Para concluir el curso, vamos a avanzar un poco de materia que quedó pendiente. En este caso funciones lineales. Al final encontrarás ejercicios resueltos.

1. Definición y ejemplo

Una **función lineal** (en algunos libros, a estas funciones, les llaman **funciones afines**) es una función polinómica de primer grado. Es decir, tiene la siguiente forma

$$f(x) = m \cdot x + n$$

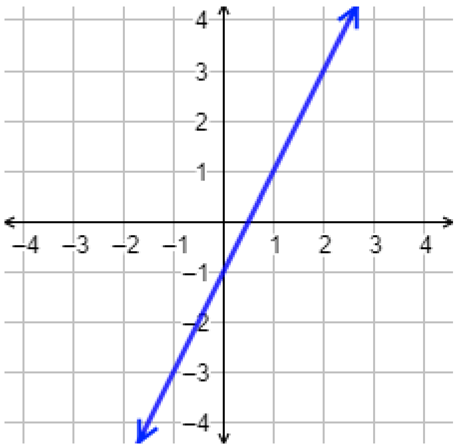
siendo $m \neq 0$.

- m es la **pendiente** de la función
- n es la **ordenada** (en el origen) de la función

La gráfica de una función lineal es siempre una recta.

Ejemplo

$$f(x) = 2x - 1$$



La pendiente de la función es m=2 y la ordenada es n=−1.

2. Pendiente y ordenada

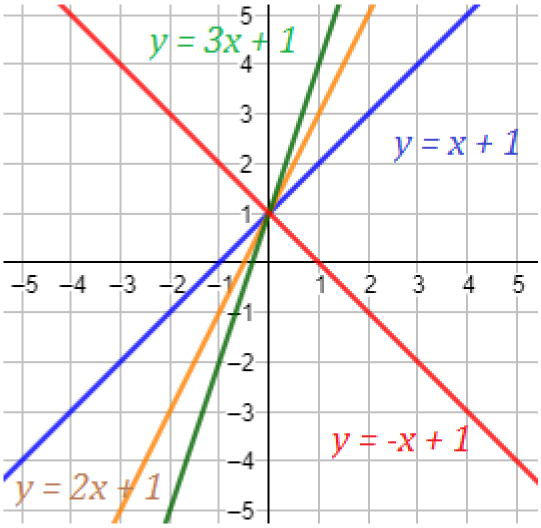
La **pendiente** es el coeficiente de la variable, es decir, m.

Geométricamente, cuanto mayor es la pendiente, más inclinada es la recta. Es decir, más rápido crece la función.

- Si la pendiente es positiva, la función es creciente.
- Si la pendiente es negativa, la función es decreciente.

Ejemplo

Rectas con pendientes 1, 2, 3 y -1:



Observad que la recta con pendiente negativa −1 es decreciente (la roja). Las otras tres rectas son crecientes.
De las rectas crecientes, la que crece más rápidamente es la verde (pendiente 3).

Ejercicio:

Indica cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales. Para ello sigue los pasos indicados en el ejemplo anterior.

$$a)\ y = 2x - 5 \qquad b)\ y = 2 - x \qquad c)\ y = \frac{2}{3}x + 1$$

3. Gráfica

Como una función lineal es una **recta**, para representar su gráfica sólo tenemos que trazar la recta que une dos de sus puntos. Para ello, calculamos la imagen de dos puntos cualesquiera.

La definición formal de la gráfica de la función es el conjunto de puntos siguiente: $\{(x, f(x))\}$

Ejemplo

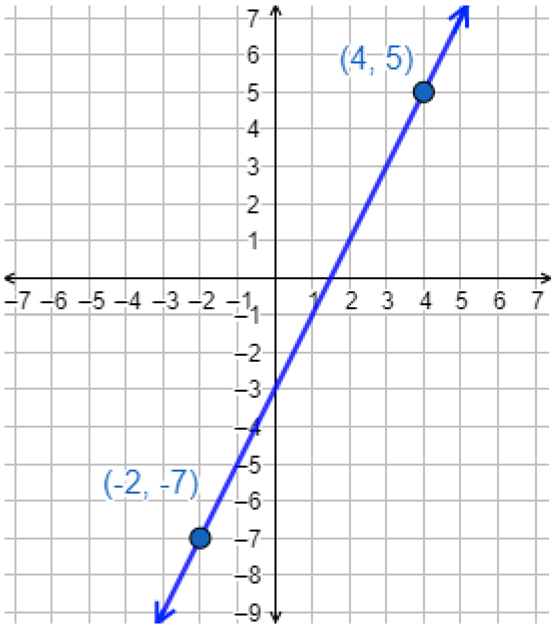
Vamos a representar la gráfica de la función

$$f(x) = 2x - 3$$

Hacemos una tabla para calcular dos puntos de la gráfica:

x	$y = 2x - 3$
4	5
-2	-7

Representamos la recta a partir de los puntos (4,5) y (–2,–7):

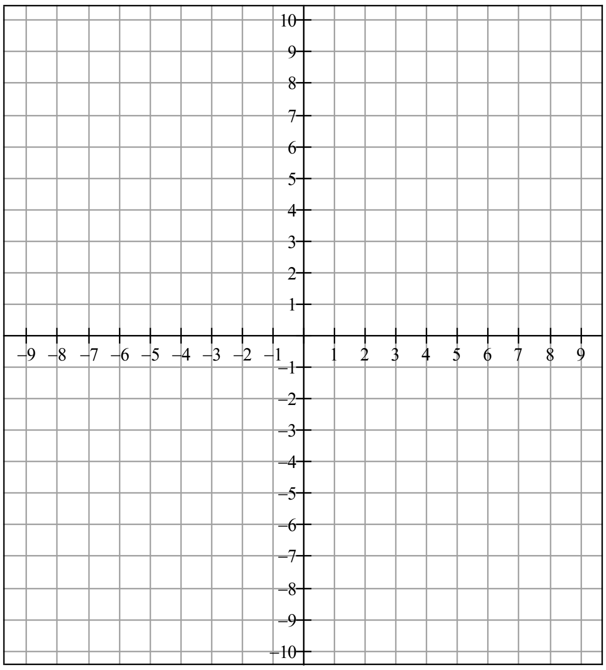


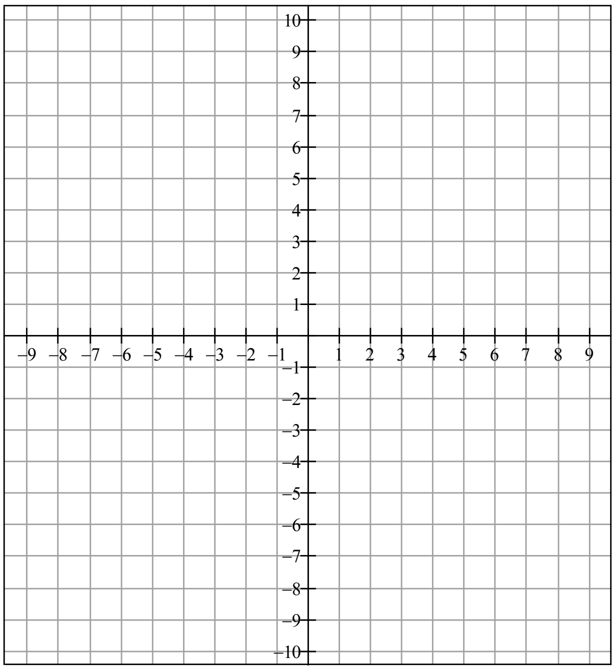
Observad que la recta corta al eje Y por debajo del eje X, esto se debe a que la ordenada es negativa (n=–3).

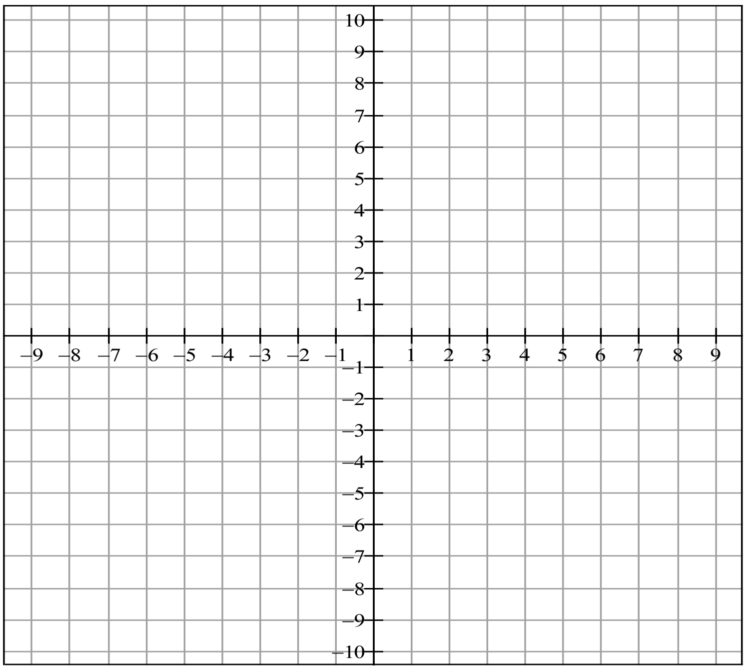
Ejercicio:

Representa gráficamente las siguientes funciones lineales. Para ello sigue los pasos indicados en el ejemplo anterior.

$$a)\ y = 2x - 5 \qquad b)\ y = 2 - x \qquad c)\ y = \frac{2}{3}x + 1$$







4. Puntos de corte con los ejes

Una función lineal siempre corta al eje Y en un punto. También, corta al eje X en un punto.

El **punto de corte con el eje Y** es el punto de la recta que tiene la primera coordenada igual a 0:

$$(0, f(0))$$

El **punto de corte con el eje X** es el punto de la recta que tiene 0 en la segunda coordenada. Se calcula igualando a 0 la función y resolviendo la ecuación obtenida.

Ejemplo

Calculamos los puntos de corte de la función del ejemplo anterior,

$$f(x) = 2x - 3$$

Corte con el eje Y:

$$f(0) = -3$$

Es el punto

$$(0, -3)$$

Observad que la segunda coordenada es la ordenada.

Corte con el eje X:

$$2x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$2x = 3 \rightarrow$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Es el punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Ejercicio:

Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones lineales. Para ello sigue los pasos indicados en el ejemplo anterior.

$a)\ y = 2x - 5 \qquad b)\ y = 2 - x \qquad c)\ y = \frac{2}{3}x + 1$

5. Función a partir de dos puntos

Si tenemos dos puntos de la recta, podemos calcular la expresión algebraica de la función. Sólo tenemos que sustituir las coordenadas de los puntos en la **forma general** de la función

$$y = m \cdot x + n$$

y resolver el sistema de ecuaciones.

Ejemplo

Vamos a calcular la función lineal que pasa por los puntos (1,2) y (2,7).
Tenemos que hallar la pendiente, m, y la ordenada, n.

Primer punto

Como x=1 e y=2, sustituyendo,

$$2 = m \cdot 1 + n$$

Segundo punto

Como x=2 e y=7, sustituyendo,

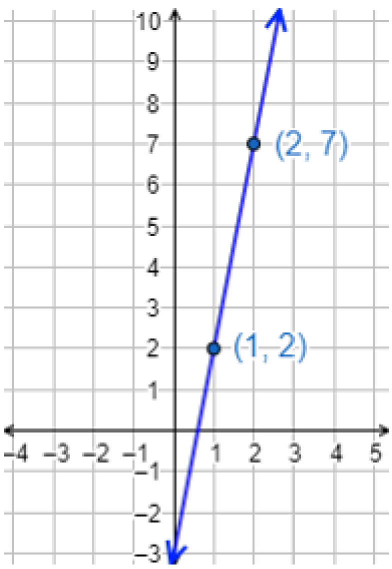
$$7 = m \cdot 2 + n$$

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = 7 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, por ejemplo, por reducción, tenemos que m=5 (con lo que n=−3). Por tanto, se trata de la función

$$f(x) = 5x - 3$$



Ejercicio:

Calcula la ecuación de las funciones lineales que pasan por los puntos indicados. Para ello sigue los pasos indicados en el ejemplo anterior.

$a)\ A(0,1)\ y\ B(1,3)$ $b)\ C(-3,1)\ y\ B(0,7)$ $c)\ A(-3,-2)\ y\ B(4,-2)$

6. Intersección de dos funciones

Si tenemos dos funciones lineales, podemos preguntarnos si las rectas que representan se cortan y en qué punto lo hacen.

Para responder esta pregunta, sólo tenemos que igualar las dos expresiones algebraicas y resolver la ecuación.

Ejemplo

Vamos a calcular el punto de corte de las dos siguientes rectas:

$$\boldsymbol{y = 11 - x}$$

$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

Como y=y, igualando,

$$\boldsymbol{11 - x = 2x - 1}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\boldsymbol{11 - x = 2x - 1}$$

$$\boldsymbol{11 + 1 = 2x + x}$$

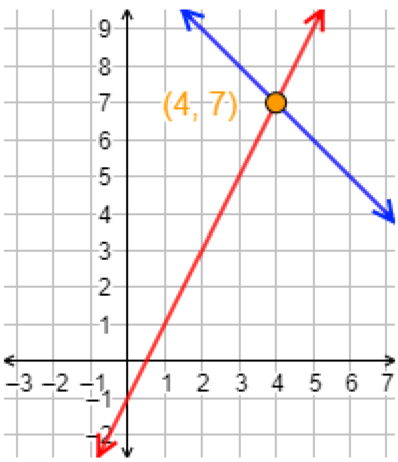
$$\boldsymbol{3x = 12}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{12}{3} = 4}$$

La primera coordenada del punto de corte es x=4. La segunda coordenada la obtenemos calculando su imagen en alguna de las dos rectas:

$$\boldsymbol{y = 11 - 4 = 7}$$

Por tanto, el punto de corte es (4,7).
Gráfica:



Ejercicio: Calcula los puntos de corte de las siguientes funciones lineales. Para ello sigue los pasos indicados en el ejemplo anterior.

$a)\ \left.\begin{matrix} y = 2x - 2 \\ y = -x + 1 \end{matrix}\right\}$ $\qquad b)\ \left.\begin{matrix} y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \\ y = x \end{matrix}\right\}$ $\qquad c)\ \left.\begin{matrix} y = 4 \\ y = -2x + 1 \end{matrix}\right\}$

7. Paralelas y perpendiculares

Dos rectas son **paralelas** si no se cortan en ningún punto (o si son iguales). Esto ocurre cuando tienen la misma pendiente, m.

Dos rectas son **perpendiculares** si se cortan formando un ángulo recto (ángulo de 45°). Las rectas perpendiculares a la recta con pendiente mm son las que tienen pendiente −1/m.

Ejemplo

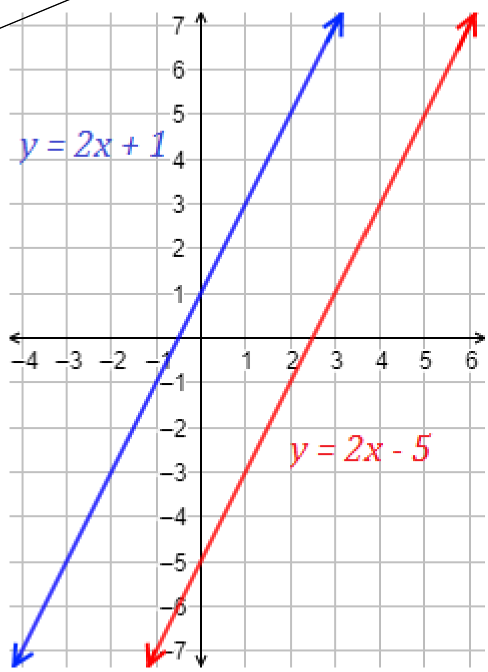
Las siguientes rectas son paralelas porque tienen la misma pendiente (m=2):

$$\boldsymbol{y = 2x + 1}$$

$$\boldsymbol{y = 2x - 5}$$

$m = 2$

$m' = 2$



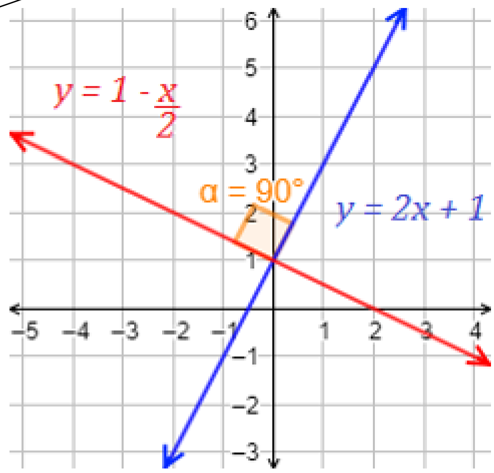
Las siguientes rectas son perpendiculares porque la pendiente de la una es el opuesto del inverso de la pendiente de la otra:

$$\boldsymbol{y = 2x + 1}$$

$$\boldsymbol{y = 1 - \frac{x}{2}}$$

$$m = 2$$

$$m' = -\frac{1}{2}$$



Ejercicio:

Indica si son paralelas o perpendiculares las siguientes funciones lineales. (Recuerda que tienes que despejar y, para que esté de la forma $y = mx + n$*). Para ello sigue los pasos indicados en el ejemplo anterior.*

$a)\ \left.\begin{matrix} y = 2x + 1 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{matrix}\right\}$

$b)\ \left.\begin{matrix} y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \\ 3x + y = 0 \end{matrix}\right\}$

Problemas resueltos

Problema 1

Calcular los puntos de corte con los ejes y representar la función. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

$$y = 4 - 2x$$

Solución:

La pendiente de la recta es m=−2. Como es negativa, es una recta decreciente.
La recta corta al eje Y cuando x=0, por tanto, lo hace en el punto

$$(0, 4)$$

La recta corta al eje X cuando y=0. Tenemos que resolver una ecuación:

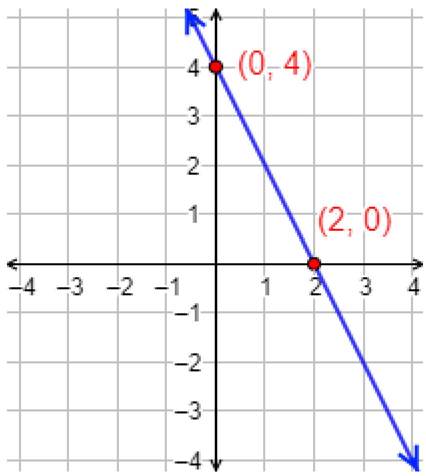
$$4 - 2x = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

El punto de corte es $(2,0)$

Como tenemos dos puntos de la recta, podemos representar su gráfica:



Problema 2

Calcular y representar la función cuya gráfica es una recta que pasa por los puntos (1,2) y (−3,4). ¿Cuál es su pendiente?

Solución:

La forma general de una recta es $y = mx + n$

Vamos a calcular m y n sustituyendo las coordenadas de los puntos.

Primer punto:

$$2 = m \cdot 1 + n$$

Segundo punto:

$$4 = m \cdot (-3) + n$$

Tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ -3m + n = 4 \end{cases}$$

Restando la primera ecuación a la segunda tenemos

$$-4m = 2$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

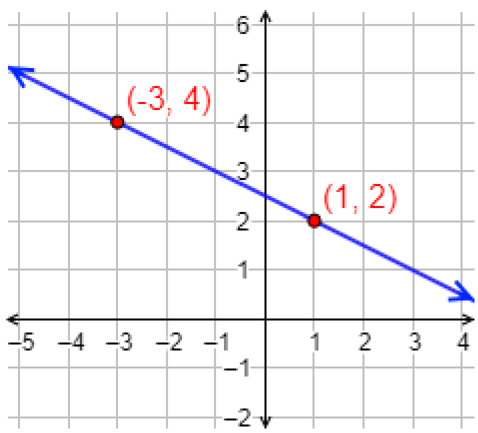
Sustituyendo m, tenemos n=5/2.

Por tanto, se trata de la función

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{5 - x}{2}$$

Gráfica:



La pendiente de la función es m=−1/2.