MATEMÁTICAS

APLICADAS

A LAS

CIENCIAS

SOCIALES

2º BACHILLERATO

JOSÉ LUIS DIAZ LEYES

Imprime: Gráficas Gallegas
Depósito Legal: OU-140/2006

ÍNDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

Gauss
(1777-1855)

Hamilton
(1805-1865)

Dantzig
(1914-2005)

BLOQUE I :

ÁLGEBRA

TEMA1: CÁLCULO MATRICIAL

1.1.-DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz de dimensión **mxn** es un cuadro de números reales dispuestos en **m** filas y **n** columnas. Ese cuadro se mete entre paréntesis y se le designa con una letra mayúscula.

Ejemplo

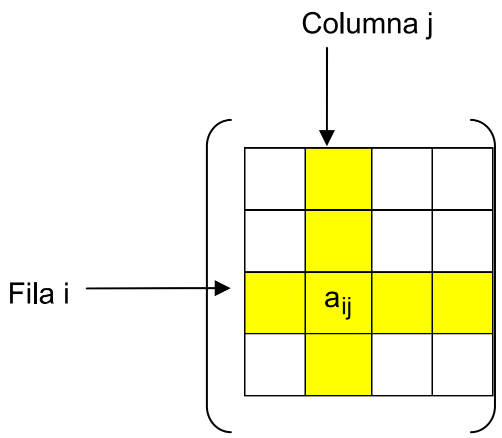
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -6 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & -8 \end{pmatrix}$ es una matriz **2x3** (6 números dispuestos en 2 filas y 3 columnas)

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$ es una matriz **3x3**

$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1/3 & 4 \\ \pi & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz **4X2**

1.2.- ELEMENTOS DE UNA MATRIZ. NOTACIONES

Cada número que forma parte de una matriz es un elemento de esa matriz. Para identificarlos, y así distinguir uno de otro, cada elemento de una matriz se simboliza con la misma letra de la matriz, pero minúscula, seguida de dos subíndices tales que el primero indica la fila que ocupa el elemento y el segundo indica la columna:



Ejemplo

En la matriz $C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ tendremos que:

$c_{11} = 6$ $c_{12} = -3$ $c_{13} = 1$ $c_{21} = 2$ $c_{22} = 1$ $c_{23} = 4$

A menudo tenemos que referirnos a una matriz A de dimensión **mxn** genérica, no a una en particular. Lo haremos de dos formas:

- $A = (a_{ij})_{mxn}$ si no necesitamos escribirla desarrollada
- Si por cualquier circunstancia necesitamos escribirla desarrollada, lo haremos así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada fila de una matriz la simbolizaremos con la misma letra que la matriz seguida de un subíndice que indique el número de fila. Cada columna la simbolizaremos con la misma letra que la matriz seguida de un superíndice que indique el número de la columna. Por ejemplo si

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ es la segunda fila de la matriz B

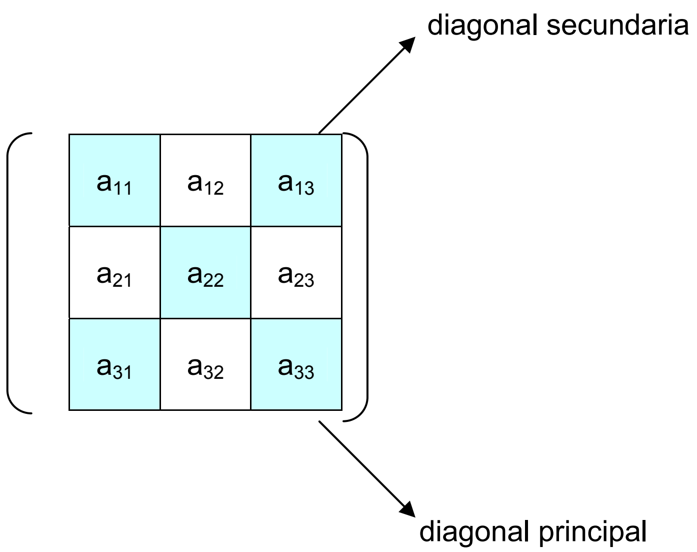
$B^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la tercera columna de la matriz B

1.3.-TIPOS DE MATRICES

Atendiendo al número de filas y columnas las matrices puede ser:

▪**Rectangulares:** Si el número de filas es distinto del número de columnas. Cuando una matriz está formada por una sola fila y varias columnas se dice que es una matriz fila. Si está formada por una columna y varias filas se dice que es una matriz columna

▪**Cuadradas:** si el número de filas es igual al número de columnas. En estas matrices, aparte de sus filas y columnas, también son importantes sus diagonales:



Dentro de las matrices cuadradas, podemos distinguir los siguientes tipos:

- **Matriz triangular:** Si por encima (o por debajo) de la diagonal principal todos los elementos valen 0.

Ejemplo

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** Si los elementos que no están en la diagonal principal son todos cero.

Ejemplo

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Identidad:** es una matriz diagonal cuya diagonal prinipal está constituida por unos. Son matrices importantes en el cálculo matricial. La matriz identidad de orden n (es decir, nxn) se simboliza por $\mathbf{I_n}$. Así

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

- **Matriz simétrica:** Si los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, es decir , si $a_{ij}=a_{ji}$.

Ejemplo

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 .-MATRIZ NULA

Se llama así a una matriz cuyos elementos valen todos 0 .

Ejemplo

$$\overline{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5.-TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz **mxn**, la matriz traspuesta de A es la matriz **nxm** cuyas sucesivas filas son las sucesivas columnas de A. Es decir, para obtener la traspuesta de una matriz se intercambian las filas por las columnas. La traspuesta de una matriz A se simboliza por A^T .

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Si la matriz es simétrica entonces coincide con su traspuesta:

$$S=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 9\end{pmatrix} \Rightarrow \quad S^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 9\end{pmatrix}=S$$

1.6.-IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos homólogos (los que ocupan la misma posición en ambas matrices) son iguales

TEMA 2: OPERACIONES CON MATRICES

2.1.-SUMA DE MATRICES

Supongamos que nos dan la siguiente información:
En un Instituto el número de alumnos repetidores se distribuyen del modo indicado en la siguiente tabla:

	1º ciclo de ESO	2º ciclo de ESO	Bachilerato
Mujeres	15	19	12
Hombres	24	26	17

Y los no repetidores del siguiente:

	1º ciclo de ESO	2º ciclo de ESO	Bachilerato
Mujeres	95	182	146
Hombres	63	101	94

En consecuencia la totalidad del alumnado del Instituto se distribuye del modo siguiente:

	1º ciclo de ESO	2º ciclo de ESO	Bachilerato
Mujeres	110	201	158
Hombres	87	127	111

Si identificamos cada tabla como una matriz tendriamos:

$$R=\begin{pmatrix}15 & 19 & 12\\ 24 & 26 & 17\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}95 & 182 & 146\\ 63 & 101 & 94\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}15+95 & 19+182 & 12+146\\ 24+63 & 26+101 & 17+94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110 & 201 & 158\\ 87 & 127 & 111\end{pmatrix}$$

de modo que T sería la suma de las matrices R y P.

Generalizando lo anterior deducimos como se realiza la suma de dos matrices:

- ✔ ***Condición:*** Para sumar dos matrices han de tener la misma dimensión
- ✔ ***Regla:*** Se suma cada elemento de la 1ª matriz con su homólogo de la 2ª matriz

Ejemplo

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 1/2\\ -6 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1/5 & 7\\ 2 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 21/5 & 15/2\\ -4 & -6\end{pmatrix}$$

Las propiedades de la suma de matrices son:

1)Conmutativa: A+B=B+A

2)Asociativa: (A+B)+C=A+(B+C)

3)Elemento Neutro: Las matrices nulas son neutras para la suma, es decir, si a una matriz A le sumamos la matriz nula obtenemos A:

$$A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 5 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 5 & 5\end{pmatrix}$$

4)Existencia de elementos opuestos: Si se cambia de signo cada electo de una matriz A obtenemos otra matriz , llamada opuesta de A y simbolizada por -A , que sumada con A da la matriz nula: $A+(-A)=\overline{O}$

Ejemplo

Si $A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ entonces su opuesta es $-A=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ -2 & -5\end{pmatrix}$ y como fácilmente se puede comprobar $A+(-A)=\overline{O}$

2.2.-PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

Para multiplicar un número por una matriz se multiplica dicho número por cada elemento de la matriz.

Ejemplo

Si $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 4 & 2/3 & 6\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ entonces $4A=\begin{pmatrix}8 & -4 & 20\\ 16 & 8/3 & 24\\ 0 & 8 & 12\end{pmatrix}$

Las propiedades de esta operación son:

1) pA+qA=(p+q)A siendo p y q números reales y A una matriz (P. ej.: 7A+5A=12A)
2) p(A+B)=pA+pB siendo p un número y Ay B matrices de la misma dimensión (P. ej.: 3(A+B)=3A+3B)
3) p(qA)=(pq)A siendo p y q números reales y A una matriz (P. ej.: 7(5A)=35A)

2.3.-PRODUCTO DE MATRICES

Supongamos que nos dan la siguiente información:

Una fábrica utiliza tres tipos de cereales A, B y C con las propiedades que figuran en la siguiente tabla:

	Cereal A	Cereal B
Grs de **Proteinas** por KG de cereal	4	12
Grs de **Hidratos** por KG de cereal	20	16
Grs de **Grasas** por KG de cereal	3	1

Con estos cereales fabrica 3 productos P, Q y R . Para cada bolsa de estos productos necesita emplear la cantidad de cereales indicados en la siguiente tabla:

	Bolsa de P	Bolsa de Q	Bolsa de R
Kgs de cereal A	5	3	2
Kgs de cereal B	1	3	4

Con los anteriores datos podemos calcular los gramos de Proteinas, Hidratos y Grasas que contiene cada bolsa de cada uno de los productos:

	Bolsa de P		Bolsa de Q		Bolsa de R	
	Aportados por A	Aportados por B	Aportados por A	Aportados por B	Aportados por A	Aportados por B
Grs de **Proteinas**	4·5	12·1	4·3	12·3	4·2	12·4
Grs de **Hidratos**	20·5	16·1	20·3	16·3	20·2	16·4
Grs de **Grasas**	3·5	1·1	3·3	1·3	3·2	1·4

Con lo que obtenemos:

	Bolsa de P	Bolsa de Q	Bolsa de R
Grs de **Proteinas**	4·5+12·1	4·3+12·3	4·2+12·4
Grs de **Hidratos**	20·5+16·1	20·3+16·3	20·2+16·4
Grs de **Grasas**	3·5+1·1	3·3+1·3	3·2+1·4

Si identificamos cada tabla como una matriz tendriamos:

Matriz de valores nutricionales de los cereales: $N=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 20 & 16\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Matriz de composición de las bolsas: $C=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

Matriz de valores nutricionales de las bolsas de productos:

$$B=\begin{pmatrix}4\cdot5+12\cdot1 & 4\cdot3+12\cdot3 & 4\cdot2+12\cdot4\\ 20\cdot5+16\cdot1 & 20\cdot3+16\cdot3 & 20\cdot2+16\cdot4\\ 3\cdot5+1\cdot1 & 3\cdot3+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 48 & 56\\ 116 & 108 & 104\\ 16 & 12 & 10\end{pmatrix}$$

Observemos que para obtener las propiedades alimentarias de las bolsas hemos multiplicado las valores nutricionales de cada cereal por las cantidades de cereales empleados en cada bolsa. Es decir, que en términos de matrices hemos multiplicado P por C dando como resultado B:

$$N\cdot C=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 20 & 16\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot5+12\cdot1 & 4\cdot3+12\cdot3 & 4\cdot2+12\cdot4\\ 20\cdot5+16\cdot1 & 20\cdot3+16\cdot3 & 20\cdot2+16\cdot4\\ 3\cdot5+1\cdot1 & 3\cdot3+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 48 & 56\\ 116 & 108 & 104\\ 16 & 12 & 10\end{pmatrix}=B$$

Observando lo realizado deducimos como se realiza el producto de dos matrices:

✔ ***Condición:*** Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la 1ª ha de ser igual al número de filas de la segunda

$$\underset{m\times \boxed{n}}{A}\cdot\underset{\boxed{n}\times s}{B}$$

✔ ***Regla:***

1) **Dimensión del producto**: La matriz producto tiene tantas filas como el primer factor y tantas columnas como el segundo:

$$\underset{m\times \boxed{n}}{A}\cdot\underset{\boxed{n}\times s}{B}\rightarrow\underset{m\times s}{A\cdot B}$$

2) **Elementos del producto**: El elemento que en la matriz producto ocupa la fila i y la columna j se obtiene multiplicando la fila i del primer factor por la columna j del 2º factor

$$A.B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1s}\\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2s}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & A_iB^j & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}\rightarrow \text{Fila i de AB}$$

Fila i de A: A_i — Columna j de B: B^j — Columna j de AB

¿Cómo se hace el producto de la fila A_i por la columna B^j ?. Como ambas están formadas por n elementos (debido a la condición de que el número de columnas de A ha de ser igual al número de filas de B) se multiplica cada elemento de la fila por el homólogo de la columna y se suman estos productos, es decir:

$$A_iB^j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Así pues, la matriz producto será la siguiente:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & A_1B^3 \cdots\cdots A_1B^S \\ A_2B^1 & A_2B^2 & A_2B^3 \cdots\cdots A_2B^S \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \boldsymbol{A_i}B^1 & \boldsymbol{A_i}B^2 & \boldsymbol{A_i}B^3 \cdots\cdots \boldsymbol{A_i}B^S \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_mB^1 & A_mB^2 & A_mB^3 \cdots\cdots A_mB^S \end{bmatrix}$$

Fila i del producto: **Se obtiene multiplicando la fila i de A por las sucesivas columnas de B**

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+1\cdot3+4\cdot1 & 2\cdot9+1(-6)+4\cdot5 \\ 3\cdot4+5\cdot3+(-2)1 & 3\cdot9+5(-6)+(-2)5 \\ (-1)4+7\cdot3+8\cdot1 & (-1)9+7(-6)+8\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 32 \\ 25 & -13 \\ 25 & -11 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{3} \times \boxed{3} \quad \boxed{3} \times \mathbf{2}$ (=) $\qquad\qquad \mathbf{3 \times 2}$

EJERCICIOS

2.1.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ calcular:

a)3A b)A-2B c)AB d) A^2 (es decir A·A) e) (2A+B)(A-3B) f) AA+4AB-BB

2.2.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ calcular $AB-(2A+3B)^T+BA$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

1) No es conmutativa:
   - Si A es 2x3 y B es 3x5 el producto AB sería 2x5 , pero BA no existe
   - Si A es 2x3 y B es 3x2 entonces AB es 2x2 y BA es 3x3 y por tanto AB≠BA
   - Si AB y BA tienen la misma dimensión tampoco tienen por que ser iguales.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} = AB \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Es asociativo : (AB)C=A(BC)
3) Es distributivo respecto a la suma: (A+B)C=AC+BC y C(A+B)=CA+CB
4) Elemento neutro: Las matrices $\mathbf{I_n}$ son neutras para el producto , es decir, si se puede efectuar el producto de A por una matriz $\mathbf{I_n}$ lo que se otiene es A.
5) Para que el producto de dos matrices de la matriz $\overline{O}$ no hace falta que una de ellas sea $\overline{O}$

EJERCICIOS

2.3.-Siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ comprueba:

a) $AB\neq BA$ (no conmutatividad)
b) A(BC)=(AB)C (asociatividad)
c) BA+BC=B(A+C) (distributiva)
d) $I_2A=A$; $BI_2=B$ (elemento neutro)

2.4.-Siendo A y B las matrices del ejercicio anterior comprueba que con matrices no son ciertas las siguientes igualdades (que sí lo son con números). ¿Cuál es la razón?:

a) $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$
b) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
c) $(AB)^2=A^2B^2$

2.5.- Calcula $\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2 & -4\\ 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}^T$

2.6.- Siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ comprueba que $AB=\overline{O}$

2.7.-Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ¿Cuánto vale $(A-I_2)^2$

2.8.- Siendo $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ calcula C^3 y C^4 ¿Cuánto valdrá C^n?

2.9.-Comprueba con las matrices $A\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ que la traspuesta de un producto es igual al producto de las traspuestas en orden inverso, es decir, que $(AB)^T=B^TA^T$

2.10.-Una familia puede adquirir libretas, lápices y gomas en dos establecimientos X e Y. Los precios de este material en dichos establecimientos son los dados en el siguiente cuadro:

	Libretas	Lápices	Gomas
Establecimiento X	2 €	0.6 €	0.3 €
Establecimiento Y	2.5 €	0.4 €	0.2 €

Las necesidades de material se recogen en el cuadro siguiente:

	Libretas	Lápices	Gomas
Hijo 1	8	3	2
Hijo 2	4	4	3

Mediante cálculo matricial determinar cuanto cuesta equipar a cada hijo en cada uno de los establecimientos

2.11.- Si $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ ¿Cuánto valen a,b,c y d?

2.12.-Si $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ hallar una matriz X tal que 2X-3A=4B

2.13.- Determinar que matrices A y B cumplen $\left.\begin{array}{l} 3A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

2.14.-¿Cuánto han de valer x e y para que $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & -1 \end{pmatrix}$

2.15.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $2A-A^2=I_3$

2.16.-¿Cómo son las matrices H que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, que AH=HA?

2.17.-¿Para que valores de k se cumple que $M^2 - \frac{5}{2}M + I_2 = \overline{O}$ siendo $M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

TEMA 3: LA MATRIZ INVERSA

3.1.-DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN 2 (DETERMINANTE DE ORDEN 2)

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Se llama determinante de A al siguiente número:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=4\cdot 6-(-3)\cdot 5=39$$

3.2.-DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN 3 (DETERMINANTE DE ORDEN 3)

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Definimos:

A)Menor complementario del elemento a_{ij}

Es el determinante de la matriz de orden 2 que resulta al eliminar la fila **i** y la columna **j** en que está el elemento $\mathbf{a_{ij}}$. Se simboliza por $\mathbf{D_{ij}}$

Ejemplo

En la siguiente matriz el menor complementario del elemento a_{21} será:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow D_{21}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-5\cdot 9=-33$$

B)Adjunto del elemento a_{ij}

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{ij}}$, simbolizado por $\mathbf{A_{ij}}$, es:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$$

Puesto que $(-1)^{i+j}$ es un + ó un - , resulta que el adjunto es el menor complementario o su opuesto ,dependiendo de la posición del elemento. En el siguiente esquema figuran los signos que se han de anteponer a los menores para obtener los adjuntos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-12 \quad ; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=-(3\cdot 6-1\cdot 2)=-16$$

NOTA: Estas definiciones también son válidas para las matrices de orden 2. Así por ejemplo en:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow D_{11}=9; D_{12}=7; D_{21}=2; D_{22}=6$$

Los signos para obtener los adjuntos son este caso : $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$

Y por ello los adjuntos serán : $A_{11}=9; A_{12}=-7; A_{21}=-2; A_{22}=6$

Una vez definidos estos conceptos, estamos en condiciones de definir el determinante de orden 3 de la siguiente manera:

C) Determinante de orden 3

Un determinante de orden 3 es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila cualquiera (o de una columna cualquiera) por sus adjuntos.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\right) + 1\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{(desarrollo por la 1ª fila)} = -82$$

$$= 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\right) + 7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 8\left(-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\right) \text{(desarrollo por la 2ª columna)} = -82$$

NOTA: Para simplificar los cálculos elegiremos la fila o columna que contenga más ceros

Aplicando lo anterior a un determinante genérico de orden 3 resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Como observamos se obtienen 6 productos de 3 elementos (3 que suman y 3 que restan) . Una regla para recordar cuales son estos 6 productos es la llamada **Regla de Sarrus** :

Productos que suman

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Productos que restan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Así, aplicando esta regla, el anterior determinante que obtuvimos desarrollando por una línea lo podemos calcular del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -7 \\ 3 & -9 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 8 + (-5)(-7)\cdot 3 + 4(-9)\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 3 - (-5)\cdot 4\cdot 8 - (-7)(-9)\cdot 2 =$$

$$= 96 + 105 - 36 - 18 + 160 - 126 = 177$$

EJERCICIOS

3.1.- Calcula: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

3.2.- Resuelve las ecuaciones: $\begin{vmatrix} m & 2 \\ 8 & m \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

3.3.-MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Sea A una matriz cuadrada. La inversa de A es, si existe, la matriz (que simbolizamos por A^{-1}) que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Tenemos por tanto dos cuestiones planteadas:

A)¿Qué matrices tienen matriz inversa?

Sólo tiene inversa las matrices cuyo determinante es distinto de cero.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-3) \cdot 5 = 29 \neq 0$, A tiene inversa

B)¿Cómo se calcula la inversa cuando existe?

Hay dos procedimientos:

B1) Por adjuntos

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^T}$$

siendo **adjA** la matriz adjunta, es decir, la matriz que resulta al sustituir en A cada elemento por su adjunto.

Ejemplo :

Por ejemplo: Sea $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. Se tiene que

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2\left(-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = -10$$

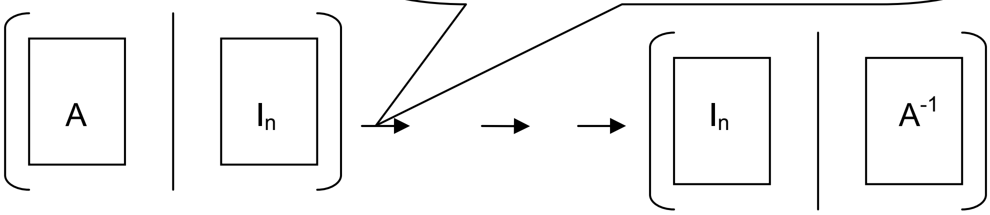
$$\text{adjA} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(\text{adjA})^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto}: A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adjA})^T = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0.4 & -0.2 & 0.1 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

B2) Método de Gauss

Transformaciones de Gauss:
a)Multiplicar (o dividir) una fila por un número distinto de 0
b)Sumar (o restar) a un múltiplo de una fila un múltiplo de otra



Ejemplo

$$\text{Sea } A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 7 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{F_1/3}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 7/3 & 1/3 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[F_2-2F_1]{}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 7/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/3 & -2/3 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3F_2]{}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 7/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right]\xrightarrow{F_1-(7/3)F_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 5 & -7\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right]$$

$$\text{Por tanto } A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

3.3..-¿Para que valores de K tiene inversa la matriz

a) $A=\begin{pmatrix}3 & k\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}k & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 9 & 0 & k\end{pmatrix}$

3.4.-ECUACIONES MATRICIALES

Son ecuaciones en las que la incógnita y los coeficientes son matrices. Se resuelven por el mismo procedimiento que las ecuaciones numéricas pero teniendo siempre en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo (y por tanto en ningún caso se puede alterar el orden de los factores)

Como en las ecuaciones numéricas dejaremos en un miembro los términos que contienen la X y en el otro los que no la contienen. Después de operar la expresión adquirirá una de las tres formas siguientes:

1) $AX=H \Rightarrow \mathbf{A^{-1}}AX=\mathbf{A^{-1}}H \Rightarrow I_nX=A^{-1}H \Rightarrow X=A^{-1}H$
2) $XA=H \Rightarrow XA\,\mathbf{A^{-1}}=H\mathbf{A^{-1}} \Rightarrow XI_n=H\mathbf{A^{-1}} \Rightarrow X=HA^{-1}$
3) $AXB=H \Rightarrow \mathbf{A^{-1}}AXB\mathbf{B^{-1}}=\mathbf{A^{-1}}H\mathbf{B^{-1}} \Rightarrow I_nXI_m=A^{-1}HB^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}HB^{-1}$

3.4.- Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

3.4.1.- XA=B siendo $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5&-2\\3&-8\end{pmatrix}$

3.4.2.- AX+B=C siendo $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\-2&0&4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&1&4\end{pmatrix}$

3.4.3.- XA-B=C siendo $A=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\\3&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\\0&2\end{pmatrix}$

3.4.4.- AX+B=CX siendo $A=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&1\\2&5\end{pmatrix}$

3.4.5.- AX+B=X siendo $A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&4&1\end{pmatrix}$

3.4.6.- XA-2B=3X siendo $A=\begin{pmatrix}4&1\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\2&1\end{pmatrix}$

3.4.7.- AXB=C siendo $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

3.4.8.- ABX=C siendo $A=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

3.4.9.- AX-A=I_3-AX siendo $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$

TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES

4.1.-ECUACIÓN LINEAL

Se llama ecuación lineal con **n** incógnitas $\mathbf{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n}$ a una expresión de la forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots\cdots+a_nx_n = b \qquad \textit{(ec. I)}$$

donde $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$ son números que se llaman coeficientes de las incógnitas y **b** también es un número que se llama término independiente.

Ejemplo

$2x_1-5x_2+x_3+\frac{1}{2}x_4=8$ es una ecuación linal con 4 incógnitas en la que los coeficientes de x_1, x_2, x_3, x_4 son 2, -5, 1 y ½ respectivamente . El término independiente es 8

NOTA: Cuando hay menos de 4 incógnitas es usual designarlas con las letras x , y, z

Una solución de la *(ec. I)* son **n** números $\mathbf{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n}$ (uno por cada incógnita) que al sustituirlos en la ecuación por las correspondientes incógnitas cumplen la igualdad, es decir, tales que:

$$a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+\cdots\cdots+a_ns_n = b$$

Ejemplo

x=2 , y=4 , z=-2 es una solución de la ecuación x+y-2z=10 pues 2+4-2(-2)=10

4.2.-SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Se llama sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas a un conjunto de expresiones de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} (1^a\,\text{ec}) & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ (2^a\,\text{ec}) & a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m^a\,\text{ec}) & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \quad \textit{(sist I)}$$

en donde las $\mathbf{a_{ij}}$ son números reales llamados coeficientes de las incógnitas : $\mathbf{a_{ij}}$ es el coeficiente de x_j en la iª ecuación. Los $\mathbf{b_i}$ son también números reales llamados términos independientes : $\mathbf{b_i}$ es el término independiente de la iª ecuación.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+5z=7 \\ x \qquad -8z=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$ es un sistema de 2 ecuaciones con tres incógnitas x, y, z. En él se tiene que $a_{11}=2$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=5$, $b_1=7$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ (pues si una incógnita no aparece es que tiene coeficiente nulo) $a_{23}=-8$, $b_2=1/2$

Una solución del ***(sist I)*** son **n** números $\mathbf{s_1,s_2,\ldots,s_n}$ (uno por cada incógnita) que sustituidos por las correspondientes incógnitas cumplen todas las igualdades.

Ejemplo

x=1 y=2 es una solución del sistema $\left.\begin{matrix} 2x+y=4 \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\}$ puesto que $\left.\begin{matrix} 2\cdot 1+2=4 \\ 1-2=-1 \end{matrix}\right\}$

4.3.-CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Atendiendo al número de soluciones un sistema puede ser:

INCOMPATIBLE: No tiene solución . Por ejemplo

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=5 \\ 2x+2y+2z=5 \end{matrix}\right\}$$

COMPATIBLE : Tiene solución

- **DETERMINADO:** Una única solución

  Por ejemplo: $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\}$ Sol: x=2 , y=1 unica

- **INDETERMINADO:** Más de una solución (infinitas)

  Por ejemplo: $\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{matrix}\right\}$ Sol: x=0,y=5 ;

  x=1,y=4;…

4.4.-EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA

Asociadas al ***(sist I)*** hay tres matrices:

a) Matriz de coeficientes: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$

b) Matriz de términos independientes $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$

c) Matriz de incógnitas $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$

De forma que el sistema se puede escribir en forma matricial como AX=B

Ejemplo

Sea el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z=8 \\ x+7y-4z=9 \end{array}\right\}$

Se tiene que $AX=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3y+5z \\ x+7y-4z \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Y por tanto $AX=B \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z=8 \\ x+7y-4z=9 \end{array}\right\}$

4.5.-SISTEMAS EQIVALENTES

Dos sistemas se dice que son equivalentes cuando toda solución de uno es también solución del otro, es decir, cuando tienen exactamente las mismas soluciones.

Si en un sistema sometemos sus ecuaciones a una o varias de las siguientes transformaciones, llamadas transformaciones de Gauss, resulta un sistema equivalente:

G1) Multiplicar (o dividir) una ecuación por un número distinto de 0

G2) Sumar (o restar) a un múltiplo de una ecuación un múltiplo de otra

4.6.-RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA: MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss consiste en someter el sistema a una o varias transformaciones de Gauss hasta conseguir un sistema equivalente (por tanto con las mismas soluciones) en el que se haya eliminado la 1ª incógnita a partir de la 1ª ecuación, la 2ª incógnita a partir de la 2ª ecuación, la 3ª incógnita a partir de la 3ª ecuación y así sucesivamente.

Al aplicar este método se nos pueden presentar tres casos que veremos con tres ejemplos:

Ejemplo 1

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x-5y+3z=2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{2E_2-E_1} \\ \xrightarrow{2E_3-3E_2} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ 7y-3z=-1 \\ -7y+3z=-5 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3+E_2} \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ 7y-3z=-1 \\ 0=-6 \end{array}\right\} \text{imposible} \quad \Rightarrow \text{S.I.}$$

Ejemplo 2

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ x+8y=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{2E_2-E1} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ 13y=-7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 2x+3(-7/13)=5 \to x=46/13 \\ \to y=-7/13 \end{array} \Rightarrow \text{SCD}$$

Ejemplo 3

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ x-4y+10z=5 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2-2E_1} \\ \xrightarrow{E_3-E_1} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-y+3z=2 \\ 3y-7z=-3 \\ -3y+7z=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3+E_2} \left.\begin{array}{r} x-y+3z=2 \\ 3y-7z=-3 \\ 0=0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=2 \\ 3y-7z=-3 \end{array}\right\} \to \quad y=\frac{7}{3}z-1 \ \uparrow \quad \left.\begin{array}{r} x-(\frac{7}{3}z-1)+3z=2 \\ \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} x=\frac{-2}{3}z+1 \\ y=\frac{7}{3}z-1 \end{array}$$

(Si damos valores a z vamos obteniendo soluciones. Pej.: z=0→ x=1, y=-1) ⇒ S.C.I.

Observando los anteriores ejemplos, podemos concluir los siguiente:

Después de aplicar el método de Gaus observamos la última ecuación, pudiendo suceder:

1) Que todos los coeficientes de las incógnitas sean nulos (es decir, queda 0 en el primer miembro) pero el término independientes es distinto de cero. Se trata de un sistema incompatible
2) Que alguna incógnita tenga coeficiente no nulo. Entonces caben dos posibilidades:
   2.1) Que el nº de ecuaciones sea igual al nº de incógnitas. Se trata de un sistema compatible determinado
   2.2) Que el nº de ecuaciones sea distitnto del nº de incógnitas. Se trata de un sistema compatible indeterminado

EJERCICIOS :

4.1.-Aplicar el método de Gauss a los siguientes sistemas:

4.1.1) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \\ 5x+8y=18 \end{array}\right\}$

4.1.2) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ x-2y+3z=1 \\ x-7y+8z=1 \end{array}\right\}$

4.1.3) $\left.\begin{array}{r} x+5y+3z=28 \\ 3x-2y\quad\quad=-5 \\ 3x+y+2z=14 \end{array}\right\}$

4.1.4) $\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=2 \\ 4x+3y+3z=5 \end{array}\right\}$

4.1.5) $\left.\begin{array}{r} 4x-2y+4z=7 \\ x-2y+z=-1 \\ 2x-y+2z=6 \end{array}\right\}$

4.2.- Aplicar el método de Gauss a los siguientes sistemas:

4.2.1) $\left.\begin{array}{r} 3x-y\quad\quad=0 \\ -x-2y+z=0 \\ 5x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$

4.2.2) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+2z=14 \\ x+2y+z=16 \\ 2x\quad\quad+z=1 \\ x+y-z=-4 \end{array}\right\}$

4.2.3) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=5 \\ 2x-y\quad-t=2 \\ 3y+z+t=5 \\ x\quad\quad\quad+2t=4 \end{array}\right\}$

4.2.4) $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=0 \\ 3x-y-z=0 \\ -x-y+5z=0 \end{array}\right\}$

4.2.5) $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=2 \\ 2x-y-z=-1 \\ 3x+y-4z=1 \\ x-5y+4z=-5 \end{array}\right\}$

4.3.- Discutir (es decir, determinar el tipo de sistema) según los valores de k los siguientes sistemas. Y resolverlos cuando sean compatibles.

4.3.1) $\left.\begin{array}{r} x+ky=k+1 \\ kx+y=2k \end{array}\right\}$

4.3.2) $\left.\begin{array}{r} x-y\quad\quad=0 \\ 3x+y+kz=0 \\ kx\quad\quad+4z=0 \end{array}\right\}$

4.3.3) $\left.\begin{array}{r} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \\ 3x+ky=6 \end{array}\right\}$

4.3.4) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -2x+y+z=3 \\ -5x+5y+2z=k-3 \end{array}\right\}$

4.3.5) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=3 \\ -x+2y=1 \\ 3x+4y=2k-1 \end{array}\right\}$

4.3.6) $\left.\begin{array}{r} x\quad\quad+3z=3 \\ 3x+y+2z=1 \\ 5x+2y+z=k \\ -2x-y+z=2 \end{array}\right\}$

4.4 .- Un individuo invirtió 6.000.000 ptas en tres empresas y obtuvo un beneficio de 450.000 ptas.Calcular la inversión realizada en cada empresa, sabiendo que en la empresa A hizo el doble de inversión que en la B y C juntas y que los beneficios de las empresas fueron del 5% en A , del 10% en B y del 20% en C.

4.5 .- Una empresa tiene tres minas con menas de composiciones:

Mina	NÍquel(%)	cobre(%)	Hierro(%
A	1	2	3
B	2	5	7
C	1	3	1

¿Cuantas toneladas de cada mena deben utilizarse para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro?

4.6 .- Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta. Cada animal recibe 10 gr. de proteinas y 3 gr. de grasas. Se dispone de dos tipos de alimentos: el tipo A con el 5% de proteinas y el 3% de grasas y el tipo B con el 10% de proteinas y el 1% de grasas
¿Cuantos gr. de cada alimento se pueden utilizar para obtener la dieta correcta de un único animal?

4 7.- Una refinería compra petróleo a dos paises A y B.Comprando 5000 barriles al pais A y 15000 al pais B resulta un precio medio de 19 dólares el barril. Comprando 1000 barriles al pais A y 1000 al pais B el precio medio es de 18 dólares el barril.¿Cuanto cuesta el barril de crudo de cada pais?

4.8 .- Juan y Pedro invierten 2000000 ptas cada uno. Juan coloca una cantidad A al 4% , una cantidad B al 5% y el resto al 6% .Pedro invierte la misma cantidad A al 5% , la B al 6% y el resto al 4%. Determinar la cantidad B sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 105000 ptas y Pedro de 95000 ptas.

4.9.- El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 50000 ptas (sin impuestos) .El valor del vino es de 6000 ptas menos que el de los refrescos y la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos debe pagar un IVA del 6% , por la cerveza del 12% y por el vino del 30% el importe total de la factura (con impuestos) asciende a 59.240 ptas. Calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

4.10.-Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 638400 ptas.El original costaba 1200 ptas. pero también han vendido copias , presuntamente defectuosas , con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias vendidas fué la mitad del de originales, calcular a cuantas copias se les aplicó el 40% de descuento.

4.11.-En las fiestas de un determinado lugar había tres espectáculos A,B y C. Un chico fué dos veces a A, una vez a B y una vez a C y gastó 1400 ptas; otro asistió tres veces a A y una vez a B y gastó 1800 ptas, y un tercero entró una vez en cada espectáculo y gastó 900 ptas. ¿Cuánto valía la entrada a cada uno de ellos?

4.12.-Una agencia contrata con un cliente 50 viajes a Málaga y 80 a Barcelona por 33050€ pero accede a realizar un descuento por pronto pago del 20% en los viajes a Málaga y un 10% en los viajes a Barcelona, con lo que sus ingresos fueron de 28120€ ¿Cuál era el precio de cada viaje?

4.13.-Entre Octubre y Noviembre una agencia despachó 50 billetes de avión a Madrid con un precio medio de 58.8€. Si en Octubre el precio medio fue de 54€ y en Noviembre de 64€ ¿Cuántos billetes despachó cada mes

4.14.-En una tienda por comprar 2 chaquetas y una blusa nos cobran 200€. Si volvemos a la tienda y compramos una chaqueta , un pantalón y devolvemos la blusa nos cobran 100€. Si hacemos una tercera visita a la tienda y compramos 5 chaquetas, un pantalón y una blusa ¿Cuánto nos cobrarían?

4.15.-UN videoclub está especializado en películas de 3 tipos: infantiles, oeste y terror. Se sabe el 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de la películas. También que hay 100 películas más del oeste que de infantiles y que el 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más el 60% de las de terror representan la mitad del total de películas. ¿De cuantas películas dispone el videoclub?

TEMA 5: SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

5.1.-DESIGUALDADES

Cuando dos expresiones se relacionan mediante uno de los símbolos $<$, $\le$, $>$, $\ge$ se obtiene una desigualdad.

Las desigualdades tiene las siguientes propiedades (las relacionamos en el caso del tipo $<$):

1) $\mathbf{a < b \Rightarrow a + c < b + c}$

Esta propiedad es la que permite trasponer términos:

$\mathbf{x+a<m} \Rightarrow x+a+(-a)<m-a \Rightarrow \mathbf{x<m-a}$

2) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{a<p}\\ \mathbf{b<q}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{a+b<p+q}$

3) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{a<b}\\ \mathbf{k>0}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{ka<kb}$

4) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{a<b}\\ \mathbf{k<0}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{ka>kb}$. *¡ Al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad **cambia** de sentido!*

Cuando cambiamos de signo los dos miembros de una desigualdad, los estamos multiplicando por -1 y en consecuencia la desigualdad cambiará de sentido.

$\mathbf{a < b \Rightarrow -a > -b}$

5.2.-INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Se llama inecuación lineal con 2 incógnitas **x** e **y** a cualquiera de las expresiones siguientes:

$ax+by<c \qquad ax+by\le c \qquad ax+by>c \qquad ax+by\ge c$

donde a, b , c son números reales conocidos.

Se llama solución de una inecuación de este tipo a cualquier par de números $\mathbf{s_1}$ y $\mathbf{s_2}$ que al sustituirlos por las incógnitas cumplen la desigualdad.

Ejemplo

$2x - 5y < 6$ es una inecuación lineal con 2 incógnitas. Una de sus soluciones es $x=1$, $y=4$ puesto que $2\cdot1-5\cdot4<6$.

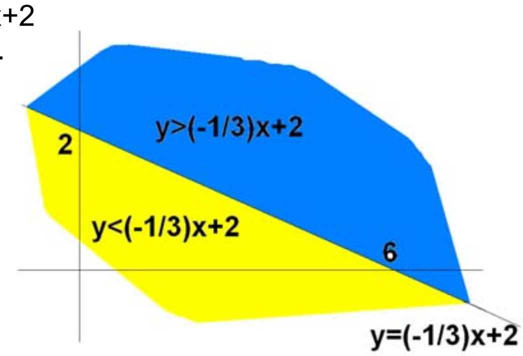
Veamos como se resuelve una inecuación de este tipo:

Ejemplo

Sea $x + 3y > 6$.

1) Despejamos la y : $3y>-x+6 \Rightarrow y > (-1/3)x+2$
2) Tomamos la igualdad $y = (-1/3)x+2$.
Se trata de la ecuación de una recta
3) Dibujamos esta recta

x	0	6
y	2	0



Dicha recta divide al plano en dos semiplanos: en el superior es y>(-1/3)x+2 y en el inferior es y<(-1/3)x+2.

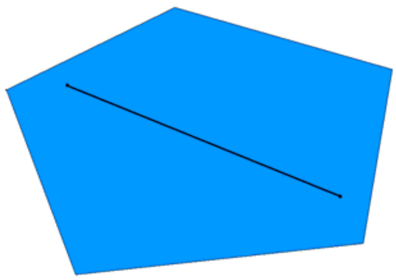
4) Elegimos el semiplano que se corresponde con la desigualdad obtenida en el punto 1 . En nuestro ejemplo elegiremos el superior que es el que corresponde a y>(-1/3)x+2 .

5.3.-SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

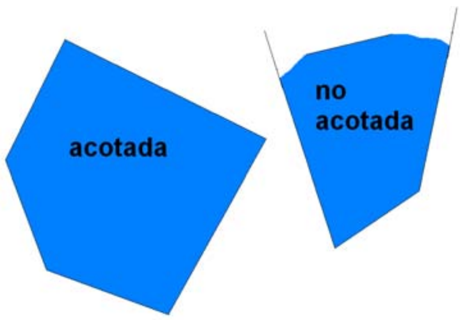
Varias inecuaciones lineales con 2 incógnitas constituyen un sistema de inecuaciones. Una solución del sistema serán 2 números s_1 y s_2 que sustituidos por las incógnitas cumplan todas las desigualdades.

Para resolver un sistema de inecuaciones representamos cada uno de los semiplanos solución de cada inecuación y después hallaremos la intersección de todos ellos. Obtendremos como solución una región del plano delimitado por segmentos y/o semirrectas. Esta región:

a) Es convexa, es decir, que al unir dos puntos cualquiera de ella mediante un segmento, éste queda contenido en la región

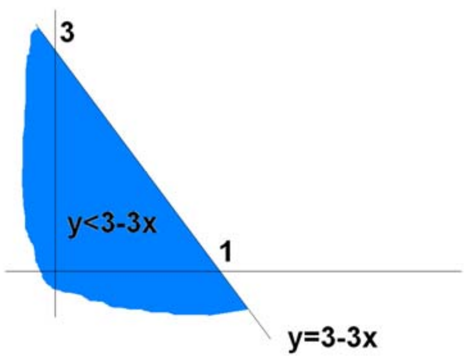


b) Puede ser acotada o no



Ejemplo

$$\text{Resolver } \left.\begin{array}{r} 3x+y\le 3 \\ 2x+3y\ge 2 \\ x-2y\le -6 \end{array}\right\}$$



a) resolvemos cada inecuación:

1ª inecuación: 3x+y≤3 ⇒ y≤3-3x

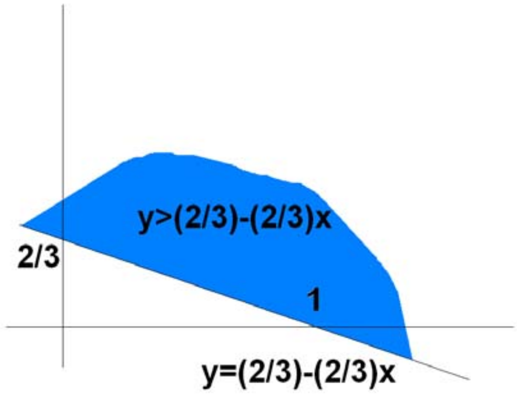
y=3-3x

x	0	1
y	3	0

2^a inecuación : $2x+3y \geq 2 \Rightarrow y \geq (2/3)-(2/3)x$

y=(2/3)1-(2/3)x

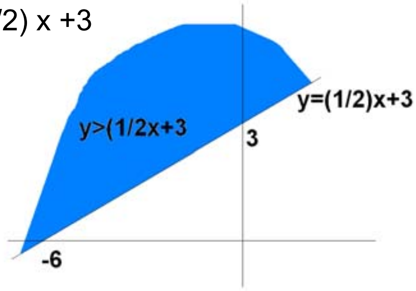
x	0	1
y	2/3	0



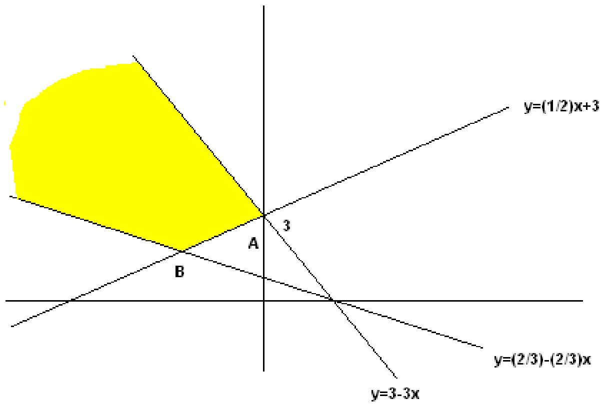
3^a inecuación: $x-2y \leq -6 \Rightarrow -2y \leq -6-x \Rightarrow y \geq (1/2)x+3$

y = (1/2)x+3

x	0	-6
y	3	0



c) Hacemos la intersección de los 3 semiplanos anteriores:



Esta región tiene dos vértices:

A(0,3) ; $\left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x+3 \\ y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x+3=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x \Rightarrow 7x=-14 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(-2,2)$

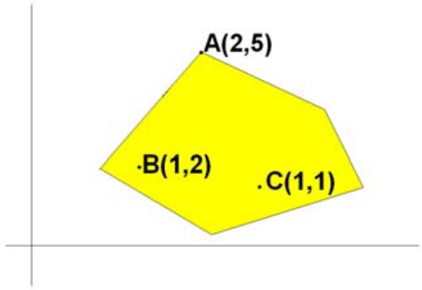
5.4.-FUNCIÓN LINEAL DE DOS VARIABLES

Se dice que Z es una función lineal de dos variables x e y si Z= ax + by siendo a y b dos números reales.

Ejemplo

Z= 2x-3y

Consideremos ahora una región del plano , por ejemplo la siguiente:



En cada punto de esta región Z toma un valor determinado:

En A(2,5)→ Z_A =2·2-3·5=-11
En B(1,2)→ Z_B =2·1-3·2=-4
En C(1,1)→ Z_C =2·1-3·1=-1

Se nos plantea la siguiente cuestión ¿Hay un punto de esa región en el que Z toma un valor mayor que en los demás puntos de esa región? ¿Qué punto es? . Y también :¿Hay un punto de esa región en el que Z toma un valor menor que en los demás puntos de esa región? ¿Qué punto es?
La respuesta a estas preguntas es una de las propiedades fundamentales de las funciones lineales. Es la siguiente:

A) Sobre una región convexa y acotada toda función lineal alcanza un valor máximo y un valor mínimo, y además estos valores los alcanza en vértices de la región
B) Sobre una región convexa no acotada una función lineal alcanza un valor máximo o uno mínimo, pero no ambos, y lo alcanza en un vértice de la región. Pero también puede suceder que no alcance ni el máximo ni el mínimo

5.5.-FORMULACIÓN GENERAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES

Un problema de este tipo es aquel que responde al siguiente planteamiento:
"*De todas las soluciones (s_1,s_2) de un sistema de inecuaciones de la forma:*

$$\left.\begin{array}{c} a_1x+b_1y\le c_1 \\ a_2x+b_2y\le c_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_mx+b_my\le c_m \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

se trata de hallar aquella que optimice (es decir, que haga máximo o mínimo según el caso) el valor de una función lineal

Z= ax + by

Las inecuaciones (I) anteriores se llaman **restricciones del programa** (las restricciones x≥0 , y≥0 implican que gráficamente solo consideramos el primer cudrante)
La función lineal Z que deseamos optimizar se llama **función objetivo**
Cada solución del sistema (I) se llama **solución factible**
El conjunto de todas las soluciones factibles se llama **región factible** (como sabemos es una región poligonal convexa).
La solución factible que optimiza la función objetivo se llama **solución óptima**

5.6.-RESOLUCIÓN DE UN PROGRAMA LINEAL

Para resolver un problema de programación lineal daremos los siguientes pasos:

1) Se plantea el programa identificando:
   - las variables
   - la función objetivo
   - las restricciones
2) Se resuelve el sistema de inecuaciones constituido por las restricciones. La solución es la región factible
3) Se hallan los vértices de la región factible
4) Pueden darse dos casos:
   a)Región factible acotada. En este caso sabemos que la función objetivo Z alcanza un máximo y un mínimo en los vértices. Por tanto para obtener la solución óptima calculamos los valores que toma Z en cada vértice y elegimos el máximo o el mínimo según el caso
   b)Región factible no acotada. Primero determinamos si el problema tiene solución. En caso de que la tenga procedemos como en el caso anterior.

Ejemplo

Una carpintería fabrica mesas con dos tipos de acabado:

-Acabado normal que precisa 1 hora de lijado y 1 hora de barnizado

-Acabado extra que precisa 1 hora de lijado y 3 de barnizado

La carpintería , semanalmente, no puede disponer de más de 100 horas de lijado ni de más de 210 de barnizado.

Cada mesa de acabado normal la vende por 30€ y cada una de acabado extra por 500€.

¿Cuántas mesas de cada tipo producirá semanalmente para que sus ingresos por venta de mesas sean máximos?

1) Identificamos:

-variables : x= nº de mesas de acabado normal

y= nº demesas de acabado extra

-Función objetivo : ingresos Z= 300x+500y

-Restricciones: horas de lijado $\leq$ 100$\Rightarrow$ x+y$\leq$100

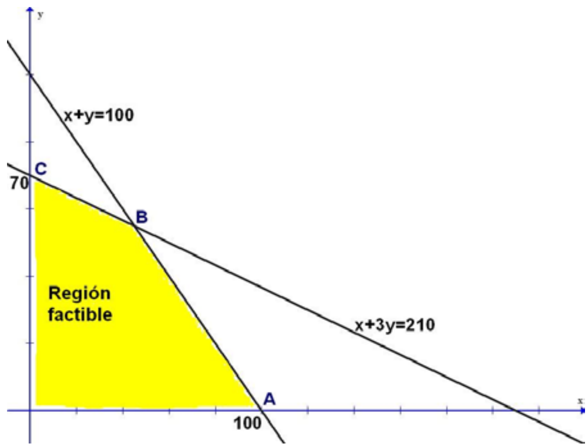
horas de barnizado $\leq$ 210 $\Rightarrow$ x+3y$\leq$210

En consecuencia, el problema se formula así:

Maximizar Z=300x+500y

$$\text{Sujeta a: } \left.\begin{array}{r} x+y\leq 100 \\ x+3y\leq 210 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

2) Resolvemos el sistema anterior



3) Calculamos los vértices de la región factible:

$O(0,0) \quad A(100,0) \quad C(0,70)$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=100 \\ x+3y=210 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2-E_1} \left.\begin{array}{r} x+55=100 \Rightarrow x=45 \\ 2y=110 \Rightarrow y=55 \uparrow \end{array}\right\} \Rightarrow B(45,55)$$

4) Como la región factible es acotada Z alcanza el máximo en un vértice.
Evaluamos Z en los vértices:

En O(0,0) $\rightarrow$ Z= 300·0+500·0= 0
En A(100,0)$\rightarrow$ Z=300·100+500·0= 30000
En B(45,55) $\rightarrow$ Z=300·45+500·55= 41000 **Máximo**
En C(0,70) $\rightarrow$ Z=300·0+500·70= 35000

Por tanto la solución òptima es (45,55) , es decir, para maximizar los ingresos la carpintería fabricará semanalmente 45 mesas de acabado normal y 55 de acabado extra.

EJERCICIOS

5.1.-Una empresa constructora dispone de dos tipos de camiones A y B y quiere transportar 100Tm de material al lugar de una obra. Sabiendo que dispone de 6 camiones del tipo A con una capacidad de 15 Tm y con un costo de 4000 pts por viaje y de 10 camiones del tipo B con una capacidad de 5 Tm y con un costo de 3000 pts. por viaje. ¿Cuántos camiones de cada tipo debe usar para que el coste sea mínimo?¿Cuál es dicho coste?

5.2.- Una empresa de transportes dispone de 6 autobuses de 60 plazas y 10 microbuses de 20. Suponiendo que se necesita desplazar a 400 pasajeros, ¿Cuántos coches de cada tipo que se deben usar para que el coste sea mí-nimo sabiendo que el precio de los autobuses es de 120 pts por km y de los microbuses de 60?

5.3.-Una compañia fabrica y vende dos modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 min para el modelo A y de 30 para el B.; y un trabajo de máquina de 20 min para el A y 10 para el B.Se dispone al mes de 100 horas de trabajo manual y para la máquina de 80.Si el beneficio por unidad es de 150€ para el modelo A y 100€ para el B, planificar la producción para obtener el máximo beneficio

5.4.-En una situación de catástrofe, producida por inundaciones, el gobierno de un pais tiene que evacuar 1000 personas de una cierta zona, con un equipaje total de 150 toneladas. Una compañía de aviación oferta aviones de dos tipos A y B, al precio de 20 millones el A y 60 millones el B.

El avión tipo A puede transportar 100 pasajeros y 25 toneladas de equipaje, mientras que el B puede transportar 200 pasajeros y 15 toneladas de equipaje.

Si hay disponibles 6 aviones tipo A y 8 aviones tipo B, ¿cómo habría que organizar el transporte para gastar lo menos posible?.

5.5.-Un empresario fabrica dos productos A y B, que luego vende con 4.500 pesetas de beneficio el producto A y con 6.000 pesetas de beneficio el producto B.

Su maquinaria le condiciona la producción de forma que, diariamente, no puede hacer más de 400 productos A, ni más de 300 productos B. ni más de 500 en total.

Suponiendo que vende toda la producción, ¿cuántos productos de cada clase debería fabricar para obtener el mayor beneficio posible?.

5.6.-Una distribuidora debe enviar 400 disquetes a una tienda de la forma mas económica posible. Para el embalaje dispone de 8 cajas en las que caben 40 disquetes y de 10 en las que entran 50, pero el envío ha de realizarse, a lo sumo, en 9 cajas. Sabiendo que los portes de las cajas de 50 y 40 son, respectivamente, de 800 ptas y 600 ptas, calcular cuantas cajas de cada tipo se utilizarán y el importe del envío.

5.7.-Una fábrica de muebles fabrica sillas de dos tipos. para fabricar una silla del primer tipo, que se vende a 80€ pts se gastan dos metros de tablas de sección estándar, 0,5 m^2 de tela de tapicería y dos horas de trabajo. Las sillas del 2º tipo se venden a 120€ pts y en su elaboración se utilizan 4m de tablas, 0,25 de tela y 2,5 horas de trabajo.

En la fábrica se dispone de 440 m de tablas, 65 m^2 de tela tapicería y de 320 horas de trabajo. ¿Qué tipo de sillas y qué cantidad se debe fabricar para tener unos ingresos máximos?

5.8.-En una farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para tomar una mezcla de ambos en la comida para conseguir adelgazar y con las siguientes recomendaciones:

-No debe tomar mas de 150 gr. de la mezcla ni menos de 50 gr.

-Debe tomar siempre más cantidad o igual de A que de B

-No debe incluir más de 100 gr. de A.

Se sabe que 1 gr. de A contiene 0´30 mg. de vitaminas y 4´50 calorías y que 1 gr. de B contiene 0´20 mg. de vitaminas y 1´50 calorías. ¿Cuántos gr. debe tomar de cada compuesto para obtener el preparado mas rico en vitaminas? ¿Y si quiere obtener el más pobre en calorías?

5.9.- En unos grandes almacenes ofrecen el lote A formado por 3 pantalones y 1 camisa al precio de 150€ pts y el lote B que consta de un pantalón y 3 camisas por 100€. ¿Cuántos lotes de cada tipo he de comprar si necesito, al menos, 13 camisas y 15 pantalones haciendo el menor gasto?

5.10.- Un comerciante tiene 10000€ ptas para comprar dos tipos de televisores A y B, pudiendo almacenar 80 como máximo. Los de tipo a cuestan 250€ pts y los vende a 320€ y los de tipo B le cuestan a 100€ y los vende a 160€. ¿Cuántos debe comprar de cada clase para maximizar el beneficio?

5.11.-Un taller pirotécnico fabrica cohetes sencillos que luego vende a 2.7€ el paquete de 10 y cohetes de colores que vende a 3.6€ el paquete también de 10. Por problemas de mecanización no puede fabricar al día más de 400 cohetes sencillos ni más de 300 de colores, ni más de 500 en total. ¿Cuántos cohetes de cada clase ha de fabricar diariamente para maximizar sus ingresos?