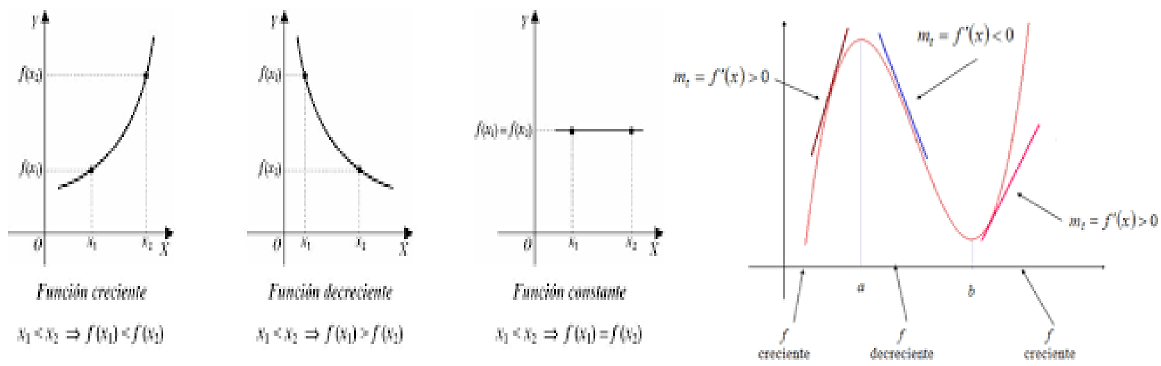
ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

CRECIMIENTO. DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MINIMOS.

Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $a \in D$

DEF.- f es creciente en “a” $\Leftrightarrow$ $\exists$ E(a) / $\begin{cases} si \;\; x < a \Rightarrow f(x) \;\leq f(a) \\ si \; x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a) \end{cases}$ $\forall \, x \in$ E(a)



De la misma forma se define función decreciente.

*****TEOREMA.** (Relación entre la monotonía y la derivabilidad)

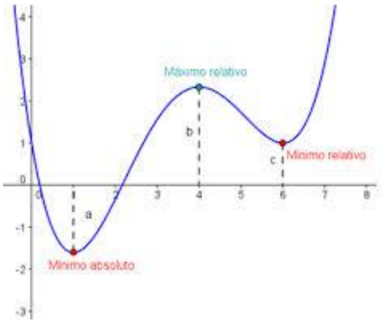
Sea f derivable en “a” . Entonces $\begin{cases} i) \quad\;\; si \;\; f'(a) > 0 \Rightarrow f \; es \; creciente \; en \; "a" \\ ii) \; si \; f'(a) < 0 \Rightarrow f \; es \; decreciente \; en \; "a" \end{cases}$

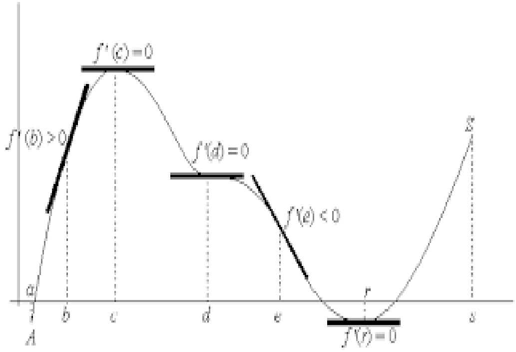
La demostración es muy sencilla, sólo se necesita saber las definiciones y un poco de “sentidiño”. (se hará en clase)

¡¡¡OJO!!! ¿ qué ocurre si $f'(a) = 0$? Puede ocurrir de todo, es decir, que sea creciente, que sea decreciente, que tenga un máximo, que tenga un mínimo. Para comprobarlo, representar $f(x) = x^2$; $g(x) = -x^2$; $h(x) = x^3$; $j(x) = -x^3$ y calcular sus derivadas en el punto 0 ¿ qué ocurre?

DEF.- f tiene un MÁXIMO (relativo o local) en “a” $\Leftrightarrow \exists \, E(a) / \, f(x) \leq f(a), \forall x \in E(a)$

Análogamente, se define el mínimo.





<u>* TEOREMA</u>**.- (Condición necesaria para la existencia de extremos)

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad si\ \ f\ es\ derivable\ en\ "a" \\ y\ \ f\ tiene\ un\ extremo\ en\ "a" \end{array} \right. \Rightarrow f'(a) = 0$$

La demostración es muy sencilla usando “reducción al absurdo” , o bien hacerlo directamente usando las definiciones.

<u>MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE EXTREMOS (MÁXIMOS O MINIMOS)</u>

<u>CRITERIO DE LA 1ª DERIVADA :</u> Sea $f'(a) = 0$ .Si al pasar de izquierda a derecha por el punto “a” la derivada cambia de valores positivos (negativos) a negativos (positivos), entonces la función tiene un MAX (min) en el punto “a”

<u>CRITERIO DE LA 2ª DERIVADA :</u> Sea $f'(a) = 0$.

Entonces $\left\{ \begin{array}{l} (i)\ \ si\ \ f''(a) > 0\ \Rightarrow f\ tiene\ \ un\ mínimo\ en\ "a" \\ ii)\ \ si\ f''(a) < 0 \Rightarrow f\ tiene\ un\ Máximo\ en\ \ "a" \end{array} \right.$

NOTA : aconsejable el criterio de la 1ª derivada. Es absolutamente seguro, y evita tener que calcular la segunda derivada. Además, el criterio de la segunda derivada puede dar lugar a casos dudosos.Por ejemplo, hallar los extremos de :

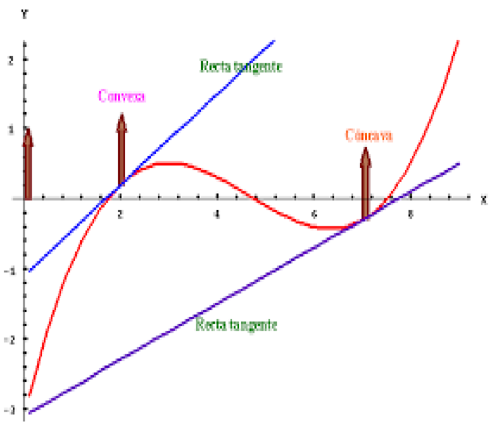
$f(x) = x^3$; $\qquad g(x) = x^4$, por los dos criterios.¿ qué conclusiones sacáis?

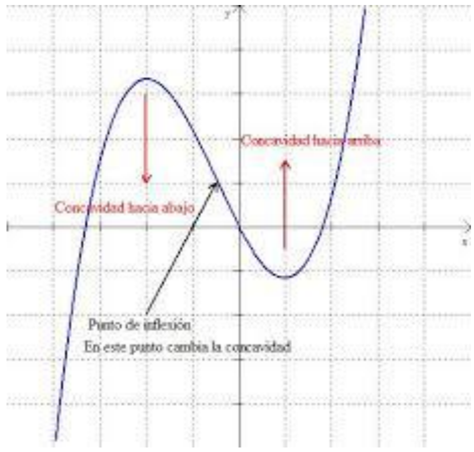
INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁX y min.

a) Hallar la primera derivada e igualarla a 0 (o sea, $f'(x) = 0$)
b) Sobre el dominio de la función, representar los puntos que anulan la 1ª derivada.
c) Analizar el signo de la derivada en cada intervalo. Donde sea + la función crece y donde sea – decrece.
d) A la vista de eso, hallar los extremos.

CONCAVIDAD. CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

DEF.- Una función es convexa (cóncava) en el punto "a" $\Leftrightarrow$ la recta tangente queda por debajo (encima) de la gráfica de la función en "a"





Los puntos donde la función cambia de curvatura (de cóncava a convexa o al revés) se llaman PUNTOS DE INFLEXIÓN

*****TEOREMA** (Relación entre la derivabilidad y la curvatura).

Sea f dos veces derivable en "a". Entonces $\begin{cases} (i)\ si\ \ f''(a) > \ 0 \Rightarrow f\ es\ convexa\ en\ "a" \\ (ii)\ si\ f''(a) < 0 \Rightarrow f\ es\ cóncava\ en\ "a" \end{cases}$

COROLARIO (CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE P.I.)

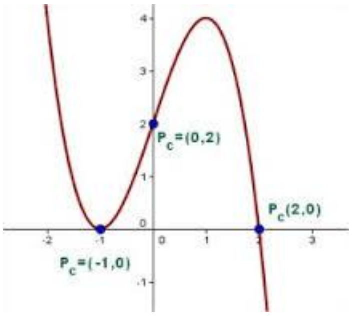
$$\begin{cases} si\ \ f\ es\ dos\ veces\ derivable\ en\ "a" \\ \qquad y\ \ f\ tiene\ un\ P.I.\ en\ \ "a" \end{cases} \Rightarrow f''(a) = 0$$

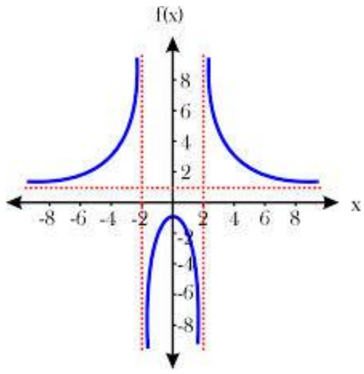
INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. PTOS. INFLEXIÓN.

Calcular la 2ª derivada e igualarla a 0. (o sea $f''(x) = 0$)

Sobre el dominio de la función poner los puntos que anulan la 2ª derivada. Analizar el signo de la 2ª derivada en cada intervalo, donde sea positivo la función es convexa y donde sea negativo, cóncava. Aquellos puntos en los que cambia la función de cóncava a convexa (o viceversa) son PUNTOS DE INFLEXIÓN.

PUNTOS DE CORTE DE UNA FUNCIÓN CON LOS EJES DE COORDENADAS





Si corta al eje X y=0 y hallar las "x" (si existen)

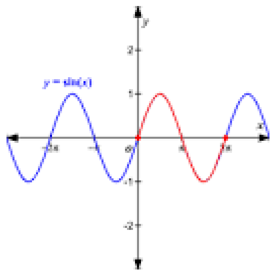
Si corta al eje Y x=0 " " "y"

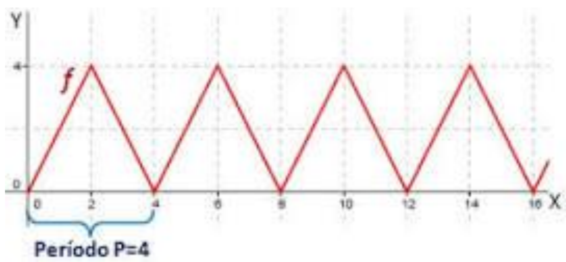
Es posible que una función corte a los dos ejes, a uno sólo o a ninguno.

PERIODICIDAD

Una función es periódica de período "k" $\Leftrightarrow f(x+k) = f(x)\,;\ \forall x \in Dom f$

Por ej; las funciones f(x)= senx ; f(x) = cos(x) son periódicas de período k= 2π rad



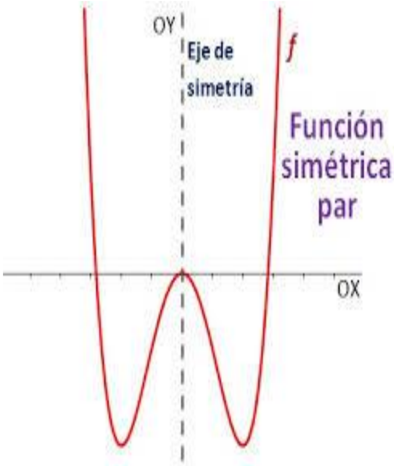


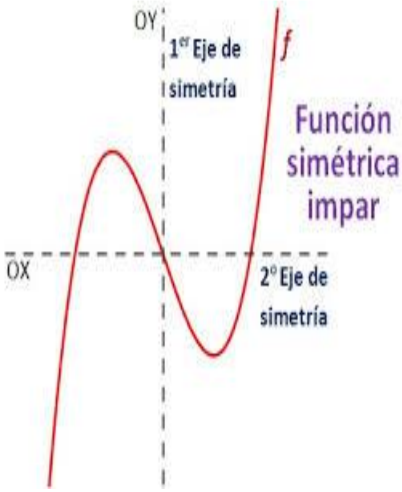
SIMETRÍAS DE UNA FUNCIÓN

Simétrica respecto eje Y (“par”) $\Leftrightarrow$ f(x) = f(- x)

Simétrica respecto origen (“ impar”) $\Leftrightarrow$ f(-x) = - f(x)

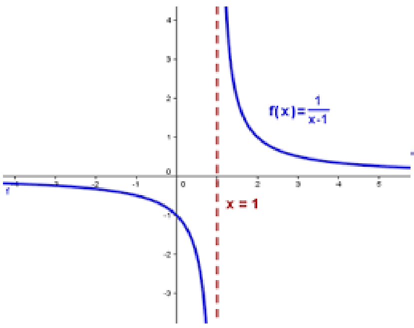
Hay funciones que no tienen ninguna simetría.

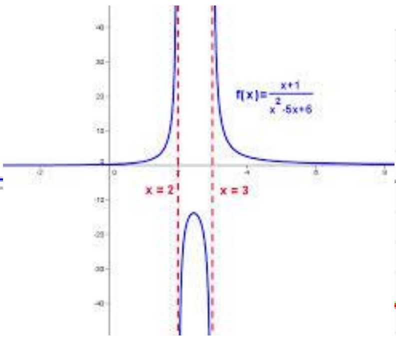


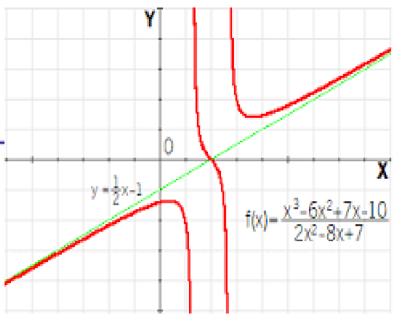


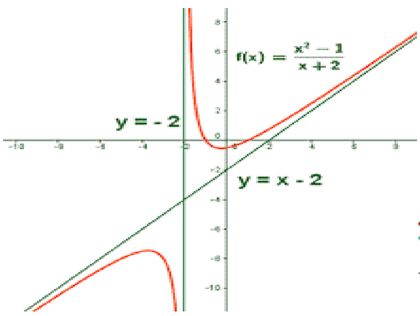
ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

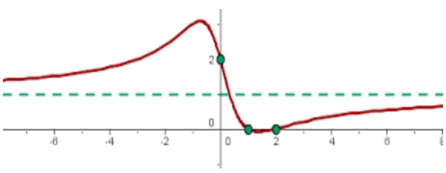
Las asíntotas son rectas a las que se aproximan indefinidamente la función.

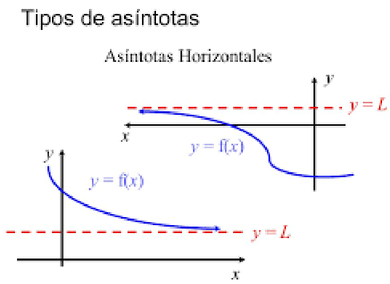












Pueden ser :

ASÍNTOTAS HORIZONTALES : si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$ $es\ una\ A.H.$

ASÍNTOTAS VERTICALES : $si\ \ \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a\ \ es\ una\ \ A.V.$

ASÍNTOTAS OBLÍCUAS : son de la forma $y = mx + b$ siendo $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$;
y $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$; y $m \neq 0\ y\ m \neq \infty$

OBSERVACIONES:

Las funciones polinómicas NO TIENEN ASÍNTOTAS (podeis comprobarlo)

Si una función tiene A.H. NO PUEDE TENER OBLÍCUAS.

Las A.V. son fáciles de buscar si os fijáis en el dominio.Puede haber más de una.

La gráfica puede cortar a las A.H y a las A.O (NO PUEDE A LAS VERTICALES)

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para representar gráficamente una función debéis calcular :

1.- Domf

2.- Ptos de corte con los ejes

3.- Simetrías

4.- Periodicidad

5.- Intervalos de crecimiento y decrec, MÁX y min.

6.- “ “ concavidad y convexidad. P.I.

7.- Asíntotas.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

Se trata de optimizar (maximizar o minimizar) una función , que puede ser un perímetro, un área, un volumen, la velocidad, el precio, un ángulo, el tiempo, etc.

Para ello :

Escribir la función a optimizar. Probablemente, dependerá de más de una variable, luego hay que conseguir que dependa de una sóla variable. Y luego, su derivada tendrá que ser 0. Comprobar los resultados obtenidos.

O sea : $\begin{cases} F = f\ (x, y, z, t, \ldots) \\ F' = 0 \end{cases}$