DETERMINANTES

" Me lo contaron y lo olvidé; lo ví y lo entendí; lo hice y lo aprendí " CONFUCIO.

¡¡ Los determinantes SÓLO se pueden calcular para matrices cuadradas!!

DEF.- Sea A_{nxn} ; el determinante es una aplicación $\det : \mathcal{M}_{nxn} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada matriz cuadrada de orden n le asocia el siguiente número real :

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \epsilon S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots\cdots a_{n\sigma(n)}$$

Siendo S_n el grupo simétrico de las permutaciones de los primeros n números naturales ; y $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sigma}$; es decir , el signo de la permutación. Si el número de cambios que hay que hacer para volverlos al orden natural el par, se considera positiva, si es impar negativa.

EJ : si n= 3 : 213 ⟶123 se hizo un cambio, por lo tanto es negativa.

312⟶132⟶123 se hicieron dos cambios, por lo tanto es positiva.

En general, el determinante consiste en la suma de todos los productos que se pueden formar con los elementos de la matriz, COGIENDO CADA VEZ UN ELEMENTO DE CADA FILA Y DE CADA COLUMNA.

DETERMINANTES 2X2 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$, es decir, es el producto de la diagonal principal menos el producto de la diagonal secundaria.

Ej : det $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 35 = -29$

DETERMINANTES 3X3 Se pueden hacer de varias formas. Vamos a empezar usando la REGLA de SÄRRUS :

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}$$
$$= \boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}}$$

Es decir, se consideran positivos el producto de la diagonal principal y sus paralelas, y negativos,el producto de la diagonal secundaria y sus paralelas.

Ej: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ (-1) & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-3)(-5)(-1) + 0 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot 0 \cdot 0 - (-5) \cdot 4 \cdot 1 = 5$

DEFINICIÓN: Se llama **MENOR COMPLEMENTARIO** de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A, y se representa por Δ_{ij} al determinante que resulta de suprimir la fila i y la columna j de la matriz A

Ej : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-6) = 8$ (observar que el valor del elemento, 4, no influye en su menor complementario)

DEFINICIÓN: Se llama ADJUNTO de un elemento a_{ij} y se representa por Ad_{ij} , a

$Ad_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$ es decir, es el menor complementario con un signo + o –

Ej : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ los adjuntos de los elementos a_{22} y a_{32} son :

$Ad_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36$; $Ad_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -11$

TEOREMA.- El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por sus correspondientes adjuntos, es decir :

$$\det(A) = |A| = a_{i1}\, Ad_{i1} + a_{i2}\, Ad_{i2} + \cdots + a_{in} Ad_{in} = a_{1j}\, Ad_{1j} + a_{2j}\, Ad_{2j} + \cdots + a_{nj}\, Ad_{nj}$$

NOTA: es aconsejable usar filas o columnas que tengan 0, para abreviar.

Ej : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si calculamos el determinante por el teorema anterior (fijaros que también podríamos usar SÄRRUS) lo lógico sería hacerlo por la 2ª o 3ª fila o por la 1ª o 3ª columna.

det(A) = $5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-13) - 1 \cdot 8 = -73$ (por la 3ª fila)

det(A) = $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot (-13) = -73$ (por la 1ª columna)

Este método es el que se usa para calcular determinantes de orden superior.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

1.- $\det(A) = \det(A^t)$.

Como consecuencia de esta propiedad, todas las propiedades que tengan las filas , las tendrán también las columnas.

2.- Si todos los elementos de una fila (columna) son 0, el determinante vale 0.

3.- Si dos o más filas (o columnas) son iguales o proporcionales, el determinante vale 0

4.- Si los elementos de una fila (0 columna) son múltiplos de un número, éste se puede sacar fuera del determinante.

Ej : $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

5.- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

6.-Si todos los elementos de una fila (o columna) están formados por varios sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes que resultan de sustituir los primeros, segundos, etc sumandos.

Ej : $\begin{vmatrix} x+y+z & p \\ a+b+c & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & p \\ a & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & p \\ b & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & p \\ c & q \end{vmatrix}$

7.- Si se cambian entrie si dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo.

En general, si el número de cambios es par, no cambia de signo, si es impar , sí.

8.-Si una fila (o columna) es combinación lineal de las demás filas (o columnas) el determinante es 0

9.- Si a una fila (o columna) se le añade una combinación lineal de las demás filas (columnas), el determinante no varía. (es la propiedad que se usa para colocar "0")

10.- det (A·B) = det A · det B

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA:

1.- Comprobar que detA ≠ 0

2.- Hallar la traspuesta de A

3. Hallar la adjunta de la traspuesta

4.- $A^{-1} = \frac{Ad\ (A^t)}{\det A}$ NOTA : los pasos 2 y 3 pueden cambiarse)