

## MATEMÁTICAS II

*(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)*

### OPCIÓN A

- 1.a) Dada a matriz  $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , calcula os valores de  $m$  para que a matriz inversa de  $M$  sexa  $\frac{1}{4}M$ .  
 b) Dadas as matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ , calcula a matriz  $X$  que verifica:  $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$ , sendo  $B^t$  e  $C^t$  as traspostas de  $B$  e  $C$  respectivamente.
  
- 2.a) Calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$   
 b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola  $y = x^2 - 4x$  e a recta  $y = x - 4$ . (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes, o vértice e concavidade ou convexidade).
  
3. a) Determina o valor de  $\lambda$  para que os puntos  $A(3,0,-1)$ ,  $B(2,2,-1)$ ,  $C(1,-2,-5)$  e  $D(\lambda,6,-1)$  sexan coplanarios e calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que os contén.  
 b) Determina a posición relativa do plano  $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$  e a recta  $r$  que pasa polos puntos  $P(-4,4,2)$  e  $Q(4,8,-4)$ . Se se cortan, calcula o punto de corte.  
 c) Calcula o punto simétrico do punto  $P(-4,4,2)$  respecto do plano  $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ .
  
4. Nas rebaixas duns grandes almacéns están mesturadas e á venda 200 bufandas da marca A, 150 da marca B e 50 da marca C. A probabilidade de que unha bufanda da marca A sexa defectuosa é 0,01; 0,02 se é da marca B e 0,04 se é da marca C. Unha persoa elixe unha bufanda ao azar  
 a) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida sexa da marca A ou defectuosa.  
 b) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida non sexa defectuosa nin da marca C.  
 c) Se a bufanda elixida non é defectuosa, cal é a probabilidade de que sexa da marca B?

### OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro  $m$ , o sistema de ecuacións: 
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$
  
 b) Resólveo, se é posible, cando  $m = 3$ .
  
2. a) Calcula  $a$  e  $b$  para que a función  $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  sexa continua e derivable en  $x = 0$ .  
 b) Calcula os vértices do rectángulo de área máxima que se pode construír, se un dos vértices é  $(0,0)$ , outro está sobre o eixe  $X$ , outro sobre el eixe  $Y$  e o outro sobre a recta  $2x + 3y = 8$ .  
 c) Calcula  $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$ .
  
3. a) Dado o plano  $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$ , calcula o valor de  $a$  para que a recta  $r$  que pasa polos puntos  $P(a,a,a)$  e  $Q(1,3,0)$  sexa paralela ao plano  $\pi$ .  
 b) Para  $a = 1$ , calcula a distancia de  $r$  a  $\pi$ .  
 c) Para  $a = 1$ , calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a  $\pi$  e contén a  $r$ .
  
4. a) Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só unha é correcta. Se se contesta ao azar, cal é a probabilidade de contestar ben polo menos dúas preguntas?  
 b) A duración dun certo tipo de pilas eléctricas é unha variable que segue unha distribución normal de media 50 horas e desviación típica 5 horas. Calcula a probabilidade de que unha pila eléctrica deste tipo, elixida ao azar, dure menos de 42 horas.

## MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

### OPCIÓN A

1. Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Que relación existe entre a súa inversa  $A^{-1}$  e a súa trasposta  $A^t$ ?  
b) Estuda, segundo os valores de  $\lambda$ , o rango de  $A - \lambda I$ , sendo  $I$  a matriz identidade de orde 3. Calcula

as matrices  $X$  que verifican  $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula  $a$ ,  $b$  e  $c$  para que a función  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{se } x < 1 \\ bx + c & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$  cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo  $[0,2]$  e calcula o punto no que se cumpre o teorema.

- b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola  $y = x^2 - 2x$  e a recta  $y = x$ . (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes de coordenadas, o vértice e concavidade ou convexidade).

3. Dada a recta  $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polo punto  $A(1,1,1)$  e é perpendicular a  $r$ .  
b) Calcula a ecuación implícita o xeral do plano que pasa polos puntos  $P(-1,0,6)$  e  $Q(3,-2,4)$  e é paralelo á recta  $r$ .  
c) Calcula a distancia da recta  $r$  ao plano  $x + y + z - 5 = 0$ .

4. Nun bombo temos 10 bolas idénticas numeradas do 0 ao 9 e cada vez que facemos una extracción devolvemos a bola ao bombo

- a) Se facemos 5 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de dúas veces.  
b) Se facemos 100 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de nove veces.

### OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro  $m$ , o sistema de ecuacións:  $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

- b) Resólveo, se é posible, cando  $m = 1$ .

2. a) Calcula, se existe, o valor de  $m$  para que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin(x^2)} = 3$

- b) Calcula os valores de  $a, b, c$  e  $d$  para que a función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  teña un punto de inflexión no punto  $(0,5)$  e a tanxente á súa gráfica no punto  $(1,1)$  sexa paralela ao eixe  $X$ .

c) Calcula  $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$  (Nota:  $\ln = \text{logaritmo neperiano}$ )

3. Sexa  $r$  a recta que pasa polos puntos  $P(9,4,1)$  e  $Q(1,1,1)$ . Dada a recta  $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$

- a) Estuda a posición relativa das rectas  $r$  e  $s$ . Calcula, se se cortan, o punto de corte.  
b) Calcula, se existe, a ecuación implícita ou xeral do plano que contén as rectas  $r$  e  $s$ .  
c) Calcula a distancia do punto  $O(0,0,0)$  á recta  $s$ .

4. Nunha fábrica hai tres máquinas A, B e C que producen a mesma cantidade de pezas. A máquina A produce un 2% de pezas defectuosas, a B un 4% e a C un 5%.

- a) Calcula a probabilidade de que unha peza elixida ao azar sexa defectuosa.  
b) Se se elixe unha peza ao azar e resulta que non é defectuosa, cal é a probabilidade de que fora fabricada pola máquina A?

**ABAU**  
**CONVOCATORIA DE XUÑO**  
**Ano 2018**  
*CRITERIOS DE AVALIACIÓN*  
**MATEMÁTICAS II**  
**(Cód. 20)**

**OPCIÓN A**

**1) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

**2) a) 1,5 puntos**

➤ 0,75 puntos pola determinación do máximo relativo.

➤ 0,75 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.

**b) 1,5 puntos**

➤ 0,75 puntos polo debuxo da rexión.

➤ 0,75 puntos pola formulación e cálculo da área coma unha integral definida.

**3) a) 1 punto:**

➤ 0,5 puntos pola determinación de  $\lambda$ .

➤ 0,5 puntos pola ecuación do plano.

**b) 1 punto**

➤ 0,5 puntos pola posición relativa do plano e a recta.

➤ 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

**c) 1 punto**

**4) a) 0,75 puntos**

**b) 0,5 puntos**

**c) 0,75 puntos**

## **OPCIÓN B**

**1) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

**2) a) 1 punto:**

➤ 0,5 puntos pola continuidade.

➤ 0,5 puntos pola derivabilidade.

**b) 1 punto**

**c) 1 punto**

**3) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

**c) 1 punto**

**4) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

**ABAU**  
**CONVOCATORIA DE SETEMBRO**  
**Ano 2018**  
*CRITERIOS DE AVALIACIÓN*  
**MATEMÁTICAS II**  
**(Cód. 20)**

**OPCIÓN A**

**1) a) 0,5 puntos**

**b) 1,5 puntos**

- 0,5 puntos pola determinación do rango de  $A - \lambda I$ , segundo os valores de  $\lambda$ .
- 1 punto pola determinación das matrices  $X$ .

**2) a) 1,5 puntos**

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola determinación de  $a, b$  e  $c$ .
- 0,5 puntos pola determinación do punto no que se cumpre o teorema de Rolle.

**b) 1,5 puntos**

- 0,5 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

**3) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

**c) 1 punto**

**4) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

## **OPCIÓN B**

**1) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

**2) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

**c) 1 punto**

**3) a) 1 punto:**

- 0,5 puntos polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

**b) 1 punto**

**c) 1 punto**

**4) a) 1 punto**

**b) 1 punto**

# Exemplos de resposta / Soluções

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN A

#### Exercicio 1:

$$\text{a) } |M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m = -1}$$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4} M \Leftrightarrow \frac{1}{4} M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 5m + 4 \\ m + 1 & m + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

$$\text{b) } B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Leftrightarrow (B^t \cdot A - I)X = -C^t$$

$$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B^t \cdot A - I| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (B^t \cdot A - I)^{-1}$$

$$(B^t \cdot A - I)^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Entón:

$$X = -(B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Outra forma:

$$(B^t \cdot A - I)X = -C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 3z = -4 \\ -y = 2 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -4/3 \\ y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{E así: } X = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### Exercicio 2:

a)  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Polo tanto,  $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{-x - 3(2-x)}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } x = 2}$$

Para estudar o crecemento e decrecemento, podemos facer a seguinte táboa (temos un máximo relativo en  $x = 2$  e o 0 non está no dominio da función):

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$< 0$	$> 0$	$< 0$
$f(x)$	↘	↗	↘

$\Rightarrow$  
*Crecente en  $(0, 2)$   
Decrecente en  $(-\infty, 0)$  e en  $(2, \infty)$*

### b) Estudo da parábola:

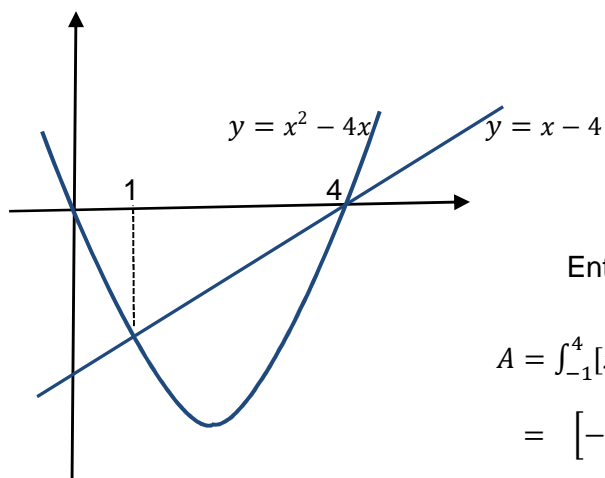
$y = x^2 - 4x = x(x - 4) \Rightarrow$  Puntos de corte cos eixes:  $(0, 0)$  e  $(4, 0)$

$y' = 2x - 4 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$  Vértice:  $(2, -4)$ .

$y'' = 2 \Rightarrow$  Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 4x = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow (1, -3), (4, 0)$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^4 [x - 4 - (x^2 - 4x)] dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-1}^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$



# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### Exercicio 3:

- a) Os vectores  $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -4)$  non son proporcionais. Polo tanto, os puntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  non están aliñados e determinan un plano  $\pi$  (o punto  $A \in \pi$  e os vectores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  determinan  $\pi$ )

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8(x-3) - 4y + 6(z+1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0}$$

Para determinar  $\lambda$ , impoñemos que  $D \in \pi$ :

$$4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

Tamén poderíamos determinar  $\lambda$  coa condición  $\text{rang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 2$

- b) O vector director da recta  $r$  e o vector normal ao plano  $\pi$  son:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (8, 4, -6) \\ \vec{n}_\pi = (4, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \Rightarrow \boxed{r \text{ e } \pi \text{ córtanse (son perpendiculares)}}$$

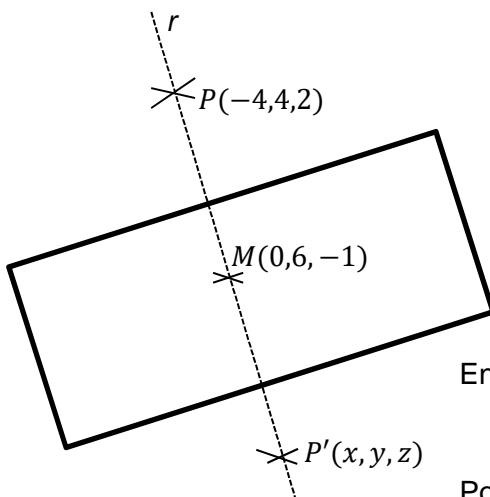
Para determinar o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta ( $P \in r$ ,  $\vec{v}_r$  é un vector director) e substituímos na ecuación do plano

$$r: \begin{cases} x = -4 + 8\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 2 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow -16 + 32\lambda + 8 + 8\lambda - 6 + 18\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$$

Sustituindo este valor de  $\lambda$  nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$\boxed{M(0, 6, -1)}$$

- c)



Temos que:

$M$  é o punto de corte de  $r$  e  $\pi$   
 $P(-4, 4, 2)$  é un punto de  $r$   
 $r$  é perpendicular a  $\pi$

Entón  $M$  é o punto medio de  $P$  e o seu simétrico  $P'(x, y, z)$

Polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{x-4}{2} \\ 6 = \frac{y+4}{2} \\ -1 = \frac{z+2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(4, 8, -4)}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### Exercicio 4:

a) Sexan:

$A$  = "A bufanda é da marca A"

$B$  = "A bufanda é da marca B"

$C$  = "A bufanda é da marca C"

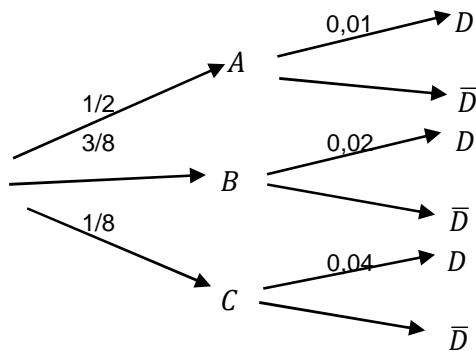
$D$  = "A bufanda é defectuosa"

Entón temos:

$$P(A) = \frac{200}{200+150+50} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad P(B) = \frac{150}{200+150+50} = \frac{3}{8} = 0,375; \quad P(C) = \frac{50}{200+150+50} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$P(D/A) = 0,01; \quad P(D/B) = 0,02; \quad P(D/C) = 0,04$$

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore:



a) Pola fórmula da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa defectuosa:

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) = 0,01 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,375 + 0,04 \cdot 0,125 = 0,0175$$

E a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa da marca A ou defectuosa será:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0,5 + 0,0175 - 0,5 \cdot 0,01 = \boxed{0,5125}$$

b) Para calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, non sexa defectuosa nin da marca C usamos as leis de Morgan

$$P(\bar{D} \cap \bar{C}) = P(\overline{D \cup C}) = 1 - P(D \cup C) = 1 - [P(D) + P(C) - P(D \cap C)] = 1 - 0,0175 - 0,125 + 0,04 \cdot 0,125 = \boxed{0,8625}$$

c) Se sabemos que a bufanda non é defectuosa, queremos calcular a probabilidade de que sexa da marca B

$$P(B/\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B \cap \bar{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,98 \cdot 0,375}{1 - 0,0175} = \boxed{0,374}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN B

#### Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes:  $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; matriz ampliada:  $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de  $C$ :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} \text{rang}(C) = 2 \text{ se } m = 3 \\ \text{rang}(C) = 3 \text{ se } m \neq 3 \end{cases}$$

Cálculo do rango da matriz ampliada (lembramos que sempre  $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$ ):

- $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$  (neste caso  $\text{rang}(C) = 3$ )
- $m = 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$  (se  $m = 3$ , 1ª ecuación = 3\*2ª ecuación e  $\text{rang}(C) = 2$ )

#### Discusión:

$m = 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^{\circ}$  incógnitas. Sistema compatible indeterminado.  
 $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^{\circ}$  incógnitas. Sistema compatible determinado.

b) Para  $m = 3$  xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións).

Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \\ 3x = -z + 6 \Rightarrow x = -\frac{z}{3} + 2 \end{cases}$$

As infinitas solucións son

$$\begin{cases} x = -\frac{\lambda}{3} + 2 \\ y = \frac{\lambda}{3} + 1; & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Tamén poderíamos resolver o exercicio polo método de Gauss

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} (1^a) - 3*(2^a) \\ (2^a) \\ (3^a) - (2^a) \end{array} \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \end{array} \right)$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

Se  $m = 3$  suprímise a primeira fila (queda unha fila de 0) e o sistema é compatible indeterminado

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ 3y = 3 + z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -z + 2\left(1 + \frac{z}{3}\right) = 2 - z/3 \\ y = 1 + \frac{z}{3} \end{array}$$

as infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{\lambda}{3} \\ y = 1 + \frac{\lambda}{3}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

se  $m \neq 3$  o sistema é compatible determinado. Para cada valor de  $m$ , temos un sistema distinto con solución única.

### Exercicio 2:

a) Para que a función sexa continua en  $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x} + ax + b) = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}(x^2 + 2)\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

Por outra parte

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2e^{2x} + a) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned}$$

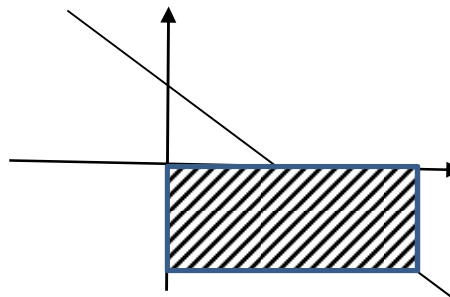
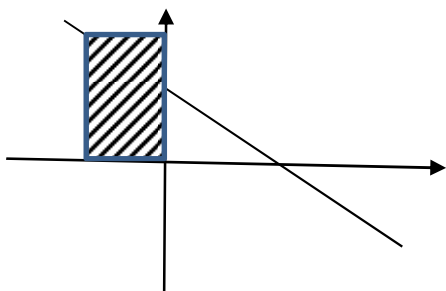
Polo tanto, para que a función sexa derivable en  $x = 0$ , debe cumprirse:

$$\left. \begin{array}{l} b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -2; b = 0}$$

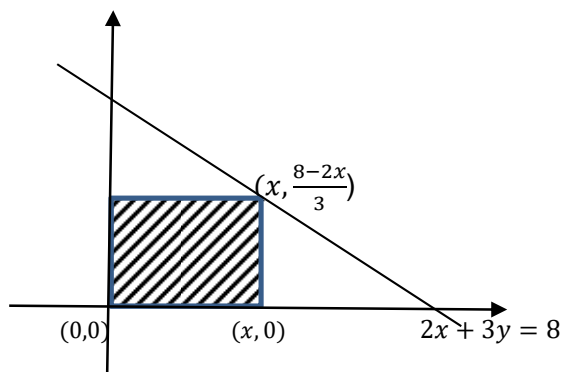
# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

b) A área non está acotada se o rectángulo está situado no segundo ou cuarto cuadrante



Se o rectángulo está situado no primeiro cuadrante:



Función a maximizar (área do rectángulo):

$$A(x) = \frac{x(8-2x)}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$$

Determinamos os puntos críticos):

$$A'(x) = \frac{1}{3}(8 - 4x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$A''(x) = -4/3$$

}  $\Rightarrow$  máximo en  $x = 2$

Polo tanto:

$$\boxed{\text{Vértices: } (0,0), (2,0), (0,4/3), (2,4/3)}$$

c) Calculamos a integral indefinida utilizando o cambio de variable:  $x + 1 = t^2$ ;  $dx = 2tdt$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1) \cdot 2t^2 dt = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k = \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k \end{aligned}$$

E calculamos a integral definida aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[ \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Tamén poderíamos calcular a integral indefinida polo método de integración por partes:

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + k$$

E aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[ \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} \right]_0^3 = \frac{48}{3} - \frac{128}{15} + \frac{4}{15} = \frac{240}{15} - \frac{124}{15} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### Exercicio 3:

a) A recta que pasa polos puntos  $P$  e  $Q$  ten como vector director:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1 - a, 3 - a, -a)$$

Por outra parte, un vector normal ao plano é:

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2).$$

Entón

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow 2(1 - a) - (3 - a) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - 3 + a + 2a = 0$$

$$\boxed{a = 1}$$

b) Polo apartado anterior, sabemos que se  $a = 1$ , a recta e o plano son paralelos, polo tanto a distancia entre a recta e o plano é igual á distancia entre un punto da recta (por exemplo  $P$ ) e o plano

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 - 1 - 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \boxed{4/3 \text{ u}}$$

c) Sexa  $\alpha$  o plano buscado. O plano  $\alpha$  está determinado polos elementos seguintes

$$P(1,1,1) \in r \Rightarrow P(1,1,1) \in \alpha$$

$$\vec{v}_r = (0, 2, -1)$$

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2)$$

Son vectores contidos no plano  $\alpha$

Polo tanto:

$$0 = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow -5(x - 1) - 2(y - 1) - 4(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow -5x - 2y - 4z + 11 = 0$$

$$\boxed{\alpha : 5x + 2y + 4z - 11 = 0}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### Exercicio 4:

- a) Sea  $X = n^\circ$  de respostas acertadas. Trátase dunha distribución binomial  $B(10; 0,25)$ , pois a probabilidade de contestar ben unha pregunta é a mesma nos dez casos: 0,25

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^9 = 1 - 0,0563 - 0,1877 \\ &= \boxed{0,756} \end{aligned}$$

- b) Sea  $X$  la duración, en horas, de las pilas.  $X$  sigue una distribución normal  $N(50; 5)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & \frac{X-50}{5} = Z \longrightarrow & N(0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \\ P(X < 42) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}\right) & = P(Z < -1,6) = P(Z > 1,6) = 1 - P(Z \leq 1,6) \\ & = 1 - 0,9452 = & \boxed{0,0548} \end{array}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### OPCIÓN A

**Exercicio 1:**

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{A^t = A^{-1}}$$

Tamén poderíamos calcular  $A^{-1}$  utilizando Gauss: no primeiro paso intercambiamos a primeira e a segunda fila. No segundo paso intercambiamos a segunda e terceira fila e finalmente cambiamos de signo a tódalas filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e vemos que } \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t}$$

Tamén se podería calcular  $A^{-1}$  utilizando determinantes:

$$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

**b)**

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1$$

$$\text{Polo tanto: } |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0.$$

$\lambda = -1$  é unha solución da ecuación  $\lambda^3 + 1 = 0$ . Como  $\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$  e  $\lambda^2 - \lambda + 1$  non ten solucións reais, temos

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } \lambda = -1, \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 2 \\ \text{Se } \lambda \neq -1, \quad \text{entón } \text{rang}(A - \lambda I) = 3 \end{array}}$$

$$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e vimos que } A + I \text{ non ten inversa. Entón:}$$

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x = y = z\}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$



# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### Exercicio 2:

**a) Teorema de Rolle:** Se  $f(x)$  é unha función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  e con  $f(a) = f(b)$  entón existe polo menos un punto  $\xi \in (a, b)$  tal que  $f'(\xi) = 0$ .

Se  $x \neq 1$ ,  $f(x)$  é continua e derivable pois son funcións polinómicas,

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b + c \\ f(1) = b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Para que sexa continua en } x = 1 \\ 2 + a = b + c \\ \text{Para que coincidan as derivadas laterais} \\ 4 + a = b \end{array}$$

$$f(0) = f(2) \quad \Rightarrow \quad 0 = 2b + c$$

Polo tanto, para que se cumpran as hipóteses do teorema de Rolle,

$$\left. \begin{array}{l} a - b - c = -2 \\ a - b = -4 \\ 2b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = -2; b = 1; a = -3}$$

Para estes valores,  $f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$$\text{Entón } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi = 3/4}$$

### b) Estudo da parábola:

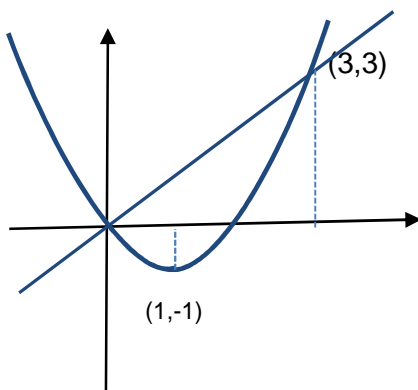
$y = x^2 - 2x = x(x - 2) \Rightarrow$  Puntos de corte cos eixes: (0,0) e (2,0)

$y' = 2x - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$  Vértice: (1, -1).

$y'' = 2 \Rightarrow$  Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3. \text{ Córtanse nos puntos (0,0) e (3,3)}$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \\ &= \left[ \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### Exercicio 3:

a) Determinamos un vector director da recta  $r$ :

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2)$$

Como se pide un plano  $\pi_1$  perpendicular á recta, entón  $\vec{v}_r$  é un vector normal ao plano:

$$r \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1}$$

e  $\pi_1$  queda determinado polo punto  $A(1,1,1)$  polo que pasa e o vector normal  $\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, -2)$

$$\pi_1: 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: x - z = 0}$$

b) Este novo plano,  $\pi_2$ , queda determinado polos elementos:

- $P(-1, 0, 6)$  que é un punto pertencente ao plano
- $\overrightarrow{PQ} = (4, -2, -2)$  é un vector do plano
- $\vec{v}_r = (2, 0, -2)$  é un vector do plano

Temos entón:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1) + 4y + 4(z-6) = 0$$

$$\boxed{\pi_2: x + y + z - 5 = 0}$$

c) Pídenos calcular a distancia da recta  $r$  ao plano  $\pi_2$ . Vimos no apartado anterior que son paralelos, polo tanto podemos calcular esa distancia como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$P_r(1, 0, 1) \in r$$
$$d(r, \pi_2) = d(P_r, \pi_2) = \frac{|1 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{d(r, \pi_2) = \sqrt{3} u}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### Exercicio 4:

Sexa  $X =$  "nº de extraccións nas que obtemos un 7"

- a) Evidentemente trátase de probas independentes, nas que a probabilidade de éxito non cambia

$$\left. \begin{array}{l} \text{número de extraccións} = n = 5 \\ \text{probabilidade de éxito} = p = 0,1 \end{array} \right\} X \rightarrow Bi(5; 0,1)$$

$$P(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 = 0,5905 + 0,3281 = 0,9185$$

$$\boxed{P(X < 2) = 0,9185}$$

- b) Neste caso

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1)$$

Pero como

$$n \times p = 10 > 5$$

$$n \times q = 90 > 5$$

aproximamos a binomial  $X$  pola normal  $X'$  con media  $\mu = n \times p = 100 \times 0,1 = 10$  e desviación típica  $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{100 \times 0,1 \times 0,9} = 3$

$$X \rightarrow Bi(100; 0,1) ; X' \rightarrow N(10; 3)$$

Ademais aplicamos a corrección de medio punto ou corrección de Yates. Así

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & & Z = \frac{X' - 10}{3} \rightarrow N(0,1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(X < 9) = P(X' \leq 8,5) = P\left(\frac{X' - 10}{3} \leq \frac{8,5 - 10}{3}\right) & = & P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) \\ & = & 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \end{array}$$

$$\boxed{P(X < 9) = 0,3085}$$

# Exemplos de resposta / Soluções

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### OPCIÓN B

#### Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes:  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; matriz ampliada:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de  $C$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

Dúas columnas proporcionais

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango de  $A$ :

Sempre  $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } m \neq 1 \\ 2 & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

Discusión:

$m = 1$ ,  $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$  de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.

$m \neq 1$ ,  $\text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$ . Sistema incompatible.

b) Para  $m = 1$ , é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 + z \\ x = 1 + z \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

# Exemplos de resposta / Soluções

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\sin(x^2)} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ (L'Hopital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x + 2mx}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\cos 2x + 2m}{2x\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = \frac{-4 + 2m}{2}$$

Entón:

$$\frac{-4 + 2m}{2} = 3 \Rightarrow -4 + 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

b)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{Punto de inflexión no punto } (0,5): \begin{cases} f''(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ f(0) = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5} \end{cases}$$

Entón  $f(x) = ax^3 + cx + 5$ . Ademais

$$\text{Pasa polo punto } (1,1): f(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1$$

$$\text{Tanxente á gráfica de } f(x) \text{ no punto } (1,1) \text{ paralela ao eixe } X: f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + c + 5 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} c = -3a \\ a - 3a + 5 = 1 \end{array} \right] \Rightarrow \boxed{a = 2}; \boxed{c = -6}$$

c) Podemos calcular a integral indefinida utilizando primeiro o método de substitución e despois o método de integración por partes:

$$\int \sqrt{x} \ln x dx \stackrel{\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt}{=} \int 4t^2 \ln t dt \stackrel{\text{desfacemos o cambio}}{=} \frac{4}{3} t^3 \ln t - \frac{4}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln t \Rightarrow du = dt/t \\ dv = 4t^2 \Rightarrow v = \frac{4}{3} t^3 \end{array} \right.$$

ou ben calculala directamente por partes:

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = dx/x \\ dv = x^{1/2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3} x^{3/2} \end{array} \right.$$

Aplicando a regra de Barrow:

$$\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} \right]_1^e = \frac{2}{3} e^{3/2} - \frac{4}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{9} e^{3/2} + \frac{4}{9}}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### Exercicio 3:

a)

$$r: \begin{cases} P_r(9,4,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-8, -3, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P_s(1,0,5) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1) \end{cases}$$

Os vectores directores  $\vec{v}_r = (-8, -3, 0)$  e  $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -1)$  das rectas non son proporcionais, polo tanto as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se cruzan, calculamos o rango( $\vec{P}_r, \vec{P}_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s$ ):

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas córtanse}}$$

Para calcular o punto de corte pasamos ás ecuacións paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 9 - 8\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases}$$

Entón:

$$\begin{cases} 9 - 8\lambda = 1 + 2\mu \\ 4 - 3\lambda = \mu \\ 1 = 5 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Punto de corte } (9,4,1)}$$

b) Sexa  $\pi$  o plano buscado. O plano  $\pi$  está determinado por ( $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_s$  non son proporcionais):

- O punto de corte das rectas (9,4,1) ( $\pi$  contén a  $r$  e a  $s$ )
- Un vector director  $\vec{v}_r$  da recta  $r$  é un vector contido no plano ( $\pi$  contén á recta  $r$ )
- Un vector director  $\vec{v}_s$  da recta  $r$  é un vector contido no plano ( $\pi$  contén á recta  $s$ )

$$\pi: \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z-1 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-9) - 8(y-4) - 2(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 3x - 8y - 2z - 28 + 7 = 0}$$

c) Utilizamos a fórmula da distancia dun punto a unha recta:

$$\overrightarrow{OP_s} = (1,0,5) \Rightarrow \overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 11, 1)$$

$$d(O, s) = \frac{|\overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{147}}{6} = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

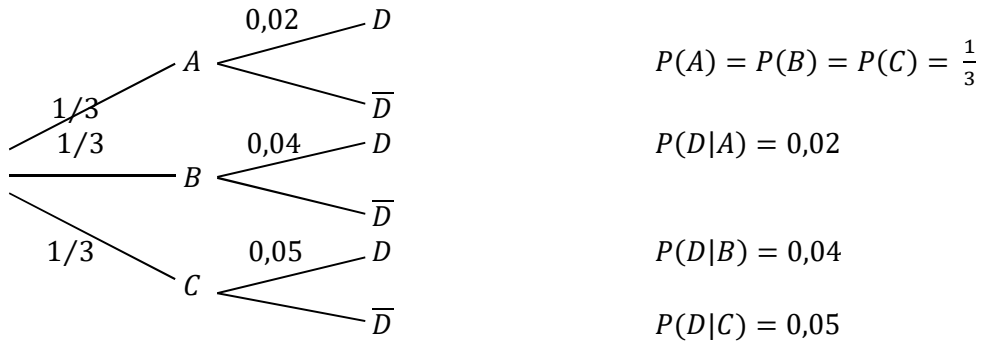
$$\boxed{d(O, s) = \frac{7\sqrt{2}}{2} u}$$

# Exemplos de resposta / Soluciones

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### Exercicio 4:

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore ( $D$ =peza defectuosa):



a) Pola fórmula da probabilidade total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0,02 \cdot \frac{1}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3} + 0,05 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 0,11 \cdot \frac{1}{3} = 0,03667 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,03667}$$

b)

$$P(A|\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|A) \cdot P(A)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0,02) \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0,03667} = 0,3391$$

$$\boxed{P(A|\bar{D}) = 0,3391}$$