante derivación.

b) Se $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ ax+b & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty),\end{cases}$ di que relación ten que existir entre os parámetros a e b para que f sexa continua e cales teñen que ser os seus valores para que f sexa derivable.

c) Calcula a área da rexión encerrada polo eixe X, a recta $x=4$ e a gráfica de $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ \frac{x}{\mathrm{e}} & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty).\end{cases}$

3. Pídese:

a) Calcular o ángulo do intervalo $[0°, 90°]$ que forman os vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obter a ecuación implícita do plano que pasa polo punto $P(1,-3,0)$ e é perpendicular á recta $\begin{cases}x - y + 2z = 1,\\ \quad\ \ y - z = 0.\end{cases}$

c) Calcular a distancia do punto $Q(1,1,1)$ ao plano $\pi\colon -x+y+z+4=0$ e o punto simétrico de Q respecto a π.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.

b) Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases}2x - y + 3z = 0,\\ \quad\ \ my + (3-m)z = -6,\\ 2x - y + mz = 6.\end{cases}$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m=0$ e $m=4$.

2. Considérese a función $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$. Pídese:

a) Calcular os límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecemento e de decrecemento, extremos relativos e puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

3. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1\colon mx-y+2=0$ e $\pi_2\colon 2x+3y=0$ en función do parámetro m.

b) Obtén a ecuación implícita do plano que pasa polos puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ e $C(0,1,0)$.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,2,3)$ con respecto ao plano $\pi\colon -x+z=0$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula $P(A)$ se $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ e $P(A\cup B)$ é o triplo de $P(A)$.

b) Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media $25°\mathrm{C}$ e desviación típica $4°\mathrm{C}$. Calcula a probabilidade de que a temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre $21°\mathrm{C}$ e $27.2°\mathrm{C}$. En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A+I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A-X=AX$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.

b) Si $f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, \mathrm{e}], \\ ax+b & \text{si} \quad x \in (\mathrm{e}, \infty), \end{cases}$ di qué relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que f sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que f sea derivable.

c) Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta $x=4$ y la gráfica de $f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, \mathrm{e}], \\ \frac{x}{\mathrm{e}} & \text{si} \quad x \in (\mathrm{e}, \infty). \end{cases}$

3. Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0°, 90°]$ que forman los vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$

c) Calcular la distancia del punto $Q(1,1,1)$ al plano $\pi: -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto a π.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

b) Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ my + (3-m)z = -6, \\ 2x - y + mz = 6. \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=4$.

2. Considérese la función $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$. Se pide:

a) Calcular los límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

3. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: mx-y+2=0$ y $\pi_2: 2x+3y=0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi: -x+z=0$.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A\cup B)$ es el triple de $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media $25℃$ y desviación típica $4℃$. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre $21℃$ y $27.2℃$. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

ABAU

CONVOCATORIA DE XUÑO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto.

b) 1 punto.

2) a) 1 punto.

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola comprobación mediante derivación.

b) 1 punto.

- 0,5 puntos pola condición de continuidade.
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade.

c) 1 punto.

- 0,25 puntos pola xustificación dos límites de integración.
- 0,5 puntos pola escritura da área como suma de integrais e obtención das primitivas.
- 0,25 puntos polo uso da regra de Barrow.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 1.25 puntos.

b) 0.75 puntos.

2) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

ABAU

CONVOCATORIA DE XUÑO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto.

b) 1 punto.

2) a) 1 punto.

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola comprobación mediante derivación.

b) 1 punto.

- 0,5 puntos pola condición de continuidade.
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade.

c) 1 punto.

- 0,25 puntos pola xustificación dos límites de integración.
- 0,5 puntos pola escritura da área como suma de integrais e obtención das primitivas.
- 0,25 puntos polo uso da regra de Barrow.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 1.25 puntos.

b) 0.75 puntos.

2) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A+I$ é invertible, despexa X na ecuación $A-X=AX$.

b) Se $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$.

Solución:

1.a) $A-X=AX \Leftrightarrow A=AX+X \Leftrightarrow A=(A+I)X \Leftrightarrow X=(A+I)^{-1}A$.

1.b) Claramente, $A+I=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. Posto que $\det(A+I)=4+1=5$, tense

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X=(A+I)^{-1}A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvase a idea seguinte: calcular α,β,γ e δ tales que

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Mediante integración por partes, demostra que $\int \ln x \; dx = x(\ln x-1)+C$. Logo, demostra a mesma igualdade mediante derivación.

b) Se $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ ax+b & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty),\end{cases}$ di que relación ten que existir entre os parámetros a e b para que f sexa continua e cales teñen que ser os seus valores para que f sexa derivable.

c) Calcula a área da rexión encerrada polo eixe X, a recta $x=4$ e a gráfica de $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ \frac{x}{\mathrm{e}} & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty).\end{cases}$

Solución:

2.a) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$u=\ln\, x, \quad du=\frac{1}{x}dx,$$
$$dv=dx, \quad v=x,$$

tense $\int \ln x \; dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$.

Por outra banda,

$$(x(\ln x-1)+C)'=\big(x(\ln x-1)\big)'=\ln x-1+x\frac{1}{x}=\ln x.$$

MATEMÁTICAS II

2.b) Estúdanse a continuidade e a derivabilidade no único punto conflitivo, que é $x = \mathrm{e}$.

Continuidade:

$f(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} = 1$, $\lim\limits_{x\uparrow \mathrm{e}} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow \mathrm{e}} \ln x = \ln \mathrm{e} = 1$, $\lim\limits_{x\downarrow \mathrm{e}} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow \mathrm{e}} (ax+b) = a\mathrm{e}+b$. En consecuencia, f é continua se, e soamente se, $a\mathrm{e}+b=1$.

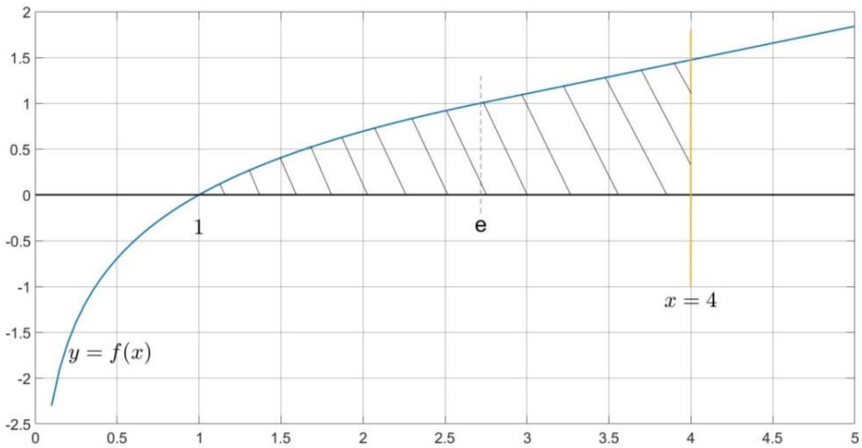
Derivabilidade:

Nótese en primeiro lugar que, para que f sexa derivable, a condición $a\mathrm{e}+b=1$ tense que cumprir, xa que a continuidade é condición necesaria para a derivabilidade. Por outra banda, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \in (0,\mathrm{e}), \\ a & \text{se} \quad x \in (\mathrm{e},\infty), \end{cases}$ de onde $\lim\limits_{x\uparrow \mathrm{e}} f'(x) = \lim\limits_{x\uparrow \mathrm{e}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $\lim\limits_{x\downarrow \mathrm{e}} f'(x) = \lim\limits_{x\downarrow \mathrm{e}} a = a$.

Conclúese que f é derivable se, e soamente se, $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $b = 0$.

Alternativa para o estudo da derivabilidade: substitúase b por $1 - a\mathrm{e}$ na expresión de f (xa que non pode ser derivable se non é continua) e empréguese a definición de derivada. É dicir, compróbese para que valor ou valores de a os límites $\lim\limits_{x\uparrow \mathrm{e}} \frac{f(x)-f(\mathrm{e})}{x-\mathrm{e}}$ e $\lim\limits_{x\downarrow \mathrm{e}} \frac{f(x)-f(\mathrm{e})}{x-\mathrm{e}}$ existen e son iguais.

2.c)



De acordo coa figura, a área pedida é a seguinte (o adxectivo "encerrada" obríganos a considerar a rexión raiada):

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, dx + \int_{\mathrm{e}}^{4} \frac{x}{\mathrm{e}} \, dx = [x(\ln x - 1)]_1^{\mathrm{e}} + \left[\frac{x^2}{2\mathrm{e}}\right]_{\mathrm{e}}^{4} \overset{\boxed{\ln \mathrm{e} = 1, \ln 1 = 0}}{=} 1 + \frac{16}{2\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}} = 1 + \frac{8}{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}}{2} = \frac{2\mathrm{e}+16-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}} \ \mathrm{u}^2 \approx$$

$2.5839 \ \mathrm{u}^2$,

onde u indica "unidade de lonxitude".

3. Pídese:

a) Calcular o ángulo do intervalo $[0°, 90°]$ que forman os vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

MATEMÁTICAS II

b) Obter a ecuación implícita do plano que pasa polo punto $P(1,-3,0)$ e é perpendicular á recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$

c) Calcular a distancia do punto $Q(1,1,1)$ ao plano $\pi: -x+y+z+4=0$ e o punto simétrico de Q respecto a π.

Solución:

3.a) Se $\cdot$ denota produto escalar de vectores, $|\ \ |$ valor absoluto e $\|\ \ \|$ norma euclidiana, sábese que o ángulo pedido α está determinado pola ecuación $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, no sentido de que é o único ángulo α do intervalo [0°,90°] que satisfai esa igualdade.

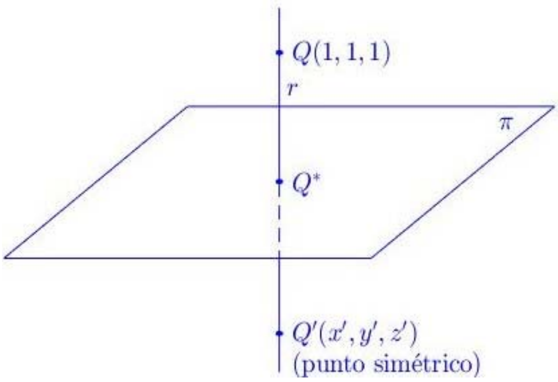
Dado que

- $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{(-1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ e
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+1-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$,

chégase a que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, de onde $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60\,°$.

3.b) Chamemos π ao plano pedido e r á recta dada. Pódese obter un vector normal a π a partir de dous puntos de r: $R(1,0,0), S(0,1,1) \in r$, e en consecuencia $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ é normal a π. Alternativamente, pódese obter $\vec{n}_\pi$ do produto vectorial $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Como π pasa por $P(1,-3,0)$, a súa ecuación é $\pi: -(x-1)+(y+3)+z=0$, e como $-(x-1)+(y+3)+z = -x+1+y+3+z = -x+y+z+4$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: -x+y+z+4=0$.

3.c) $\mathrm{d}(Q,\pi) = \frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2.8868$. Pasemos á obtención do punto simétrico.



A recta r que pasa por $Q(1,1,1)$ e é perpendicular a $\pi: -x+y+z+4=0$ vén dada por

$$r: \begin{cases} x = 1-\lambda, \\ y = 1+\lambda, \\ z = 1+\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>Cálculo de $Q^* = r \cap \pi$:</u>

$$\begin{aligned} -(1-\lambda)+1+\lambda+1+\lambda+4 &= -1+\lambda+1+\lambda+1+\lambda+4 \\ &= 3\lambda+5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}, \end{aligned}$$

de onde $Q^*(x,y,z)$ con $x = 1+\frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ e $y = z = 1-\frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$, é dicir, $Q^*\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

MATEMÁTICAS II

Cálculo de $Q'(x', y', z')$, punto simétrico pedido:

$$\frac{1+x'}{2} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3 + 3x' = 16 \Leftrightarrow 3x' = 13 \Leftrightarrow x' = \frac{13}{3},$$

$$\frac{1+y'}{2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3 + 3y' = -4 \Leftrightarrow 3y' = -7 \Leftrightarrow y' = -\frac{7}{3},$$

$$z' = y'.$$

En definitiva, $Q'\left(\frac{13}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.

b) Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

Solución:

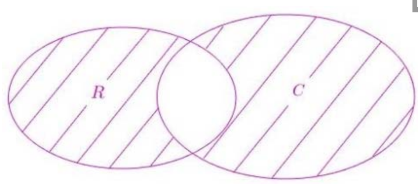
4.a) Damos nomes aos sucesos: $R =$ "ter rosas" e $C =$ "ter camelias".

Sabemos que $P(C) = 0.4$, $P(R) = 0.35$ e $P(C \cap R) = 0.21$. As probabilidades pedidas son, por orde, as seguintes:

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0.4 + 0.35 - 0.21 = 0.54$.
- En virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{C} \cap \bar{R} = \overline{C \cup R}$. Consecuentemente, $P(\bar{C} \cap \bar{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0.54 = 0.46$.
- $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0.21}{0.35} = 0.6$.
- $P(R|C) = \frac{P(C \cap R)}{P(C)} = \frac{0.21}{0.4} = 0.525$.
- $P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big) = P(R \cap \bar{C}) + P(C \cap \bar{R})$, xa que os sucesos $R \cap \bar{C}$ e $C \cap \bar{R}$ son incompatibles. De $P(R) = P(R \cap C) + P(R \cap \bar{C})$ dedúcese que $P(R \cap \bar{C}) = 0.35 - 0.21 = 0.14$, e de $P(C) = P(C \cap R) + P(C \cap \bar{R})$ que $P(C \cap \bar{R}) = 0.4 - 0.21 = 0.19$. Por último, $P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big) = 0.14 + 0.19 = 0.33$.

Alternativa para o cálculo de $P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big)$ (ver debuxo):

$P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big) = P(R \cup C) - P(R \cap C) = 0.54 - 0.21 = 0.33$.



4.b) $X =$ "n.º de persoas nacidas no mes de xaneiro, de entre as 50".

$X \to B\left(50, \frac{1}{12}\right)$, é dicir, X segue unha distribución binomial de parámetros $n = 50$ e $p = \frac{1}{12} = 0.08\overline{3}$; logo $q = 1 - p = \frac{11}{12} = 0.91\overline{6}$. Pídese $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$

MATEMÁTICAS II

Posto que $P(X=0)=\binom{50}{0}p^0q^{50}=\left(\frac{11}{12}\right)^{50}\approx 0.0129$ e $P(X=1)=\binom{50}{1}p^1q^{49}=50\frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{49}\approx 0.0586$, téñense sucesivamente $P(X=0)+P(X=1)\approx 0.0129+0.0586=0.0715$ e $P(X\geq 2)\approx 1-0.0715=0.9285$.

Nota: se se toma $p=\frac{31}{365}\approx 0.0849$, obtense $P(X\geq 2)\approx 0.9333$.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ my + (3-m)z = -6, \\ 2x - y + mz = 6. \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 4$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 0 & 0 & m-3 & 6 \end{array}\right),$$ polo que o sistema dado equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ my + (3-m)z = -6, \\ (m-3)z = 6. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z, seguindo co de y e terminando co de x. Sempre que $m \neq 3$, téñense que $z = \frac{6}{m-3}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 0$, de onde se infire á súa vez que $y = 0$ cando, ademais de ser $m \neq 3$, é $m \neq 0$. Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z = \frac{6}{m-3}$, $y = 0$, $x = -\frac{3z}{2}$.
- Caso $m = 3$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 6$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ 3z = -6, \\ -3z = 6, \end{cases}$$

de onde $z = -2$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = \frac{\lambda+6}{2}$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = 2m$ e $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -m+3$ non se anulan á vez, $2 \le \operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} A^* \le 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2(3-m) - 6m + 2(3-m) = 2m^2 - 6m = 2m(m-3),$$

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{0,3\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

MATEMÁTICAS II

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas.
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$, tense $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 <$ n.º de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m = 3$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 36 + 12 - 12 = 36 \neq 0$, tense $\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank} A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \frac{\lambda+6}{2}, \\ y = \lambda, \\ z = -2, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ver apartado 1.a).)

Se $m = 4$, a solución é $z = \frac{6}{m-3} = 6$, $y = 0$ e $x = -\frac{3z}{2} = -\frac{18}{2} = -9$. (Ver apartado 1.a).)

Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 4$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Considérese a función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Pídese:

a) Calcular os límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecemento e de decrecemento, extremos relativos e puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

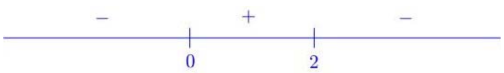
Solución:

$\infty \cdot 0$ (indeterminación) IND. $\frac{\infty}{\infty}$, L'Hôpital IND. $\frac{\infty}{\infty}$, L'Hôpital

2.a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Falando con rigor, a regra de L'Hôpital dinos que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe e vale 0 porque $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x}$ existe e vale 0.

No segundo límite non hai indeterminación: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \infty \cdot \infty = \infty$.

2.b) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. A derivada $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$ ten o signo de $x(2-x)$, xa que e^{-x} é sempre positivo. Logo f decrece estritamente en $(-\infty, 0)$, crece estritamente en $(0,2)$ e decrece estritamente en $(2, \infty)$.



SIGNO DE f'.

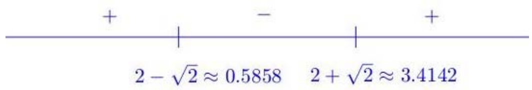
Ao ser f continua, ten un mínimo relativo estrito en $x = 0$ e un máximo relativo estrito en $x = 2$. Non ten outros extremos.

MATEMÁTICAS II

Pasamos agora ao estudo das posibles inflexións. $f'(x) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$, de onde $f''(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} - (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x} = (2 - 2x - 2x + x^2)\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$. Polo tanto, f'' ten o signo de $x^2 - 4x + 2$, cuxas raíces son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Agora podemos marcar no debuxo seguinte o signo de f'':



SIGNO DE f''.

(Se houbera dúbidas, bastaría comprobar o signo de f'' nun punto calquera de cada un dos tres intervalos de interese.)

Esta análise dinos que f é convexa en $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, cóncava en $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ e de novo convexa en $(2+\sqrt{2}, \infty)$. A función f presenta polo tanto dous puntos de inflexión: en $x = 2 - \sqrt{2}$ e en $x = 2 + \sqrt{2}$.

2.c) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$u = x^2, \qquad du = 2x dx,$$
$$dv = \mathrm{e}^{-x} dx, \quad v = -\mathrm{e}^{-x},$$

tense

$$\int f(x)dx = \int x^2 \mathrm{e}^{-x} dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x} dx.$$

Usando de novo o método de integración por partes, esta vez con

$$u = x, \qquad du = dx,$$
$$dv = \mathrm{e}^{-x} dx, \quad v = -\mathrm{e}^{-x},$$

chégase a que $\int x\mathrm{e}^{-x} dx = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x} dx$.

Consecuentemente,

$$\int f(x)dx = \int x^2\mathrm{e}^{-x} dx = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\left\{-x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x} dx\right\} = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C$$
$$= (-x^2 - 2x - 2)\mathrm{e}^{-x} + C = -(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x} + C.$$

3. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función do parámetro m.

b) Obtén a ecuación implícita do plano que pasa polos puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ e $C(0,1,0)$.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,2,3)$ con respecto ao plano $\pi : -x + z = 0$.

Solución:

3.a) Os planos nunca coinciden, xa que $O(0,0,0) \in \pi_2 \setminus \pi_1$ para calquera valor de m. Agora, como $\vec{n}_{\pi_1}(m, -1, 0)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(2,3,0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2,

MATEMÁTICAS II

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3},$$

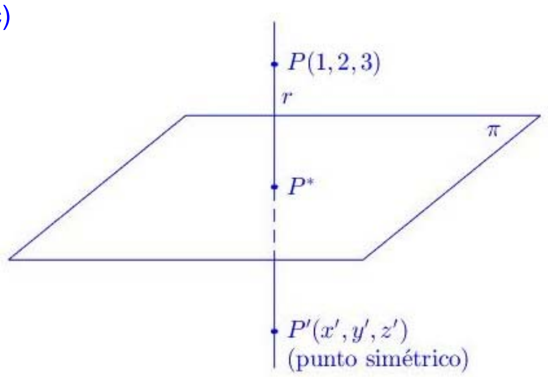
o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Posto que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2$ para calquera valor de m. Por outra banda, $\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$. Segundo esta análise:

- Se $m = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{rank} A = 1 < \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) Os vectores $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC}(0,1,0)$ son xeradores do plano pedido, ao que chamaremos π. Ademais, $A(0,0,0) \in \pi$, polo que $\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Como $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z - x$, a ecuación implícita do plano é $\pi: -x + z = 0$.

3.c)



A recta que pasa por $P(1,2,3)$ e é perpendicular a $\pi: -x + z = 0$ é

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2, \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>Cálculo de $P^* = r \cap \pi$</u>:

$$-(1-\lambda) + 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1,$$

de onde $P^*(x,y,z)$ con $x = 1 - (-1) = 2$, $y = 2$ e $z = 3 + (-1) = 2$, é dicir, $P^*(2,2,2)$.

<u>Cálculo de $P'(x',y',z')$, punto simétrico pedido</u>:

$$\frac{1+x'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + x' = 4 \Leftrightarrow x' = 3,$$

$$\frac{2+y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 2,$$

$$\frac{3+z'}{2} = 2 \Leftrightarrow 3 + z' = 4 \Leftrightarrow z' = 1.$$

En definitiva, $P'(3,2,1)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula $P(A)$ se $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A \cup B)$ é o triplo de $P(A)$.

b) Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media 25℃ e desviación típica 4℃. Calcula a probabilidade de que a

MATEMÁTICAS II

temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre 21℃ e 27.2℃. En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

Solución:

4.a) Temos $3P(A) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, de onde en primeira instancia se obtén $2P(A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.2 = 0.6$ e, en segunda, $P(A) = 0.3$.

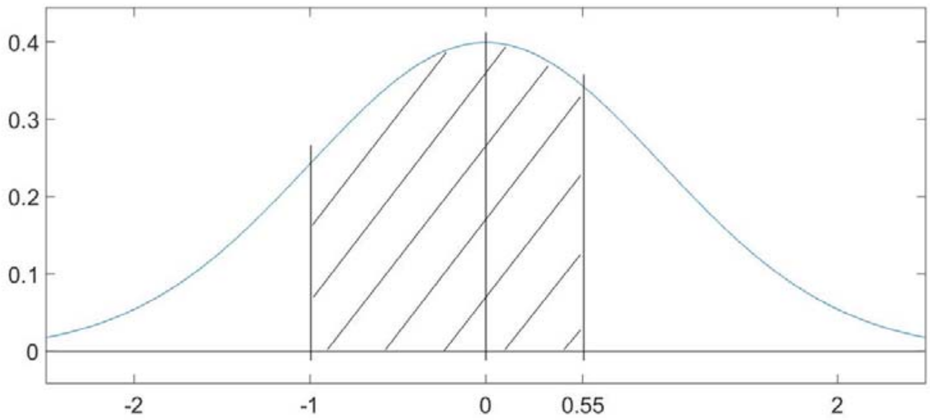
4.b) $X =$ "temperatura máxima dun día do mes de xullo".

$$X \to N(25,4) \Longrightarrow Z = \frac{X-25}{4} \to N(0,1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(21 \le X \le 27.2) &= P\left(\frac{21-25}{4} \le Z \le \frac{27.2-25}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 0.55) \\ &= P(Z \le 0.55) - P(Z < -1) = P(Z \le 0.55) - P(Z > 1) \\ &= P(Z \le 0.55) - \{1 - P(Z \le 1)\} \approx 0.7088 - 1 + 0.8413 = 0.5501 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida. Espérase polo tanto que en $0.5501 \times 31 \approx 17$ días do mes a temperatura máxima estea comprendida entre 21℃ e 27.2℃.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-1 \le Z \le 0.55)$.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade **Código: 20**

XULLO 2019

MATEMÁTICAS II

(O/A estudante debe responder soamente as preguntas dunha das opcións. A puntuación máxima por preguntas é a seguinte: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despexa X na ecuación $XA+B=C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA+B=C$ se $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x)=x^2\ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y=4-x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y=4-x^2$.

3. Pídese:

a) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x+my+z+2=0$ e $\pi_2: mx+y+z+m=0$ en función de m.

b) Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ e $C(8,1,m)$ estean aliñados.

c) Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1,2,1)$ e $Q(8,1,1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & m, \\ & & my & - & 2z & = & -2, \\ x & + & (m-1)y & + & (m+3)z & = & m. \end{array}\right.$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m=0$ e $m=2$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y=4-x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y, obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.

b) Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

3. Pídese:

a) Para o plano $\pi: 3x+2y-z=0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r.

b) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x-5y-4z-9=0$ e $\pi_2: x=0$, e calcular o ángulo $\alpha\in[0°,90°]$ que forman.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4$ e $P(A\cup B)=0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A\cap B)$ e $P(\bar{A}\cup\bar{B})$. Razoa se A e B son ou non sucesos independentes.

b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p=0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

3. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de $\frac{2}{3}$. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.02 cm.

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & m, \\ & & my & - & 2z & = & -2, \\ x & + & (m-1)y & + & (m+3)z & = & m. \end{array}\right.$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

3. Se pide:

a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π^* que es perpendicular a π y contiene a r.

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$, y calcular el ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque gol desde el punto de penalti es $p = 0.7$. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

ABAU

CONVOCATORIA DE XULLO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

a) **0.75 puntos.**

b) **1.25 puntos.**

2)

a) **1 punto.**

b) **2 puntos:**

  i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.

  ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.

  iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

c) **1 punto.**

4)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

OPCIÓN B

1)

- **a) 1.25 puntos.**
- **b) 0.75 puntos.**

2)

- **a) 2 puntos.**
- **b) 1 punto.**

3)

- **a) 1.5 puntos.**
- **b) 1.5 puntos.**

4)

- **a) 0.75 puntos.**
- **b) 1.25 puntos.**

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despexa X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) $XA + B = C \Leftrightarrow XA = C - B \Leftrightarrow X = (C - B)A^{-1}$.

1.b) $C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Posto que $\det A = 8 - 3 = 5$, tense

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (C - B)A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvase a idea seguinte: calcular $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ e μ tales que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

2.a) Nótese que $\mathrm{Dom}\, f = (0, \infty)$. Cómpre estudar o signo de

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1),$$

que coincide co signo de $2\ln x + 1$ en $\mathrm{Dom}\, f$. Agora ben, $2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$, xa que a función exponencial crece estritamente. Chegados a este punto, é obvio que $2\ln x + 1 < 0$ se, e soamente se, $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$.

SIGNO DE f'.

MATEMÁTICAS II

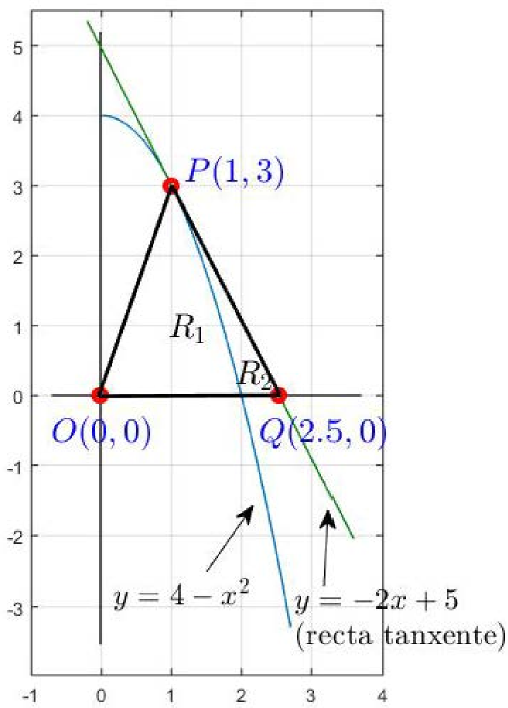
Polo tanto, f decrece estritamente no intervalo $\left(0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ e crece estritamente no intervalo $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$. Posto que se trata dunha función continua, presenta un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. Non hai outros extremos.

2.b) $y(x) = 4 - x^2 \Longrightarrow y'(x) = -2x \Longrightarrow y'(1) = -2$. Logo a ecuación da recta tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$ é

$$y(x) = -2(x-1) + 3 = -2x + 2 + 3 = -2x + 5.$$

O vértice pedido, ao que chamaremos Q, é o punto de corte desa recta co eixe X:

$$\left[-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5\right] \Rightarrow Q(2.5,0).$$



Á dereita móstrase o debuxo do triángulo, onde tamén están marcadas as rexións cuxas áreas hai que calcular: R_1 e R_2. É claro que a parábola corta ao eixe X positivo en $x = 2$ (xa que aí $4 - x^2 = 0$).

Posto que $R_1 = T \cup R^*$, con

- T un triángulo de base 1 e altura 3 e
- R^* a rexión baixo a gráfica de $y = 4 - x^2$ (e sobre o eixe X) desde $x = 1$ hasta $x = 2$,

a área de R_1 pódese calcular do seguinte xeito (u indicará "unidade de lonxitude"):

T e R^* non se solapan

$$\text{área}(R_1) = \text{área}(T) + \text{área}(R^*) = \frac{1 \cdot 3}{2} + \int_1^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{3}{2} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$+ \left\{8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{3} = \frac{9 + 24 - 14}{6} = \frac{19}{6}\ \mathrm{u}^2 = 3.1\bar{6}\ \mathrm{u}^2.$$

Finalmente,

$$\text{área}(R_2) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} - \frac{19}{6} = \frac{15}{4} - \frac{19}{6} = \frac{45 - 38}{12} = \frac{7}{12}\ \mathrm{u}^2 = 0.58\bar{3}\ \mathrm{u}^2.$$

3. Pídese:

a) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1 : x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2 : mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1,2,1)$ e $C(8,1,m)$ estean aliñados.

c) Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1,2,1)$ e $Q(8,1,1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$.

MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Como $\vec{n}_{\pi_1}(1, m, 1)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(m, 1, 1)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2,

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow m = 1,$$

o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ademais, podemos engadir que non son coincidentes cando $m = 1$, xa que nese caso $P(0,0,-2) \in \pi_1 \setminus \pi_2$.

Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{array}\right)$. Posto que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2$ non se anulan á vez, $\operatorname{rank} A^* = 2$ para calquera valor de m. Por outra banda, $\operatorname{rank} A = 1$ cando $m = 1$ (as dúas filas de A son iguais e non nulas) e $\operatorname{rank} A = 2$ cando $m \neq 1$, xa que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \neq 0$. Segundo esta análise:

- Se $m = 1$, $\operatorname{rank} A = 1 < \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) A, B e C son, para tódolos valores dos parámetros k e m, puntos distintos, que estarán polo tanto aliñados se, e soamente se, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ son paralelos. Posto que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1-k \\ m-1 \end{pmatrix}$, tense que

$$A, B \text{ e } C \text{ están aliñados} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{8} = \frac{2-k}{1-k} \text{ e } m - 1 = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow [-1 + k = 16 - 8k \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow [9k = 17 \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow \left[k = \frac{17}{9} \text{ e } m = 1\right].$$

3.c) $\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é vector director da recta r, a cal ademais pasa polo punto $P(-1,2,1)$, polo que as ecuacións paramétricas pedidas son

$$r: \begin{cases} x = -1 + 9\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1, \end{cases}$$

Chamemos π o plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$. Como $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(9, -1, 0)$ é un vector normal a π, tense $\pi: 9(x-1) - (y-1) = 0$. Tendo en conta que $9(x-1) - (y-1) = 9x - 9 - y + 1 = 9x - y - 8$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: 9x - y - 8 = 0$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

MATEMÁTICAS II

b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

Solución:

4.a) Damos nomes aos sucesos: $R =$ "o mozo rega" e $S =$ "a roseira sobrevive".

Sabemos que $P(R) = \frac{2}{3}$ (logo $P(\bar{R}) = \frac{1}{3}$), $P(S|R) = 0.7$ e $P(S|\bar{R}) = 0.2$.

Pídese $P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R}\cap S)}{P(S)}$.

- De $0.7 = P(S|R) = \frac{P(S\cap R)}{P(R)} = \frac{P(S\cap R)}{\frac{2}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap R) = \frac{2}{3} \cdot 0.7 = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- De $0.2 = P(S|\bar{R}) = \frac{P(S\cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(S\cap \bar{R})}{\frac{1}{3}}$, dedúcese que $P(S \cap \bar{R}) = \frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6}$.

Polo tanto, $P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \bar{R}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0.5\bar{3}$ e, en consecuencia,

$$P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

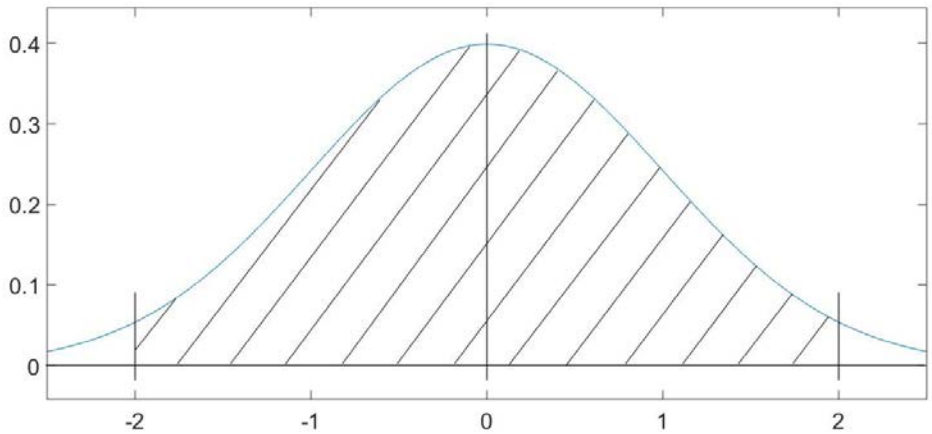
4.b) $X =$ "grosor das pezas".

$$X \to N(8{,}0.01) \Longrightarrow Z = \frac{X-8}{0.01} \to N(0{,}1).$$

Logo

$$P(7.98 \le X \le 8.02) = P\left(\frac{7.98-8}{0.01} \le Z \le \frac{8.02-8}{0.01}\right) = P(-2 \le Z \le 2)$$
$$= P(Z \le 2) - P(Z < -2) = P(Z \le 2) - P(Z > 2)$$
$$= P(Z \le 2) - \{1 - P(Z \le 2)\} = 2P(Z \le 2) - 1 \approx 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

é a probabilidade pedida.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-2 \le Z \le 2)$.

OPCIÓN A

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema:
$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 2$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & m & m & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & 0 & m+2 & 2 \end{array}\right)$$

polo que o sistema dado equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ (m+2)z = 2. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z, seguindo co de y e terminando co de x. Sempre que $m \neq -2$, téñense que $z = \frac{2}{m+2}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 2z - 2 = \frac{4}{m+2} - 2 = \frac{-2m}{m+2}$, de onde se infire á súa vez que $y = \frac{-2}{m+2}$ cando, ademais de ser $m \neq -2$, é $m \neq 0$.

Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z = \frac{2}{m+2}$, $y = \frac{-2}{m+2}$, $x = y - 3z + m = \frac{-2}{m+2} - \frac{6}{m+2} + m = \frac{-2-6+m(m+2)}{m+2} = \frac{m^2+2m-8}{m+2} = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2}$.
- Caso $m = -2$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 2$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é
$$\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ -2z = -2, \\ 2z = 2, \end{cases}$$
de onde $z = 1$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = y - 3z = \lambda - 3$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, é seguro que $2 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3$.

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 3m + 2 - 3m + 2m - 2 =$ $m^2 + 2m = m(m+2)$,

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{-2{,}0\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2{,}0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas.
- Caso $m = -2$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 - 6 = -4 \neq 0$, tense $\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank} A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, tense $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 <$ n.º de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \lambda - 3, \\ y = \lambda, \\ z = 1, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ver apartado 1.a).)

Se $m = 2$, a solución é $z = \frac{2}{m+2} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-2}{m+2} = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2} = 0$. (Ver apartado 1.a).)

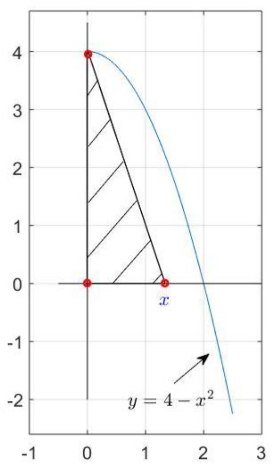
Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 2$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y, obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.

b) Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

Solución:

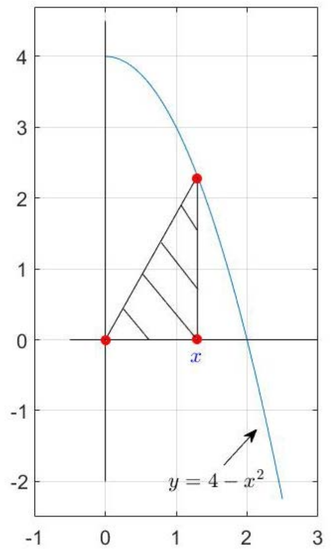


2.a) Se se entende que paralelo pode ser coincidente, non se pode descartar o caso no que o punto $P(0{,}4)$ é un vértice, co cal un dos catetos do triángulo está sobre o eixe Y. Teriamos unha situación como a que se representa no debuxo da dereita. Neste marco non hai triángulo de área máxima. En efecto, a área vén dada pola función $A(x) = \frac{4x}{2} = 2x$, con $x \in (0, \infty)$, que non ten máximo.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II



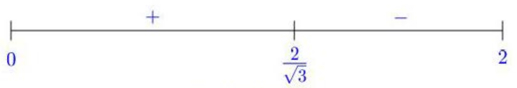
Supoñamos agora que ningún cateto pode estar sobre o eixe Y. Entón a situación anterior queda excluída e a única posibilidade é a representada no novo debuxo, á dereita, onde o triángulo ten base x e altura $4 - x^2$. Hai que buscar o máximo da función $A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2}$, con $x \in (0,2)$.

$$A'(x) = \frac{1}{2}\{4 - x^2 + x(-2x)\} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 4) = -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

onde $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547 \in (0,2)$. Logo A é crecente (A' ten signo positivo) no intervalo $\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ e é decrecente (A' ten signo negativo) no intervalo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$. Posto que A é continua, conclúese que ten un único máximo absoluto en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



SIGNO DE A'.

Danse a continuación as medidas dos catetos e da hipotenusa do triángulo de área máxima (u indicará "unidade de lonxitude").

Catetos: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{u} \approx 1.1547\ \mathrm{u}$ e

$y = 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}\ \mathrm{u} = 2.\overline{6}\ \mathrm{u}.$

Hipotenusa: En virtude do teorema de Pitágoras, $h^2 = \frac{4}{3} + \frac{64}{9} = \frac{12+64}{9} = \frac{78}{9} = \frac{26}{3}$, polo que a medida da hipotenusa é

$$h = \sqrt{\frac{26}{3}}\ \mathrm{u} \approx 2.9439\ \mathrm{u}.$$

2.b)

- Teorema de Bolzano: Sexa $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Teorema de Rolle: Sexa $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b). Se $f(a) = f(b)$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

3. Pídese:

a) Para o plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r.

b) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2: x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Punto de corte:

É útil escribir as ecuacións paramétricas de r, que son $r: \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = -1-2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 3\lambda, \end{cases}$

e substituír os valores de x, y e z na ecuación do plano para obter o valor do parámetro λ no punto de corte:

$$3(2+\lambda) + 2(-1-2\lambda) - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 6 + 3\lambda - 2 - 4\lambda - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

de onde $x = 2+\lambda = 3,\ y = -1-2\lambda = -3$ e $z = 3\lambda = 3$. É dicir, o punto de corte pedido é $P(3,-3,3)$.

Ecuación implícita de π^*:

$\vec{u} = \vec{n}_\pi(3,2,-1)$ e $\vec{v}(1,-2,3)$ son xeradores de π^*, e $P(2,-1,0) \in r \subset \pi^*$, polo que

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2) - (y+1) - 6z - 2z - 2(x-2) - 9(y+1) = 4(x-2) - 10(y+1) - 8z = 4x - 8 - 10y - 10 - 8z = 4x - 10y - 8z - 18,$

a ecuación implícita pedida é $\pi^*: 4x - 10y - 8z - 18 = 0$ ou, equivalentemente,

$$\pi^*: 2x - 5y - 4z - 9 = 0.$$

3.b) $\vec{n}_{\pi_1}(2,-5,-4)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(1,0,0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e π_2, logo é claro que os dous planos se cortan nunha recta, porque $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$ non son paralelos.

O ángulo α que forman π_1 e π_2 coincide co ángulo que forman os vectores $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$, así que $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{\|\vec{n}_{\pi_1}\| \|\vec{n}_{\pi_2}\|}$. Téñense

- $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 2,$
- $\|\vec{n}_{\pi_1}\| = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ e
- $\|\vec{n}_{\pi_2}\| = 1,$

de onde, en primeira instancia, $\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \approx 0.2981424$ e, en segunda,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) \approx 72.6539°.$$

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razoa se A e B son ou non sucesos independentes.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

Solución:

4.a) Temos

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.
- Da igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dedúcese que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$.
- Segundo unha das leis de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, de onde $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 01 = 0.9$.

Por último, os sucesos A e B non son independentes, porque $P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.08 = 0.2 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$.

4.b) Se $X =$ "n.º de goles en 5 lanzamentos de penalti", entón $X \to B(5{,}0.7)$, distribución binomial de parámetros $n = 5$ e $p = 0.7$. Tense entón $q = 1 - p = 0.3$ e, polo tanto,

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = 0.3^5 = 2.43 \times 10^{-3}$.
- Como $P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4 = 0.02835$, tense que $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.00243 + 0.02835\} = 1 - 0.03078 = 0.96922$.
- $P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 0.7^5 = 0.16807$.

Supoñamos agora que $X =$ "n.º de goles en 2100 lanzamentos de penalti", co cal $X \to B(2100{,}0.7)$. Os valores de n, p e q neste caso son $n = 2100$, $p = 0.7$ e $q = 0.3$. A probabilidade $P(X \geq 1450)$ é difícil de calcular directamente. É posible, non obstante, razoar do xeito seguinte: ao ser $np = 1470 > 5$ e $nq = 630 > 5$, a variable X pode ser aproximada por unha normal $\tilde{X}$ de media np e desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{441} = 21$.

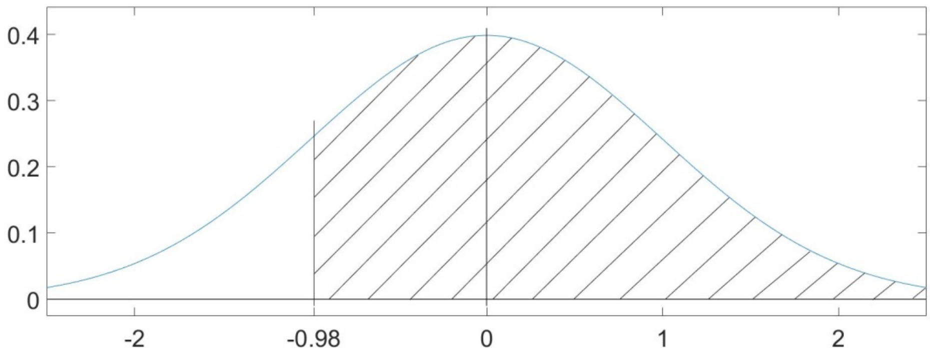
$$\tilde{X} \to N(1470{,}21) \Longrightarrow Z = \frac{\tilde{X} - 1470}{21} \to N(0{,}1),$$

de onde

corrección de $\frac{1}{2}$ punto

$$P(X \geq 1450) \approx P(\tilde{X} > 1449.5) = P\left(Z > \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P\left(Z > \frac{-20.5}{21}\right) \approx P(Z > -0.98)$$
$$= P(Z < 0.98) \approx 0.8365.$$

MATEMÁTICAS II



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(Z > -0.98)$.

ABAU

CONVOCATORIA DE XULLO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

a) **0.75 puntos.**

b) **1.25 puntos.**

2)

a) **1 punto.**

b) **2 puntos:**

i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.

ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.

iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

c) **1 punto.**

4)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

OPCIÓN B

1)

- **a) 1.25 puntos.**
- **b) 0.75 puntos.**

2)

- **a) 2 puntos.**
- **b) 1 punto.**

3)

- **a) 1.5 puntos.**
- **b) 1.5 puntos.**

4)

- **a) 0.75 puntos.**
- **b) 1.25 puntos.**