POTENCIAS. RADICALES.

Una potencia es una expresión algebraica de la forma x^n ; x es la base y n es el exponente. Si $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x \cdot x \cdots\cdots x$; es decir, multiplicar x "n" veces.

Ej : $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$; $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS.

1.- $x^0 = 1$; $\forall\, x$

2.- $x^1 = x$; $\forall\, x$

3.- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

4.- $x^n : x^m = x^{n-m}$

5.- $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

6.- $(\, x \cdot y\,)^n = x^n \cdot y^n$

7.- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

8.- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; en particular : $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$

9.- $x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p}$

Fijaros que las propiedades funcionan en ambos sentidos, es decir,de izquierda a derecha y de derecha a izquierda., por ejemplo :

$$2^7 \cdot 5^7 = 10^7 = 10.000.000$$

Si aparecen potencias con distintas bases o con distintos signos, empezar analizando el signo total , luego " olvidaros " de los signos, por ejemplo :

$$(-2)^3 \cdot 2^4 \cdot (-2)^2 = -\,2^9 = -512$$

$$(-3)^2 \cdot 3^3 = +\,3^5 = +243$$

DEF.- $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$; n es el índice de la raíz, (si es 2 no se suele poner) ; a es el radicando ; x es la raíz n-ésima de a.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES : $\sqrt[n]{a^p} \;=\; \sqrt[n\cdot q]{a^{p\cdot q}}$

Es decir, si multiplicamos o dividimos, el índice y el exponente por el mismo número, se obtiene un radical igual. (es la propiedad que se usa para reducir radicales a índice común)

EXTRAER FACTORES DEL RADICAL: Si la raíz es n-ésima,por cada n factores del radicando sale uno fuera.; es decir : $\sqrt[n]{x^p} = x^c \cdot \sqrt[n]{x^r}$; siendo c el cociente de dividir p entre n y r el resto de esa división .

Ej : $\sqrt[3]{x^7} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$; $\sqrt[5]{\frac{x^{17}.y^{10}}{z^9}} = \frac{x^3.y^2}{z^1} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^2}{z^4}}$

REDUCIR RADICALES A ÍNDICE COMÚN: Hallar el m.c.m. de los índices, dividir ese m.c.m. entre cada índice de la raíz y elevar el radicando a ese cociente.

Ej : $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{y^2}$; $\sqrt[4]{z^3}$; $\rightarrow$ $\sqrt[12]{x^6}$; $\sqrt[12]{y^8}$; $\sqrt[12]{z^9}$

INTRODUCIR FACTORES DENTRO DEL RADICAL : Se eleva el factor al índice de la raíz y se multiplica por el radicando : $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

Ej : $3 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$; $2 \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

RADICALES SEMEJANTES : Son los que tienen el mismo índice y el mismo radicando, es decir, solo cambia el coeficiente.

Ej : $3\sqrt{x}$; $-5\sqrt{x}$; $\frac{2}{7}\sqrt{x}$ son semejantes.

SUMA O RESTA DE RADICALES. Tienen que ser semejantes, y se suman o se restan los coeficientes.(si no son semejantes, hay que dejarlos indicados)

Ej : $\sqrt{18} - 4\sqrt{50} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} - 4\sqrt{2 \cdot 5^2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} - 20\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = -10\sqrt{2}$

MULTIPLICACIÓN O DIVISIÓN DE RADICALES .Tienen que tener el mismo índice, y se multiplican o dividen los radicandos. Si tienen distintos índices, hay que reducirlos a índice común . $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x\cdot y}$; $\sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

Ej : $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt{z} = \sqrt{x\cdot y\cdot z}$; $\sqrt[5]{a} : \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$

$$\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{y} = \sqrt[12]{x^8}\cdot\sqrt[12]{y^3} = \sqrt[12]{x^8\cdot y^3}$$

POTENCIA DE UNA RAÍZ : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$, es decir, se eleva el radicando a esa potencia.

Ej : $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$

RAÍZ DE RAÍZ : $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$, es decir, se multiplican los índices.

Si hay factores entre las raíces, primero hay que introducirlos.

Ej : $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$; $\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{y}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2\cdot y}} = \sqrt[8]{x^2\cdot y}$

RACIONALIZAR : Consiste en sacar las raíces del denominador . Puede pasar:

- $\frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{a\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{a\cdot\sqrt{x}}{x}$; ejemplo : $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}$

- $\frac{a}{\sqrt{x}+y} = \frac{a(\sqrt{x}-y)}{(\sqrt{x}+y)\cdot(\sqrt{x}-y)} = \frac{a\sqrt{x}-ay}{x-y^2}$

Ej : $\frac{2}{\sqrt{3}-5} = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+5)}{(\sqrt{3}-5)\cdot(\sqrt{3}+5)} = \frac{2\sqrt{3}+10}{3-25} = -\frac{2\sqrt{3}+10}{22} = -\frac{\sqrt{3}+5}{11}$

- $\frac{a}{\sqrt[n]{x^p}} = \frac{a\sqrt[n]{x^{p-n}}}{\sqrt[n]{x^p}.\sqrt[n]{x^{p-n}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{x^{p-n}}}{x}$

Ejemplo : $\frac{a}{\sqrt[5]{x^2\cdot y^3}} = \frac{a\sqrt[5]{x^3\cdot y^2}}{\sqrt[5]{x^2\cdot y^3}\cdot\sqrt[5]{x^3\cdot y^2}} = \frac{a\sqrt[5]{x^3\cdot y^2}}{x\cdot y}$