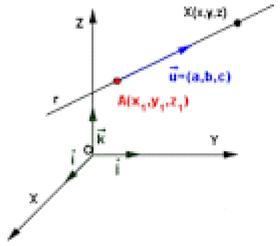
GEOMETRIA EN EL ESPACIO

ECUACIONES DE LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO

Una recta queda determinada por un punto conocido P, y un vector director. Luego , si X es un punto genérico de la recta , se obtiene la siguiente ecuación vectorial :



$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$; $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{v}$ y hallando las coordenadas de cada vector :

$(x\,,y\,,z\,) = (\,p_1\,,p_2\,,p_3\,) + \lambda\cdot(\,v_1\,,v_2\,,v_3\,)$ **Ecuacion vectorial de la recta.**

Igualando componente a componente, se obtienen las **ecuaciones paramétricas** :

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$; despejando el parámetro en cada ecuación e igualándolos :

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$$ que es **la ecuación contínua** de la recta.

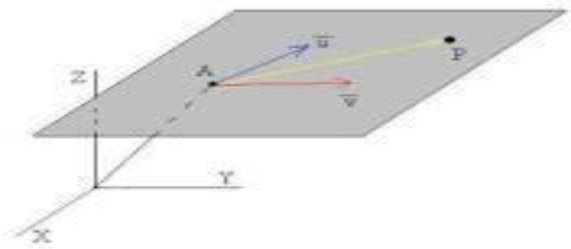
Igualando dos a dos fracciones , llegamos a la **ecuación general o implícita :**

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 \end{cases}$$

CASOS PARTICULARES

- Ecuación de la recta que viene dada por dos puntos conocidos A y B
  Como punto conocido podemos coger A o B ; y como vector director $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$
- Ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a otra recta.
  Como punto conocido el A ; y de vector director el de la recta a la que es paralela.

Un plano en el espacio queda determinado por un punto conocido P y dos vectores directores que sean linealmente independientes, es decir , no paralelos.



Si X es un punto genérico del plano , se obtiene la siguiente ecuación vectorial :

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ y calculando las coordenadas de cada vector:

$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(w_1, w_2, w_3)$ **ecuación vectorial** del plano

Igualando componente a componente , se obtienen las **ecuaciones paramétricas :**

$\begin{cases} x = p_1 + \alpha v_1 + \beta w_1 \\ y = p_2 + \alpha v_2 + \beta w_2 \\ z = p_3 + \alpha v_3 + \beta w_3 \end{cases}$, lo que da lugar a un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, siendo la matriz de los coeficientes :$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x - p_1 \\ v_2 & w_2 & y - p_2 \\ v_3 & w_3 & z - p_3 \end{pmatrix}$

Y como el sistema tiene que ser compatible, es decir , tiene que tener soluciones ⇒rangoA = rango$A^* = 2$ $\Longrightarrow \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x - p_1 \\ v_2 & w_2 & y - p_2 \\ v_3 & w_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$ lo que da lugar a una ecuación de la forma :

ax+by+cz+d=0 **ecuación general o implícita** del plano.

CASOS PARTICULARES :

- Ecuación del plano que pasa por tres puntos (no alineados)

Como punto conocido, cualquiera de ellos A,B o C y de vectores directores $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

(cualquier otra combinación)

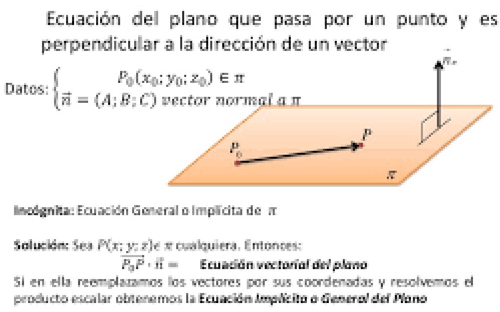
- Ecuación del plano que contiene a una recta r y pasa por un punto P

Como punto conocido, cualquiera de la recta o el punto P ; y como vectores directores uno de ellos el de la recta y el otro el vector que determina el punto de la recta y el punto P, o sea:

$$\vec{v} = \vec{v} \ ; \quad \vec{w} = \overrightarrow{AP}$$

Vector normal o característico de un plano: Dado el plano ax+by+cz+d =0, el vector

IES ILLA DE TAMBO 16-17



$\vec{n} = (\, a, b, c\,)$ **es normal (perpendicular) al plano.**

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO.

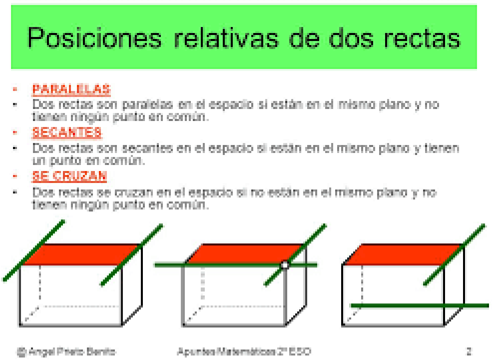
Supongamos que las rectas vienen dadas en forma general o implícita , es decir :

$$r \equiv \begin{cases} a_1 x + b_1\, y + c_1\, x + d_1 = 0 \\ a_2\, x + b_2 y + c_2\, z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad ; \qquad s \equiv \begin{cases} a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z + d_3 = 0 \\ a_4\, x + b_4\, y + c_4\, z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Lo que da lugar a un sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas,luego, y teniendo en cuenta que el rango de A es como mínimo dos, ya que si fuera rango 1 , tendríamos 4 planos paralelos , lo que implicaría que no habría recta , puede pasar :

- $rango A = 2 \implies \begin{cases} rango A^* = 2 \implies \text{ rectas coincidentes } \ (r = s) \\ rango A^* = 3 \implies r \ y \ s \text{ son paralelas} \end{cases}$

- $rango\ A = 3 \implies \begin{cases} rango A^* = 3 \implies r \ y \text{ se cortan en un punto } P \ (\text{son secantes}) \\ rango A^* = 4 \implies r \ y \ s \text{ se cruzan.} \end{cases}$



OTRA FORMA DE HACERLO (sobre todo si las rectas no están en forma implícita)

Coger los vectores directores de cada recta, $\vec{v} \ \ y \ \vec{w}$; y comprobar si son paralelos, es decir :si $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$; si lo son, comprobar si el punto de una recta está en la otra. Si lo está, entonces son coincidentes, si no, son paralelas.

Si no son paralelas, estudiar el rango de $(\vec{v}\,, \vec{w}, \overrightarrow{AB}\,)$. Si es dos, entonces son secantes (se cortan en un punto) ; si es tres, las rectas se cruzan; es decir :

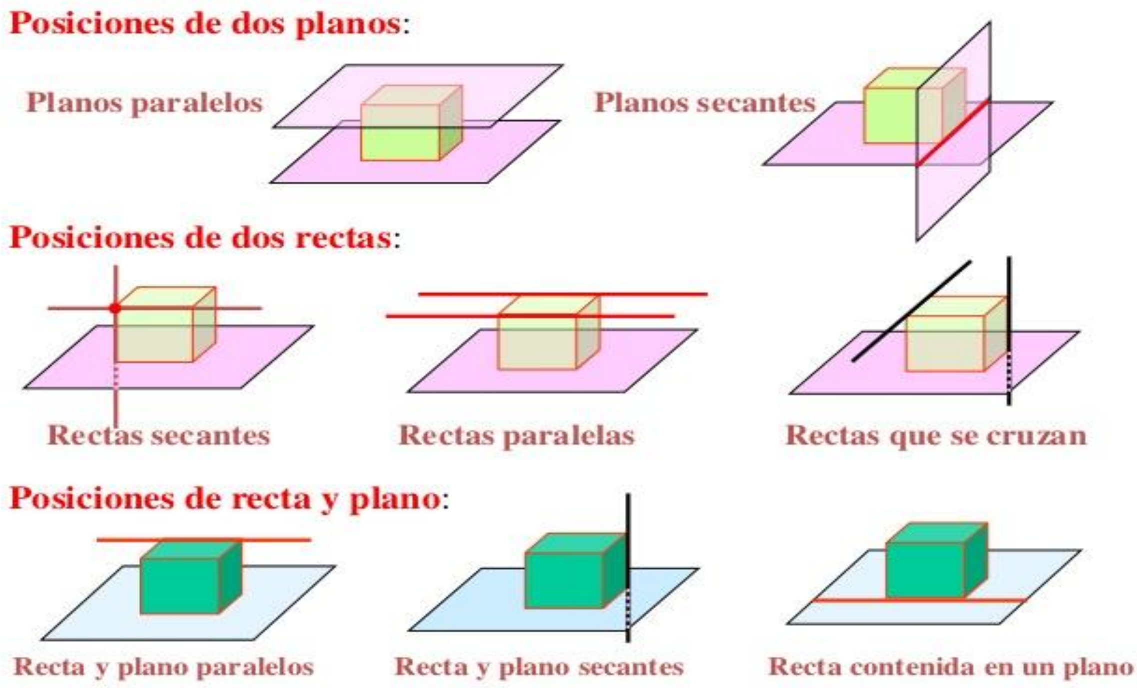
$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x-p_1 \\ v_2 & w_2 & y-p_2 \\ v_3 & w_3 & z-p_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \Longrightarrow se\ cortan\ en\ un\ punto \\ \neq 0\ \ se\ \ cruzan \end{cases}$$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS EN EL ESPACIO

Sean $\begin{cases} \pi_1 \equiv a_1\,x + b_1\,y + c_1 z + d_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 \end{cases}$; luego es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas; luego los rangos pueden ser :

- $rangoA = 1 \Longrightarrow \begin{cases} rangoA^* = 1 \Longrightarrow son\ planos\ coincidentes \\ rangoA^* = 2 \Longrightarrow son\ planos\ paralelos \end{cases}$

- $rangoA = 2 \Longrightarrow rangoA^* = 2 \Longrightarrow los\ dos\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta$



OTRA FORMA DE HACERLO

Coger los vectores normales de cada plano. Si no son paralelos, se cortan en una recta. Si son paralelos y un punto de un plano está en el otro plano, entonces son coincidentes; si el punto no está,entonces son paralelos.

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS EN EL ESPACIO.

Sean $\begin{cases} \pi_1 \equiv a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 \\ \pi_3 \equiv a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3 = 0 \end{cases}$; lo que da lugar a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas ; luego los rangos pueden ser :

- $rangoA = 1 \Longrightarrow \begin{cases} rangoA^* = 1 \Longrightarrow los\ tres\ planos\ son\ coincidentes. \\ rangoA^* = 2 \Longrightarrow los\ tres\ planos\ son\ paralelos. \end{cases}$
- $rangoA = 2 \Longrightarrow \begin{cases} rangoA^* = 2 \Longrightarrow los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta \\ rangoA^* = 3 \Longrightarrow \begin{cases} hay\ dos\ paralelos\ y\ el\ otro\ los\ corta \\ o\ se\ cortan\ dos\ a\ dos, formando\ un\ prisma \end{cases} \end{cases}$
- $rangoA = 3 \Longrightarrow rangoA^* = 3 \Longrightarrow los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UN PLANO EN EL ESPACIO.

Sean $\pi \equiv a_1\,x + b_1\,y + c_1 z + d_1 = 0$; y $r \equiv \begin{cases} a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3 = 0 \end{cases}$

Luego es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces :

- $rangoA = 2 \Longrightarrow \begin{cases} rangoA^* = 2 \Longrightarrow la\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ planol \\ rangoA^* = 3 \Longrightarrow la\ recta\ es\ paralela\ al\ plano \end{cases}$
- $rangoA = 3 \Longrightarrow rangoA^* = 3 \Longrightarrow la\ recta\ y\ el\ plano\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

OTRA FORMA DE HACERLO

Coger el vector director de la recta y el normal al plano. Si no son perpendiculares, la recta y el plano se cortan en un punto, si son perpendiculares, y el punto de la recta está en el plano, entonces la recta está contenida en el plano; si no, la recta es paralela al plano.

ANGULOS

ANGULO QUE FORMAN DOS RECTAS :

Se define el ángulo que forman dos rectas, como el menor de los ángulos suplementarios que determinan : $\cos\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$

NOTA : suponemos que las dos rectas se cortan, sin embargo, la fórmula tiene sentido aunque las rectas sean coincidentes, paralelas o se crucen en el espacio.

IES ILLA DE TAMBO 16-17

ANGULO QUE FORMAN DOS PLANOS:

El ángulo que forman dos planos se define como el menor de los ángulos suplementarios que determinan sus vectores normales, es decir: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$

ANGULO QUE FORMA RECTA Y PLANO :

El ángulo que forman recta y plano se define como el menor de los dos complementarios que determinan el vector director de la recta y el vector normal del plano, es decir :

$$sen\alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

DISTANCIAS .

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS :

La distancia entre dos puntos A y B, se define como el módulo del vector que determinan los puntos A y B , o sea :

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

PROPIEDADES :

- $d(A, B) = d(B, A)$
- $d(A, A) = 0$
- $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ “ desigualdad triangular “

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA :

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

siendo $\vec{v}$ *el vector director de la recta r ; y A el punto conocido de la recta.*

(la demostración se hará en clase.)

IES ILA DE TAMBO 16-17

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO :

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{P}\,,\pi\,) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

siendo $P\,(\,p_1\,,p_2\,,p_3)\;\; y\;\; el\;\; plano\;\; \pi\; \equiv ax + by + cz + d = 0$

(la demostración se hará en clase)

CASOS PARTICULARES : Para hallar la distancia entre dos rectas, dos planos, entre recta y plano, estudiar primero su posición relativa.

PROBLEMAS MÉTRICOS.

PROYECCIONES :

PROYECCION ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO:

Es el punto de corte de la recta perpendicular al plano que pasa por P con el plano.

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO:

Se puede hacer de dos formas :

- es la recta determinada por la proyección sobre el plano de dos puntos de la recta
- es la recta intersección del plano con un plano perpendicular a él que contiene a la recta. (aconsejable este método)

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA :

Se puede hacer de dos maneras :

- es el punto de corte de la recta con el plano perpendicular a la recta que pasa por P
- de forma análitica.

Ejemplo : hallar la proyección de P (1 ,2, 3) sobre la recta : $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 5t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$

$$Si\; P'\;\; pertenece\; a\; la\; recta\;\; r\;\; debe\;\; ser\; de\; la\; forma\;\; P'\,(\,-1 + 4t, 5t\,, 2 + 6t\,)$$

Y como $\overrightarrow{P\,P'}\;\perp\;\vec{v}\;\Longrightarrow$ (4 , 5 ,6)·(4t-2 , 5t -2 , 6t -1) = 0 $\;\Longrightarrow t = \frac{24}{77}$; luego el punto buscado es $P'\,(\frac{19}{77}\,,\frac{120}{77}\,,\frac{298}{77})$

Escriba aquí la ecuación.

IES ILLA DE TAMBO 16-17

RECTA PERPENDICULAR A DOS RECTAS QUE SE CRUZAN:

Dadas dos rectas que se cruzan, hay una ÚNICA recta que la corta perpendicularmente.

Se puede hallar de dos maneras:

- hallar un punto genérico de cada recta; y poner la condición de que sea perpendicular a cada recta , es decir ; sea
  $P\ un\ punto\ de\ r$; $Q\ un\ punto\ de\ s$; $luego\ \overrightarrow{PQ}\ tiene\ que\ ser\ perpendicular\ a\ \vec{v}\ y\ \vec{w}$
- la recta buscada es la intersección de los planos
  $\pi_1\ que\ contiene\ a\ r\ \ y\ paralelo\ a\ \vec{z}\ y\ el\ plano\ \pi_2\ que\ contiene\ a\ s\ y\ paralelo\ a\ \vec{z}$;
  siendo $\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{w}$

IES ILLA DE TAMBO 16-17