

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Veámoslo primero con un

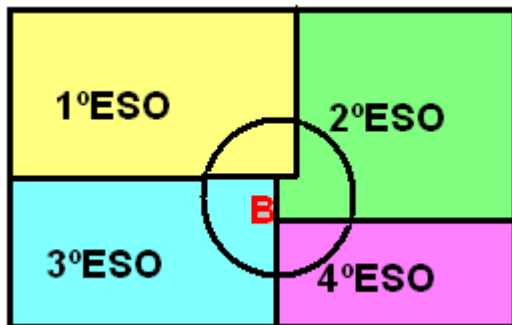
Ejemplo práctico.

Sean A_1 , A_2 , A_3 y A_4 , respectivamente, ser alumno de 1º, 2º, 3º o 4º de ESO.



Estos cuatro sucesos son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral (los alumnos de ESO)

Llamemos ahora B a cualquier otro suceso, por ejemplo "que un alumno tenga la gripe".



El teorema de la probabilidad total afirma que:

$$P(B) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i), \text{ desde } i=1 \text{ hasta } 4$$

Es decir, la probabilidad de que un alumno tenga la gripe es igual a la probabilidad de que sea de 1º de ESO por la probabilidad de tener gripe condicionado a ser de 1º de ESO, más la de que sea de 2º por la probabilidad de que tenga la gripe condicionado a que es de 2º, más ...

En general:

Teorema de la probabilidad total

Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral, entonces la probabilidad de cualquier otro suceso B es:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$

Demostración

$$P(B / A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)] = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = \\ &= P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B / A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i) \end{aligned}$$

Ejercicio resuelto

Se sabe que el 65% de los accidentes de tráfico que se producen durante la noche de los sábados se deben a la ingesta excesiva de alcohol, el 25% se deben a la imprudencia del conductor (sobrio) y el resto a otras causas, (fallo mecánico...etc.). En estos accidentes, el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero.

a) Calcular la probabilidad de que uno de estos accidentes tenga resultado nefasto. (Ejercicio PAU)

Solución

Llamemos:

A_1 al suceso "tener un accidente por circular con una ingesta excesiva de alcohol"

A_2 al suceso "tener un accidente por imprudencia del conductor" y

A_3 al suceso "tener un accidente por otras causas".

Estos sucesos son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral, por lo que se verifican las hipótesis del teorema de la probabilidad total.

Sea N el suceso "tener resultado nefasto"

$$\begin{aligned} P(N) &= P(A_1) \cdot P(N/A_1) + P(A_2) \cdot P(N/A_2) + P(A_3) \cdot P(N/A_3) = \\ &= 0,65 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,05 = 0,25 \end{aligned}$$

TEOREMA DE BAYES

Un reverendo, un teorema y múltiples aplicaciones

Si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es el espacio muestral, y B es otro suceso cualquiera, entonces:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

Demostración

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(B)}$$

Por el teorema de la probabilidad total $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)$

De ambas cosas se deduce que:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

Ejercicio resuelto.

Se sabe que el 65% de los accidentes de tráfico que se producen durante la noche de los sábados se deben a la ingesta excesiva de alcohol, el 25% se deben a la imprudencia del conductor y el resto a otras causas, (fallo mecánico...etc.). En estos accidentes, el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero.

b) Si se produce un accidente con resultado nefasto, calcular la probabilidad de que la causa de dicho accidente sea la ingesta excesiva de alcohol. (Ejercicio PAU)

Solución.

Llamemos:

A_1 al suceso "tener un accidente por circular con una ingesta excesiva de alcohol"

A_2 al suceso "tener un accidente por imprudencia del conductor" y

A_3 al suceso "tener un accidente por otras causas".

Estos sucesos son incompatibles dos a dos y su unión es todo el espacio muestral, por lo que se verifican las hipótesis del teorema de Bayes.

Sea N el suceso "tener resultado nefasto"

$$P(A_1 / N) = \frac{P(A_1) \cdot P(N / A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(N / A_i)} = \frac{0,65 \cdot 0,3}{0,65 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,05} = \frac{0,195}{0,25} = 0,78$$