COMBINATORIA . PROBABILIDAD

VARIACIONES : variaciones de "n" elementos tomados de "k" en "k" son todos los grupos de "k" elementos que pueden formarse, distinguiéndose entre sí bien por la naturaleza de algún elemento o bien por el orden de sucesión (colocación) de los mismos.

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Ej : *Con los colores blanco, rojo, azul, verde y amarillo, ¿cuántas banderas de tres franjas verticales distintas se pueden hacer?*

$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ banderas diferentes.

PERMUTACIONES : permutaciones de "n" elementos son todos los grupos de "n" elementos que se wie(colocación) de los elementos.

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ej : *con las cifras 2,4,5,6,7 , ¿cuántos números de 5 cifras distintas se pueden formar?*

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ números.

COMBINACIONES : combinaciones de "n" elementos tomados de "k" en "k" , son todos los grupos de "k" elementos que se pueden hacer, distinguiéndose unos grupos de otros en la naturaleza de por lo menos un elemento.

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ej : *con las frutas manzanas, peras, naranjas, limones, kiwies, plátanos y fresas, ¿cuántos zumos de 4 frutas se pueden hacer?*

$C_7^4 = \binom{7}{4.} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ zumos distintos.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS:

1.- $\binom{n}{0} = 1 \ ; \quad \forall\, n$

2.- $\binom{n}{1} = n \ ; \quad \forall\, n$

3.- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4.- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

BINOMIO DE NEWTON :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots \binom{n}{n} b^n$$

NOTA : los coeficientes del binomio de Newton, es decir, eses números combinatorios, coindicen con los del TRIÁNGULO DE TARTAGLIA :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1 y así sucesivamente.

VARIACIONES CON REPETICIÓN : de "n" elementos tomados de "k" en "k" son todos los grupos ordenados de "k" elementos que se pueden formar con elementos distintos o repetidos

$$RV_n^k = n^k$$

Ej : con las cifras 3; 4 ; 7 , ¿ cuántos números de 5 cifras se pueden hacer?

33333 ; 33334; 33477; 44447 ,……. $RV_3^5 = 3^5 = 243$ números distintos.

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN : de "n" elementos, donde unos se repiten "a" veces; otros "b" ; otros "c" ; (a+b+c =n) son todos los grupos de "n" elementos que se pueden formar , distinguiéndose unos de otros en el orden de colocación de los elementos distintos.

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

Ej : Con las cifras 7,7,8,8,8 ; ¿cuántos números de cinco cifras se pueden formar?

$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ números distintos.

PERMUTACIONES CIRCULARES : $\mathrm{CP}_n = (\mathrm{n}-1)!$

Ej :¿ De cuantas formas se pueden sentar 5 personas en una mesa redonda? $CP_5 = 4! = 24$ formas

COMBINACIONES CON REPETICIÓN : $\boldsymbol{RC_n^k = \binom{n+k-1}{k}}$

Ej : ¿de cuántas formas se pueden distribuir 10 bolas iguales en 7 cajas?

$$RC_{10}^7 = \binom{10+7-1}{7} = 8008$$

PROBABILIDAD.

EXPERIMENTO DETERMINÍSTICO : son aquellos en los que se obtiene el mismo resultado siempre y cuando se hagan en las mismas condiciones..

Ej : la aceleración con la que cae un objeto es siempre la misma (g)

EXPERIMENTO ALEATORIO : son aquellos que al repertirlos en las mismas condiciones, dan lugar a resultados diferentes.

Ej : lanzamiento de una moneda; extracción de una carta de una baraja, etc

CARACTERÍSTICAS DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO :

1.- son fenómenos que repetidos de un forma indefinida,y en igualdad de condiciones, pueden presentar resultados diferentes.

2.- No pueden predecirse.

3.-repitiendo una cierta experiencia "n" veces, si anotamos el mismo número de veces que aparece un resultadoconcreto, el cociente tiende a estabilizarse.

ESPACIO MUESTRAL E= Ω : Es el conjunto de TODOS los resultados posibles que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio.

Ej: lanzar una moneda . E = $\{c\ ,+\ \}$

Lanzar un dado : E = $\{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5,\ 6\ \}$

Cada elemento del espacio muestral, se llama **SUCESO ELEMENTAL**

Se llama **SUCESO** a cualquier subconjunto del espacio muestral

SUCESO DIFERENCIA A-B = $\{\boldsymbol{x \epsilon A\ y\ x\ \notin B}\}$

SUCESO CONTRARIO (O COMPLEMENTARIO) DE A : $\boldsymbol{A^C} = \overline{\boldsymbol{A}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \quad /\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}\}$**= E-A**

SUCESO UNIÓN DE A y B : $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}/\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$

SUCESO INTERSECCIÓN DE A y B : A$\cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}\ /\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$

Dos sucesos son **INCOMPATIBLES** si no pueden verificarse simultáneamente ; es decir, si se verifica A no puede verificarse B , y viceversa ; o sea:

A y B son incompatibles $\Leftrightarrow$ **A**$\cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\phi}$

PROPIEDADES:

ASOCIATIVA : $A\ \cup (B \cup C\ ) = (A \cup B\ ) \cup C$; $A\ \cap (B \cap C\ ) = (\ A \cap B) \cap C$

CONMUTATIVA : $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

IDEMPOTENTE : $A\ \cup A = A$; $A \cap A = A$

DISTRIBUTIVAS : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

COMPLEMENTARIOS : $A \cup \bar{A} = E$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$

LEYES DE MORGAN : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD DE LAPLACE

$$0 \leq p(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} \leq 1$$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD : $p: \wp(E) \rightarrow [\,0\,,1\,]$

$A \rightarrow p(A)$; es decir, la probabilidad es una aplicación que asigna a cada suceso A un número real verificando :

1) $0 \leq p(A) \leq 1$; para cualquier suceso.
2) p(E) = 1
3) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

   En general ; si $A_i \cap A_j = \emptyset \quad si\ \ i \neq j \quad \Longrightarrow p\,(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$

CONSECUENCIAS DE LOS TRES AXIOMAS ANTERIORES :

4) $p\,(\bar{A}) = 1 - p\,(A)$
5) $p\,(\emptyset) = 0$
6) $si\ \ A \subset B \ \Longrightarrow p(A) \leq p\,(B)$
7) $p\,(A \cup B) = p(A) + p\,(B) - p(A \cap B)$
8) $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sean A y B sucesos del espacio muestral. Se define la probabilidad del suceso A condicionada por el suceso B :

$$p(A/_B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad ; \ \ p(B) > 0$$

La probabilidad condicionada está bien definida,es decir, verifica los tres axiomas anteriores, como es fácil de comprobar.

De la definición anterior se obtiene que : $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/_B)$

Ej : En la Biblioteca hay 10 libros de Cálculo de Probabilidades de los cuales 4 son de la editorial H. La bibliotecaria coge dos al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean de la editorial H?

$$p(HH) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES .

Dos sucesos A y B son **independientes** si $p\left({}^{A}/_{B}\right) = p(\ A\ )$; luego, si son distintos , son **dependientes.**

Luego, si son independientes : $\begin{cases} p\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ como\ \ p\left({}^{A}/_{B}\right) = p(A\ ) \end{cases} \Longrightarrow\ \ p(\ A\ \cap B\ ) = p(\ A\ ) \cdot p(\ B\ )$

Evidentemente, si A es independiente de B ; B es independiente de A

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL: Sean $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de sucesos tales que $A_i \cap A_j = \emptyset\ \ si\ \ i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$. Sea B otro suceso de E. Luego :

$$p(\ B\ ) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p\left({}^{B}/_{A_i}\right)$$

Ej : Un niño tiene tres huchas con monedas de 1 € y de 2 €. La distribución es la siguiente :

Hucha 1 : 3 monedas de 1 € y 5 de 2 €

Hucha 2 : 8 " " 1 € " 3 " 2 €

Hucha 3 : 5 " " 1 € " 4 " 2 €

Sacamos al azar una moneda. ¿ cuál es la probabilidad de que sea de 2 €?

SOL : $p(H_1) = p(\ H_2) = p(\ H_3) = \frac{1}{3}$; $p\left({}^{B}/_{H_1}\right) = \frac{5}{8}$; $p\left({}^{B}/_{H_2}\right) = \frac{3}{11}$; $p\left({}^{B}/_{H_3}\right) = \frac{4}{9}$

Luego : $p(B) = p(H_1) \cdot p\left({}^{B}/_{H_1}\right) + p(H_2) \cdot p\left({}^{B}/_{H_2}\right) + p(H_3) \cdot p\left({}^{B}/_{H_3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \approx 45\%$

También se puede hacer por un diagrama de árbol.

TEOREMA DE BAYES : Sean $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una colección de sucesos tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ y $A_i \cap A_j = \emptyset\ \ si\ \ i \neq j$. Sea B otro suceso de E. Entonces :

$$p\left({}^{A_i}/_{B}\right) = \frac{p(A_i) \cdot p\left({}^{B}/_{A_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p\left({}^{B}/_{A_i}\right)}$$

Ej : Con los datos del ejemplo anterior, si la moneda es de 2 € , ¿ cuál es la probabilidad de que proceda de la hucha 1?

SOL : $p\left({}^{H_1}/_{B}\right) = \dfrac{p(H_1)\cdot p\left({}^{B}/_{H_1}\right)}{p(H_1)\cdot p\left({}^{B}/_{H_1}\right)+p(H_2)\cdot p\left({}^{B}/_{H_{2.}}\right)+p(H_3)\cdot p\left({}^{B}/_{H_3}\right)} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{1063}{2376}} \approx$ 46%

Ej : En la enfermera del Dr. Martínez no se puede confiar.La probabilidad de que se olvide de inyectar un suero a un enfermo durante la ausencia del Dr, es de 2/3. El enfermo está grave; si se le inyecta el suero, tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar; pero solamente el 0'25 de probabilidad de mejorar si no se le inyecta. Al regreso, el Dr. Martínez se encuentra con que el enfermo ha empeorado.¿ Cuál es la probabilidad de que la enfermera se haya olvidado de inyectarle el suero?

SOL : Sea B =”enfermo empeora” ; $A_1 =$ “enfermera se olvidó” ; $A_2 =$”enfermera no se olvidó”

Luego : $p\left({}^{A_1}/_{B}\right) = \dfrac{p(\,A_1)\cdot p\left({}^{B}/_{A_1}\right)}{p(A_1)\cdot p\left({}^{B}/_{A_1}\right)+p(A_2)\cdot p\left({}^{B}/_{A_2}\right)} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 75\%$

Igual que el ejemplo anterior, se puede hacer por un diagrama de árbol.