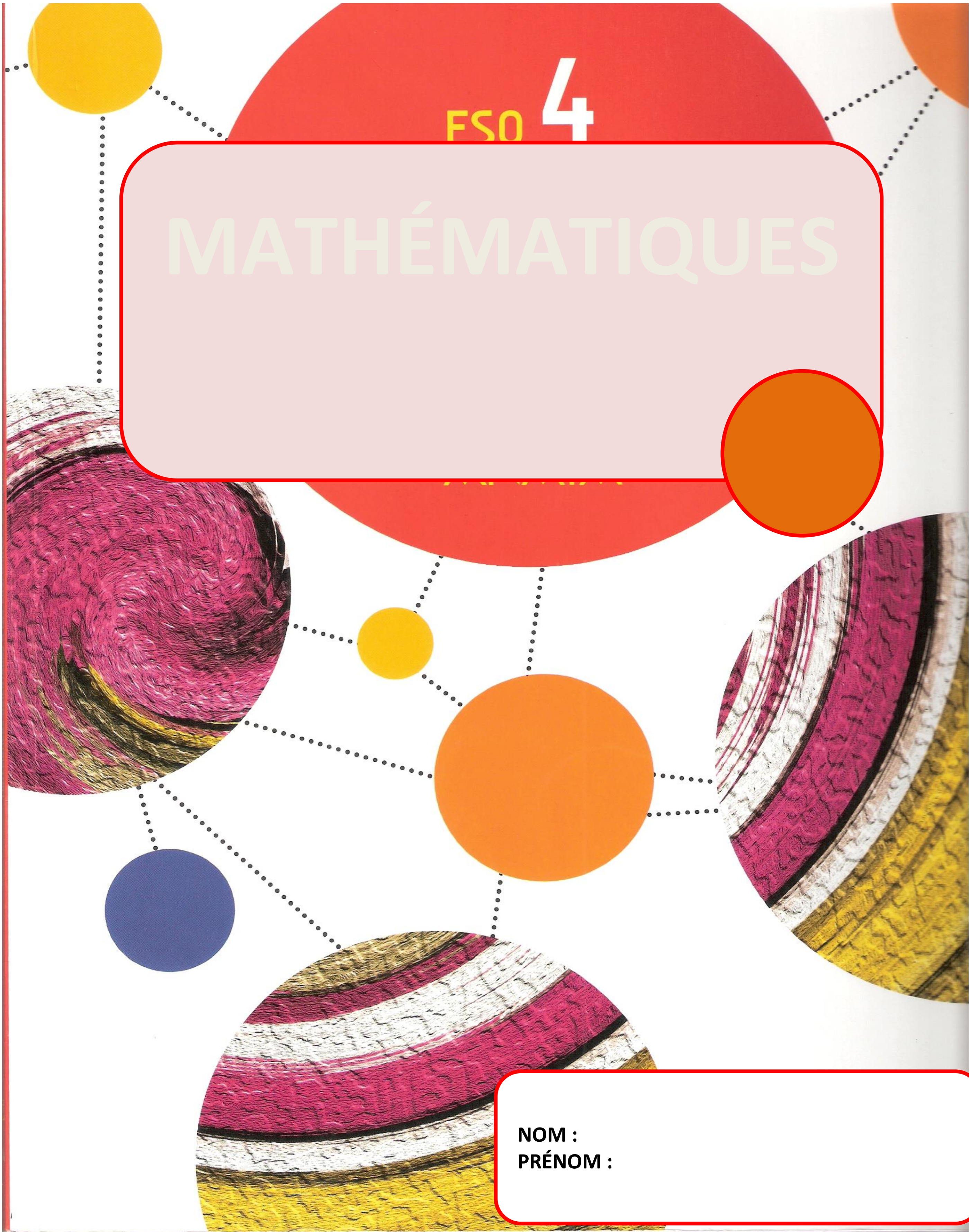


MATHÉMATIQUES

NOM :
PRÉNOM :

1. NOMBRES IRRATIONNELS

Nombres décimaux dont le nombre de chiffres après la virgule est infini et non périodique :$\sqrt{3}, \sqrt{7}, \pi, \ldots$
Ils n'ont pas une écriture rationnelle

2. NOMBRES RÉELS

R ensemble de nombres réels, c'est-à-dire des nombres qui sont soit rationnels, soit irrationnels

3. INTERVALLES ET SEMIDROITES

Un intervalle est une partie de R d'une forme particulière.
Soient a et b deux nombres tels que a< b
(a, b) c'est un intervalle ouvert
[a,b] c'est un intervalle fermé

4. RACINES ET RADICAUX

RADICAL $\sqrt[n]{a}$ n est l'indice
a est le radicand

La racine *n*'ème d'un nombre réel *a,* qui se note $\sqrt[n]{a}$, est le nombre réel *b* tel que $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } b^n = a$$

Propriétés

Si n est pair,

- Le réel 0 admet la racine n'ème 0;
- Tout nombre strictement négatif n'admet pas de racine n'ème.

Si n est impair,

- Tout nombre réel admet une racine n'ème .

PUISSANCES D'EXPOSANT FRACTIONNAIRE

Une puissance d'exposant fractionnaire $a^{\frac{m}{n}}$ est un radical d'indice n et radicand a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \right)$$

Deux radicaux sont équivalents si, en expriment comme puissance d'exposant fractionnaire, les bases sont égales et les fractions des exposants sont équivalentes, c'est-à-dire

- $a^{\frac{m}{n}}$ est équivalente à $a^{\frac{p}{q}}$ si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$
- $\sqrt[n\cdot p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

OPÉRATIONS AVEC RADICAUX (PROPRIÉTÉS DES RADICAUX)

REDUIRE RADICAUX À L'INDICE COMMUN

Soient $\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[m]{b}$ alors :

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot m]{a^m}$$
$$\sqrt[m]{b} = \sqrt[n\cdot m]{b^n}$$

SIMPLIFIER LES RADICAUX

Mettre sous la forme $b\sqrt[n]{a}$ avec *n* un nombre naturel

ADDITION ET SOUSTRACTION DE RADICAUX

Deux radicaux semblables ont le même indice et le même radicand. Pour additionner ou soustraire les radicaux il faut qu'ils soient semblables.

PRODUIT ET QUOTIENT DE RADICAUX

- $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

PUISSANCE ET RACINE DE RADICAUX

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

RATIONALISER

- **Dénominateur avec un seul radical**

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

- **Dénominateur avec un binôme**

  Dans ce cas on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

  - Quantité conjuguée (Cela permet de supprimer le radical au dénominateur) (Il permet de « rendre rationnels » des dénominateurs de fractions, ce qui facilite souvent les calculs.)

L'expression conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et vice versa, ensuite, on utilise le fait que :
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b$

5. NOTATION SCIENTIFIQUE

NOTATION SCIENTIFIQUE

La notation scientifique d'un décimal *x* est son écriture sous la forme $x = d\cdot 10^{n}$ où :

- d est un décimal ayant une seule chiffre non nul avant la virgule ;
- n est un entier relatif appelé ordre de la magnitude

ADDITION ET SOUSTRACTION en notation scientifique

- Pour additionner ou soustraire des nombres en notation scientifique il faut que l'exposant de la puissance de 10 soit égal dans tous les termes, c'est-à-dire, que l'ordre de la magnitude doit être le même. On additionne les nombres décimaux et on laisse la puissance de 10 qu'on a.

$$3{,}5\cdot10^4+2{,}5\cdot10^3=3{,}5\cdot10^4+0{,}25\cdot10^4=3{,}75\cdot10^4$$

MULTIPLICATION ET DIVISION en notation scientifique

- Pour multiplier ou diviser des nombres en notation scientifique, on multiplie ou on divise d'un côté les puissances de 10, et de l'autre côté les nombres précédents.

6. LES LOGARITHMES

Le **logarithme** de base *a* d'un nombre réel positif P est la puissance à laquelle il faut élever la base *a* pour obtenir ce nombre P.

$$\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

PROPRIÉTÉS

Cette définition permet de déduire rapidement les propriétés suivantes

1. $\log_a(1) = 0$ $\quad \log_a a = 1$
2. PRODUIT ET QUOTIENT

$$\log_a(P\cdot Q) = \log_a P + \log_a Q \qquad \log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$$

3. PUISSANCE ET RACINE

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{1}{n}\log_a P \qquad \log_a(x^n) = n\log_a(x)$$

4. CHANGE DE BASE

$$\log_b P = \frac{\log_a P}{\log_a b}$$

Le logarithme décimal (c'est-à-dire en base dix) était le plus communément utilisé (on note log dans le lieu de $\log_{10}$). Le logarithme népérien (ou *naturel*) est celui qui utilise le nombre e comme base.

Coche les bonnes réponses :

		R1	R2	R3	R4
1	Combien vaut la racine carrée de 169 ?	-13	169^2	13	14
2	Le nombre 11 est égal à...	$\sqrt{11^2}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{121}$	3,31
3	$\sqrt{9}+\sqrt{16}$ est égal à...	$\sqrt{25}$	7	5	12
4	$\sqrt{108}$ est égal à...	$3\sqrt{6}$	$4\sqrt{27}$	$6\sqrt{3}$	10,39
5	$\sqrt{6}\times\sqrt{12}$ est égal à ...	$6\sqrt{12}$	$\sqrt{72}$	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{8}$
6	$\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}}$ est égal à...	$\dfrac{5}{13}$	$\sqrt{\dfrac{5}{13}}$	$\dfrac{\sqrt{25}}{169}$	$\sqrt{\dfrac{25}{169}}$
7	$2x^2 - 4x + 5$ pour $x = \sqrt{3}$ est égal à...	$7\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}+5$	$11-4\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
8	$3\sqrt{5}+\sqrt{20}$ est égal à ...	$3\sqrt{25}$	$3\sqrt{100}$	$7\sqrt{5}$	$5\sqrt{5}$
9	$\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}}$ est égal à ...	$\sqrt{32}$	$\dfrac{5}{3}$	$2\sqrt{2}$	$\dfrac{5}{3}\sqrt{2}$
10	$(2+\sqrt{3})^2$ est égal à ...	$7+4\sqrt{3}$	$4+4\sqrt{3}$	7	$11+2\sqrt{3}$
10	$(2+\sqrt{3})^2$ est égal à ...	$7+4\sqrt{3}$	$4+4\sqrt{3}$	7	$11+2\sqrt{3}$
11	$(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ est égal à ...	$2\sqrt{7}-2\sqrt{5}$	2	-2	$2+2\sqrt{35}$
12	$x^2 = 81$ a pour solutions...	9 et 0	8 et -8	9 et -9	$\sqrt{9}$ et $-\sqrt{9}$
13	L'équation $x^2 + 15 = 11$ a pour solutions...	4 et -4	2 et -2	aucun nombre	$-\sqrt{11}$ et $\sqrt{11}$

1) Calcule :

a) $\sqrt{16}$
b) $\sqrt[3]{-8}$
c) $\sqrt[5]{32}$
d) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$
e) $\sqrt[3]{0'064}$
f) $4^{\frac{1}{2}}$
g) $125^{\frac{1}{3}}$
h) $8^{\frac{2}{3}}$
i) $64^{\frac{5}{6}}$
j) $\sqrt{49\cdot 121\cdot 169}$
k) $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 64}$
l) $\sqrt{49^3}$
m) $\sqrt[5]{243\cdot 32\cdot 0'00001}$
n) $\sqrt[5]{243:32}$
ñ) $\sqrt{25:0'0001}$
o) $\sqrt[3]{8:0'064}$
p) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$
q) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}$
r) $\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4-\sqrt{25a^8}}}$
s) $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32}$

2) Simplifie l'écriture suivante :

a) $\sqrt{8}$
b) $\sqrt{12}$
c) $\sqrt[3]{16}$
d) $\sqrt[3]{54}$
e) $\sqrt[5]{64}$
f) $\sqrt{\frac{27}{4}}$
g) $\sqrt[5]{x^{23}y^{18}}$
h) $\sqrt[5]{\frac{5x^{10}}{y^8}}$
i) $\sqrt[3]{\frac{8x^4y^3z}{n^6}}$
j) $3\sqrt{8a^3}$
k) $2x^2y\sqrt{x^4y^3}$
l) $\frac{xy^2}{3}\sqrt{27xy^3}$
m) $\sqrt[7]{\frac{x^{15}}{y^{10}}}$
n) $\sqrt{a^5(1-a)^3}$

3) Introduit dans le radical et simplifie l'écriture suivante .

a) $7\sqrt{a}$
b) $2a\sqrt{3a}$
c) $x\sqrt{\frac{1}{x}}$
d) $x^3y\sqrt{xy}$
e) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{27}{2}}$
f) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$
g) $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{ax}{2}}$
h) $\frac{3}{2xy}\sqrt{\frac{2xz}{y}}$
i) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{81}{4}}$
j) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{4}{81}}$
k) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

4) Ecrire sous la forme a $\sqrt[n]{b}$, où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}$

c) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}$

d) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$

e) $3\sqrt{2}-3\sqrt{8}+3\sqrt{18}$

f) $4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{48}+\frac{2}{3}\sqrt{27}+\frac{3}{5}\sqrt{75}$

g) $7\sqrt{54}-3\sqrt{18}+\sqrt{24}-\frac{3}{5}\sqrt{50}-\sqrt{6}$

h) $\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{64}$

i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$

j) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

k) $\sqrt{32}:\sqrt{2}$

l) $\sqrt{3}:\sqrt{4}$

m) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{32}$

n) $\sqrt{8}:\sqrt[4]{2}$

ñ) $\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{3}$

o) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{27}{2}}$

p) $\left(2\sqrt{2}\right)^2$

q) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

r) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

s) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

5) Supprimer le radical du dénominateur et simplifier:

a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

e) $\frac{2}{\sqrt[3]{2^2}}$

f) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

g) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$

h) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

i) $\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$

j) $\frac{2\sqrt{12}}{5\sqrt{3}}$

k) $1+\frac{3}{\sqrt{2}}$

l) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{3\sqrt{3}}$

m) $\frac{3}{\sqrt{2-x}}$

n) $\frac{3xy^2}{\sqrt[3]{x^2y}}$

ñ) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

o) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

p) $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

q) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

r) $\frac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{5}}$

s) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$

1 Réduis chacune des sommes.

$A = 5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

A = ...

A = ...

$B = 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + \sqrt{3}$

B = ...

B = ...

2 Développe puis simplifie les expressions.

$C = 3(5 - \sqrt{7})$

C = ...

$D = \sqrt{5}(2 + \sqrt{5})$

D = ...

3 Réduis chacune des expressions.

$E = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} + 6\sqrt{2}$

E = ...

E = ...

E = ...

$F = 8\sqrt{5} - \sqrt{5 \times 100} + 4\sqrt{9 \times 45}$

F = ...

F = ...

F = ...

4 *Simplification de sommes*

a. Écris la somme suivante sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier relatif.

$G = \sqrt{27} + 2\sqrt{75}$

G = ...

G = ...

G = ...

b. Écris la somme suivante sous la forme $a\sqrt{13}$ où a est un entier relatif.

$H = 5\sqrt{52} - 6\sqrt{117}$

H = ...

H = ...

H = ...

c. Écris la somme suivante sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier relatif.

$I = 2\sqrt{500} - 5\sqrt{125} - 3\sqrt{180}$

I = ...

I = ...

5 Écris les sommes suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier relatif et b le plus petit entier possible.

$J = \sqrt{147} + 3\sqrt{48} - 5\sqrt{12} - \sqrt{48}$

J = ...

J = ...

J = ...

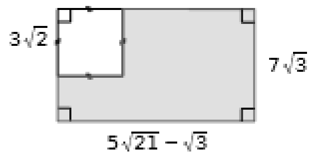
$K = -5\sqrt{28} + 2\sqrt{63} + \sqrt{567}$

K = ...

K = ...

K = ...

6 Quelle est l'aire de la figure grise ?



....

....

....

....

....

7 Développe puis simplifie les expressions.

$L = (3 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2})$

L = ...

L = ...

L = ...

$M = (3\sqrt{5} - 2)(1 - \sqrt{5})$

M = ...

M = ...

M = ...

$N = (-2\sqrt{6} + 4)(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

N = ...

N = ...

AUTOEVALUATION CHAPITRE 1

1. Classer les nombres suivants selon l'ensemble: entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, irrationnels ou réels.

$$\sqrt[6]{3^{-4}};\ 2\pi;\ \sqrt{log_2 0,5};\ 3,\widehat{47};$$
$$2,03333\ldots;\ \sqrt{81};\ \sqrt[3]{4};\ \frac{\sqrt{5}}{3};\ -\frac{13}{9};\ -8$$

Ordonnez du plus petit au plus grand

2. a)Écrire comme un intervalle les suivants ensembles numériques et représenter graphiquement

   i) $\{x \,/\, -2 \le x < 7\}$

   ii) $\{x \,/\, x > -1\}$

   iii) $|x-3| < 1$

   b) Écrire comme une inégalité les suivants intervalles ou semi droites

   $A = [-3, 4)$ $\qquad$ $B = (-\infty,\ 3)$

3. Simplifier $\sqrt[3]{\dfrac{81a^2b^5}{16z^4}}$

4. Calculer et simplifier

   a) $\dfrac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{3}$ $\qquad$ b) $\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{150}$

   c) $\dfrac{5}{\sqrt{50}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

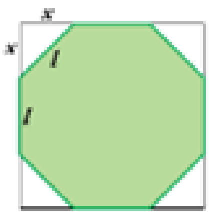
5. Calculer avec les propriétés des logarithmes $\quad$ a) $log_3 \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$ $\qquad$ b) $log_2\left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}}\sqrt{2}\right)$

6. Exprime $log \dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ comme une fonction de log 2 et de log 3

7. Dans un carreau de 10 cm de côté, on coupe sur chaque coin un triangle isocèle de façon qu'on obtienne un octogone régulier.

   a) Calculer la mesure exacte du côté de l'octogone

   b) Calculer l'aire



1. POLYNÔMES. OPÉRATIONS

C'est une expression littérale avec plus d'un **terme**. On doit écrire avec le moins de termes possible.
Le **degré du polynôme**, c'est le plus grand des degrés des termes.
Le terme indépendant, c'est le monôme de degré zéro.

La valeur d'un polynôme

La valeur d'un polynôme, c'est le résultat qu'on obtient en remplaçant les lettres ou variables par des nombres déterminés et en faisant après les opérations.

Addition, soustraction et multiplication de polynômes

- Pour additionner ou soustraire polynômes, on additionne ou on soustrait les termes semblables.
- Pour multiplier deux polynômes on multiplie chaque monôme d'un polynôme par tous les monômes de l'autre polynôme, puis on réduit les termes semblables.

Division de polynômes

Soient A(x) et B(x) deux polynômes, avec B(x) non nul, il existe des polynômes Q(x) et R(x), tels que
$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ et degré de $R(x) <$ degré $B(x)$

Un même algorithme s'applique à la division euclidienne de polynômes.

Exemple : division de $x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6$ par $x^2 + 3x + 1$

Étape 1 : division de $x^4 - x^3 + x^2$ par $x^2 + 3x + 1$ (quotient x^2, reste $-4x^3$)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 - x^2 & x^2 \\ \cline{1-1}
\quad -4x^3 &
\end{array}$$

Étape 2 : division de $-4x^3 - x$ par $x^2 + 3x + 1$ (quotient $-4x$, reste $12x^2 + 3x$)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 - x^2 & x^2 - 4x \\ \cline{1-1}
\quad -4x^3 \quad - 4x & \\
\quad +4x^3 + 12x^2 + 4x & \\ \cline{1-1}
\qquad + 12x^2 &
\end{array}$$

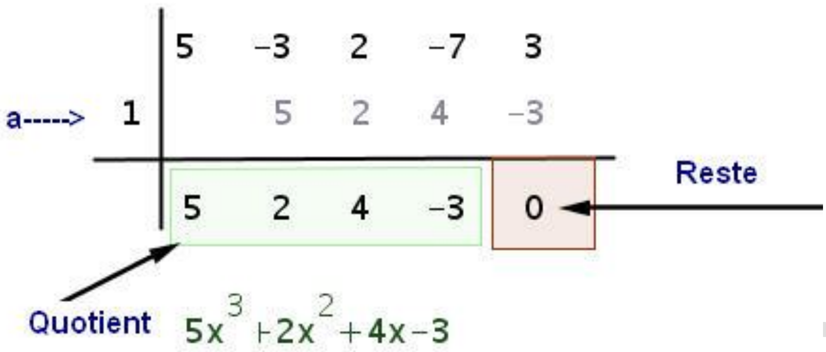
Étape 3 : division de $12x^2 - 3x + 8$ par $x^2 + 3x + 1$ (quotient 12, reste $-33x - 4$)

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 - x^2 & x^2 - 4x + 12 \\ \cline{1-1}
\quad -4x^3 \quad -4x & \\
\quad +4x^3 + 12x^2 + 4x & \\ \cline{1-1}
\qquad + 12x^2 \quad + 6 & \\
\qquad -12x^2 - 36x - 12 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad - 36x - 6 &
\end{array}$$

Conclusion : $x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 4x + 12) + (-36x - 6)$

2. RÉGLE DE RUFFINI

La règle de Ruffini c'est un procédées pour diviser polynômes quand le diviseur est de la façon (x-a), où a est un entier relatif.



THÉOREME DU RESTE

La valeur d'un polynôme P(x), pour x=a , c'est égal au reste de la division
P(x) : (x-a).
C'est-à-dire, P(a)=R, où R est le reste de la division P(x) : (x-a).

3. RACINES D'UN POLYNÔME

Un nombre a est racine d'un polynôme P(x) si on vérifie P(a)=0.
Alors si a est racine de P(x), p(x)=(x-a)·Q(x)

4. FACTORITATION DE POLYNÔMES

Factoriser un polynôme c'est l'écrire comme produit de polynômes avec le plus petit degré possible.
P(x)= k(x-a)·(x-b)·…·(x-f) où a, b,…f sont racines de P(x)
Pour factoriser polynômes ont utilisent techniques comme : La mise en évidence, les identités remarquables et la règle de Ruffini.

5. DIVISEURS D'UN POLYNÔME

Si un polynôme on peut exprimer comme produit de deux polynômes, on dit que ces sont facteurs ou diviseurs du polynôme.
P(x)=Q(x)·R(x) →Q(x) et R(x) sont facteurs ou diviseurs de P(x).
Un polynôme est dite irréductible s'il n'y a pas de diviseurs avec un degré plus petit que le sien.

6. FRACTIONS ALGÉBRIQUES

Une fraction algébrique est une expression algébrique de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P(x) est un polynôme et où Q(x) est un polynôme non nul.

Deux fractions algébriques sont **équivalentes** si on vérifie :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \rightarrow P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$$

6.1. **SIMPLIFIER FRACTIONS ALGÉBRIQUES**

Pour simplifier (où réduire) une fraction rationnelle, on procède comme suit:

- On factorise le numérateur et le dénominateur.
- On divise le numérateur et le dénominateur par le facteur commun.

6.2. OPÉRATIONS AVEC FRACTIONS ALGÉBRIQUES

Pour **additionner** ou **soustraire** fractions algébriques avec le même dénominateur, on additionne ou on soustrait les numérateurs et on laisse le même dénominateur.

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on réduit au même dénominateur en calculant le plus petit commun multiple.

Calcule et simplifie $\frac{-8}{x^2+9x+20} - \frac{2}{x+4}$

$x^2+9x+20 = (x+4)(x+5)$
$x+4$ $\rightarrow$ m.c.m$(x^2+9x+20,\ x+4) = (x+4)(x+5)$

$$\frac{-8}{x^2+9x+20} - \frac{2}{x+4} = \frac{-8-(2)(x+5)}{(x+4)(x+5)}$$

$$= \frac{-8-(2x+10)}{(x+4)(x+5)} = \frac{-2x-18}{(x+4)(x+5)}$$

$$= \frac{-2x-18}{x^2+9x+20}$$

Le **produit** de **fractions algébriques** est une autre fraction algébrique qui a pour numérateur le produit des numérateurs, et pour dénominateur le produit des dénominateurs.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

Pour **diviser** deux fractions algébriques on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

1 *En suivant le guide*

a. Transforme l'expression A pour qu'elle soit de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ puis factorise-la.

$A = x^2 + 8x + 16$

b. Transforme l'expression B pour qu'elle soit de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ puis factorise-la.

$B = x^2 - 20x + 100$

c. Transforme l'expression C pour qu'elle soit de la forme $a^2 - b^2$ puis factorise-la.

$C = x^2 - 16$

2 Factorise chaque expression.

$D = 9x^2 + 30x + 25$

$E = x^2 + 10x + 25$

$F = 4t^2 + 24t + 36$

$G = 9x^2 + 64 + 48x$

3 Factorise chaque expression.

$H = 9 + 4x^2 - 12x$

$J = x^2 - 2x + 1$

$K = y^2 - 18y + 81$

$L = 16x^2 + 25 - 40x$

4 Factorise chaque expression.

$M = x^2 - 49$

$N = 81 - t^2$

$P = 16x^2 - 36$

$Q = 25 - 4y^2$

5 Complète le tableau suivant de façon à obtenir une expression de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$ puis sa forme factorisée.

	Expression	a	b	$(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$
a.	$x^2 +$ .... $+ 4$			
b.	$4x^2 - 8x +$			
c.	.... $- 20x + 4$			
d.	$9x^2 - 42x +$			
e.	.... $+ 30x + 25$			
f.	$16x^2 +$ .... $+ 16$			

6 Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, choisis et entoure la bonne réponse parmi les trois proposées. Aucune justification n'est demandée.

	L'expression factorisée de	A	B	C
a.	$x^2 - 100$ est	$(x - 10)(x + 10)$	$(x - 50)(x + 50)$	$(x - 10)^2$
b.	$4x^2 - 12x + 9$ est	$(2x + 3)(2x - 3)$	$(2x + 3)^2$	$(2x - 3)^2$
c.	$9x^2 - 16$ est	$(3x - 4)^2$	$(3x + 4)(3x - 4)$	$(3x + 4)^2$
d.	$(x + 1)^2 - 9$ est	$(x - 2)(x + 4)$	$x^2 + 2x - 8$	$(x - 8)(x + 10)$
e.	$25x^2 + 60x + 36$ est	$(25x + 6)^2$	$(5x + 6)^2$	$(- 5x + 6)^2$
f.	$(2x + 1)^2 - 1$ est	$(2x + 1)(2x - 1)$	$2x(2x - 2)$	$2x(2x + 2)$

7 Factorise puis réduis chaque expression.

$R = (x + 4)^2 - 49$

$R = (x + 4)^2 -$ ......^{2}

....

....

....

$S = (x - 4)^2 - (2x - 1)^2$

$a^2 - b^2$ avec $a =$ .... et $b =$ ....

....

....

....

$T = 4 - (1 - 3x)^2$

....

8 Factorise puis réduis chaque expression.

$U = (3 - 2x)^2 - 4$

....

....

....

....

$V = 121 - (x - 7)^2$

....

....

....

$W = (7x + 8)^2 - (9 - 5x)^2$

....

....

1. Simplifier les suivantes fractions algébriques

a) $\dfrac{2x}{x^2+x}$ b) $\dfrac{x+1}{(x+1)^2}$ c) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ d) $\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$ e) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x}$ f) $\dfrac{x^3-4x^2}{x^3}$

2. Simplifier les suivantes fractions algébriques

a) $\dfrac{2x^2-6x}{4x^3-2x}$ b) $\dfrac{(x-3)^2\,x(x+3)}{(x-3)\,x^2\,(x+2)}$ c) $\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2}$ d) $\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24}$

3. Calcule et simplifie :

a) $\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{3}{x}$ b) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{2x}{x+2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x}$ d) $\dfrac{x^2}{x^2-25}:\dfrac{x}{x-5}$

4. Calcule et simplifie :

a) $\dfrac{2x+1}{x+3}-\dfrac{x^2+5}{x^2+3x}$ b) $\dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

c) $\dfrac{5x-10}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-9}{x-2}$ d) $\dfrac{3x-1}{x}-\dfrac{x+3}{x^2-2x}+\dfrac{2x+5}{x-2}$

e) $\dfrac{2x+1}{2x-1}:\dfrac{x^2}{4x-2}$ f) $\dfrac{x^2}{x-1}:\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

5. Calcule

a) $(7x^2-5x+3):(x^2-2x+1)$

b) $(2x^3-7x^2+5x-3):(x^2-2x)$

c) $(x^3-5x^2+2x+4):(x^2-x+1)$

6. Calculer la valeur de m pour lequel les polynômes ont les restes :

a) $(x^2-5x+m):(x-2)$ rest $=0$ b) $(x^3-2x^2-x+m):(x+1)$ rest $=-1$

c) $(2x^3-12x+2m):(x-3)$ rest $=-5$ d) $(x^2-mx+3):(x+3)$ rest $=0$

7. Factoriser:

a) $3x^3-12x$ b) $4x^3-24x^2+36x$ c) $45x^2-5x^4$

d) $x^4+x^2+2x^3$ e) x^6-16x^2 f) $16x^4-9$

8. Factoriser:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

9. Factoriser

a) $x^2 + 4x - 5$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$

d) $3x^2 + 9x - 210$

e) $2x^2 - 9x - 5$

f) $3x^2 - 2x - 5$

g) $4x^2 + 17x + 15$

h) $-x^2 + 17x - 72$

10. (50-20) Factoriser et donner les racines :

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

11. (50-27) Simplifier

a) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2}$

c) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6}$

d) $\dfrac{x^2 - x - 42}{x^2 - 8x + 7}$

12. (50-28) Simplifier

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 2x}$

b) $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 1}$

c) $\dfrac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{2x^4 - 3x^3 + x^2}$

d) $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^4 + x^3 - 6x^2}$

13. (50-30) Calcule et simplifie :

a) $\dfrac{x-1}{x+3} - \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{x}{x^2-9}$

b) $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2-2x} - \dfrac{3}{x^2-4}$

c) $\dfrac{1}{2x+2} + \dfrac{3x-3}{x^2-x-2} - \dfrac{x}{x-2}$

14. (50-32) Calcule et simplifie :

a) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1} + \dfrac{2x+3}{x-1} - 3$

c) $\dfrac{2x-3}{x^2-9} - \dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x+2}{x+3}$

AUTOEVALUATION CHAPITRE 2

1. Calcule le quotient et le reste de la division : $(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$

2. Le polynôme $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ est divisible par x-a pour les valeurs entières de a.

   Cherchez toutes les valeurs et donnez le quotient dans tous les cas.

3. Calcule la valeur de m pour lequel le polynôme $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ soit divisible par x+1.

4. Factorise chaque expression

   a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2$ b) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

5. Simplifie les fractions algébriques :

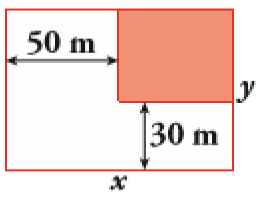
   a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$ b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

6. Calcule et simplifie :

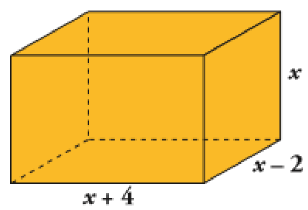
   a) $\dfrac{2x^2}{x-3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$ b) $\dfrac{x^2 - 6}{(x-2)^2} - \dfrac{x-3}{x-2}$ c) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a+1}{a^3 - a}$

7. Calcule a et b pour lesquels la division de $x^3 + ax^2 + bx - 4$ par x+1 donne le reste -10, et par x-2 donne le reste 2.

8. Dans un terrain de côtés x et y on construit une maison, dans le lieu placé dans le dessin. Exprime, en fonction de x e y, l'aire du terrain sans maison.



9. Exprime à l'aide de polynômes, l'aire et le volume de cette figure



1. ÉQUATIONS

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Équation du second degré encore appelée **équation quadratique**
Ce sont les équations qui, après transformations, se présentent sous la forme suivante

$ax^2+bx+c=0$, dans laquelle **a, b et c** sont des nombres connus et ***x*** l'inconnue.

- **Équations complètes.** Si b$\neq 0$ $et\ c \neq 0$, on dit que l'équation est complète et les solutions sont données par la formule suivante :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Complète	$ax^2+bx+c=0$ $a,b,c\neq 0$	$x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Nombre de solutions :
Discriminant Δ = $b^2 - 4ac$
Selon le signe du discriminant, l'équation peut avoir une solution double, deux solutions différentes ou aucune solution.

Discriminant	Nombre de solutions
Δ>0	2
Δ=0	1 solution double
Δ<0	Pas de solution

- **Équations incomplètes.** Si b=0 ou c=o, l'équation est appelée incomplète et on peut résoudre sans la formule antérieure.

	Équation	Solutions
Incomplète	$ax^2+bx=0$ $a,b\neq 0$	$x(ax+b)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$
Incomplète	$ax^2+c=0$ $a,c\neq 0$	$x=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Équations bicarrés.

Ce sont les équations qui après transformations, se ramènent à la forme $ax^4+bx^2+c=0$, dans laquelle a, b et c sont des nombres connus et x l'inconnue. Une équation bicarré est de degré égal à 4 et n'a pas de termes de degré 3 et 1.

Pour résoudre des équations bicarrés on doit faire un change de variable, ont obtient une équation du second degré :

$ax^4+bx^2+c=0$, change $x^2=z$, alors $x^4=z^2$

L'équation serait : $az^2+bz+c=0$

On cherchent les solutions de cet équation et après on défait le change pour chaque valeur positive de z $x=\pm\sqrt{z}$

Équations avec fractions algébriques

Pour résoudre ce type d'équations il faut qu'il n'y ait plus aucun dénominateur, alors on multiplie les deux membres de l'équation donnée par le PPCM et après on résout l'équation obtenue.

Il est très important **faire la preuve des solutions** obtenues à l'équation première

$$\frac{6}{x+2}+\frac{7}{x+3}=2$$

PPCM

$$(6)(x+3)+(7)(x+2)=2(x+2)(x+3)$$

$$(6x+18)+(7x+14)=(2x^2+10x+12)$$
$$13x+32=2x^2+10x+12$$
$$-2x^2+3x+20=0$$

On résout

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{-4}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{-4}=\frac{-3\pm 13}{-4}=\begin{cases}\frac{10}{-4}=\frac{-5}{2}\\ \frac{-16}{-4}=4\end{cases}$$

Équations avec radicaux

Ce sont des équations où l'inconnue est dans un radical. Pour résoudre ces équations on laisse seule la racine dans un des membres et après on fait la puissance 2 de toute l'équation.

Il est très important **faire la preuve des solutions** obtenues à l'équation première

$$8x-\sqrt{2+2x}=-3$$

1-On laisse seule la racine
2-On fait la puissance 2

$$-\sqrt{2+2x}=-3-8x$$

$$\left(-\sqrt{2+2x}\right)^2=(-3-8x)^2$$
$$2+2x=64x^2+48x+9$$
$$0=64x^2+46x+7$$

3- On résout

$$x=\frac{-46\pm\sqrt{2116-(1792)}}{128}=\frac{-46\pm\sqrt{324}}{128}=\frac{-46\pm 18}{128}=\left[\begin{array}{l}\frac{-28}{128}=\frac{-7}{32}\\ \frac{-64}{128}=\frac{-1}{2}\end{array}\right.$$

4- Il faut faire la preuve des solutions à l'équation première

Si $x=\frac{-7}{32} \Rightarrow \frac{-96}{32}=-3$ Alors -7/32,il est solution

Si $x=\frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{-10}{2}\neq -3 \Rightarrow$ Alors, -1/2 il n'est pas solution

Équation exponentielle

Une équation qui comporte un terme où la variable indépendante apparaît comme exposant d'un nombre réel est nommée **équation exponentielle**.

Il est important de garder en tête que $a^x = a^y$ si et seulement si $x = y$. Donc, lorsque nous avons deux expressions qui sont égales et qu'elles ont la même base, alors les exposants sont égaux.

Équation logarithmique

Une équation dans laquelle la variable apparaît uniquement dans une expression logarithmique est appelée à une **équation logarithmique**.

Afin de résoudre une équation logarithmique, il faut être à l'aise avec les diverses propriétés des logarithmes. De plus, il sera très important de toujours indiquer les restrictions relatives aux arguments des divers logarithmes apparaissant dans une équation logarithmique.

Équations du type (ax+b)·(cx+d) ·…=0

Appliquer : le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

$(ax+b)\cdot(cx+d)=0 \rightarrow ax+b=0$ ou $cx+d=0$

2. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINEAIRES

Un **<u>système de deux équations linéaires</u>** à deux inconnues est un ensemble d'équations

ax + by =c
a'x+b'y=c'

a,b,c,a',b',c' sont des réels
x, y sont deux inconnues

Résoudre ce système c'est trouver tous les couples de valeurs *(x,y)* pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément. C'est donc trouver toutes les solutions communes aux équations.

MÉTHODES PAR LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES

- **Résolution par la méthode de substitution.**

On calcule, dans l'une des équations, une des inconnues en fonction de l'autre, et on porte la valeur trouvée dans l'autre équation

- **Résolution par la méthode de comparaison**

Pour résoudre il faut isoler la même variable des deux équations et égaler les résultats pour trouver l'ensemble solution

- **Résolution par la méthode de combinaisons**

On multiplie les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de sorte qu'en additionnant membre à membre les équations obtenues, l'une des inconnues disparaisse. Une telle méthode est aussi appelée méthode d'addition.

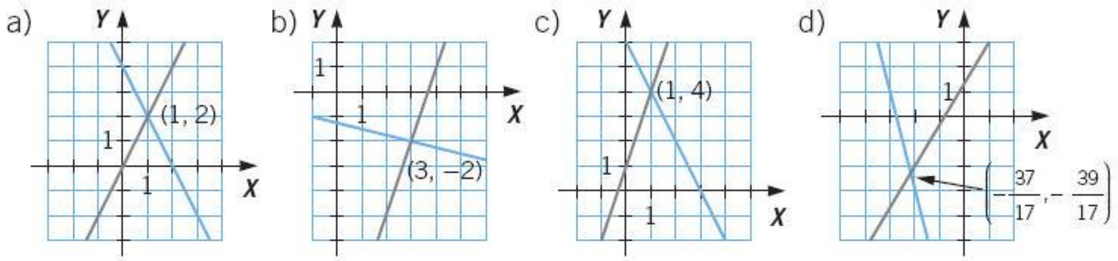
- **Interprétation graphique**

On calcule y en fonction de x dans chacune des équations ; on obtient deux fonctions affines ; dans un repère orthogonal, on construit les droites représentatives de ces fonctions. Le couple de coordonnées du point d'intersection est la solution graphique du système.

Exemples

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 3x - y = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 4y = -5 \\ 3x - y = 11 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = -4 \\ 4x + y = -11 \end{array}\right\}$



3. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINEAIRES

Ces sont des systèmes où il y a une ou plusieurs équations non linéaires (du degré plus grand que 1, avec des fractions algébriques, avec des radicaux…)
Il est très important **faire la preuve des solutions** obtenues au première système.

Exemples

a) $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{-1}{4} \\ \frac{1}{x+3}-\frac{1}{y-3}&=-1 \end{aligned}\right] \rightarrow \left.\begin{aligned} &4y+4x=-xy \\ &y-3-x-3=-(x+3)\cdot(y-3) \end{aligned}\right]$$

$$\rightarrow - \left.\begin{aligned} 4x+4y+xy&=0 \\ -4x+4y+xy&=15 \end{aligned}\right\} \qquad \overline{8x=-15}$$

$$8x=-15 \rightarrow x=\frac{-15}{8}$$

$$4x+4y+xy=0 \xrightarrow{x=\frac{-15}{8}} \frac{-60}{8}+4y-\frac{15y}{8}=0$$

$$\rightarrow -60+32y-15y=0 \rightarrow y=\frac{60}{17}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+y&=\frac{5}{2} \\ \frac{2}{y}-3x&=-5 \end{aligned}\right] \left.\begin{aligned} 2+2xy&=5x \\ 2-3xy&=-5y \end{aligned}\right] \rightarrow y=\frac{5x-2}{2x}$$

$$2-3xy=-5y \xrightarrow{y=\frac{5x-2}{2x}} 2-\frac{15x+6}{2}=\frac{-25x+10}{2x}$$

$$\rightarrow 10x-15x^2=-25x+10$$

$$15x^2-35x+10=0 \rightarrow 3x^2-7x+2=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \longrightarrow y_1=2 \\ x_2=\dfrac{1}{3} \rightarrow y_2=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

4. INÉQUATIONS

Une inéquation est formée de deux membres séparés par l'un des signes <, >,≤ ,≥. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui la vérifient. Ces valeurs sont les solutions de l'inéquation. Elles forment souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles.

a<b se lit : a plus petit que b ou a inférieur à b
a>b se lit : a plus grand que b ou a supérieur à b
a≤ b se lit : a plus petit ou égal à b ou a inférieur ou égal à b
a≥ b se lit : a plus grand ou égal à b ou a supérieur ou égal à b

- **PROPRIÉTÉS des inéquations**

Pour résoudre une inéquation, on transforme son écriture. On peut :

- Ajouter une même somme algébrique aux deux membres
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement positif en conservant le sens de l'inéquation
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inéquation.

Inéquations à une inconnue

Pour résoudre une inéquation à une inconnue, on transforme son écriture et on laisse l'expression algébrique dans un membre et un zéro dans l'autre. Après on la résout comme une équation et la solution est un intervalle ou une réunion d'intervalles

SYSTÈMES D'INÉQUATIONS

C'est un ensemble d'inéquations dont le but est de calculer une solution commune.

Exemples

a) $$\left.\begin{array}{l} 5-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}>\frac{x-5}{6} \\ \frac{x+4}{5}-\frac{x}{6}>\frac{7}{10} \end{array}\right] \rightarrow \left.\begin{array}{l} 60-4x-3x>2x-10 \\ 6x+24-5x>21 \end{array}\right] \rightarrow \left.\begin{array}{l} x<\frac{70}{9} \\ x>-3 \end{array}\right]$$

Solution$\left(-3,\frac{70}{9}\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l} 5x-2\leq 0 \\ 3x+4>0 \\ \frac{x+9}{2}\geq 3 \end{array}\right] \rightarrow \left.\begin{array}{l} x\leq\frac{2}{5} \\ x>\frac{-4}{3} \\ x\geq -3 \end{array}\right] \rightarrow \frac{-4}{3}<x\leq\frac{2}{5}$$

Solution $\left(\frac{-4}{3},\frac{2}{5}\right]$

1. (58-1) Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $3x^2 + 5 = 0$ c) $7x^2 + 5x = 0$

2. (58-2) Résoudre les équations suivantes :

a) $10x^2 - 3x - 1 = 0$ b) $x^2 - 20x + 100 = 0$ c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$ b) $3x^4 + 75x^2 = 0$ c) $7x^4 - 112 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ e) $4x^4 + 19x^2 - 5 = 0$ f) $x^4 + 9x^2 + 18 = 0$

4. Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = 3$ b) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{x+1}{x+5} + \dfrac{1-x}{x-4} = \dfrac{5}{2}$

5. Résoudre les équations suivantes :

a) $x - \sqrt{2x-3} = 1$ b) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -2$

c) $\sqrt{x^2+2x+9} - 7 = 2x$ d) $\sqrt{20-x} = x - 8$

6. (64-1) Résoudre les systèmes d' équations :

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

7. (64-2) Résoudre les systèmes d' équations :

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = y + 6x + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{6}{xy} = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y-x} = 2 \\ 5x = 4y \end{cases}$

8. (68-7) Résoudre les inéquations :

a) $2x + 4 \geq 0$ b) $2x + 4 < 0$ c) $-2x + 7 > \dfrac{x}{2} - 3$

d) $-2x + 7 \geq \dfrac{x}{2} - 3$ e) $-x^2 + 4x \geq 2x - 3$ f) $-x^2 + 4x < 2x - 3$

9. (68-7) Résoudre les systèmes d'inéquations :

a) $\begin{cases} x+3<7 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\leq 13+4x \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\geq 13+4x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-7x+6\leq 0 \\ 3x+2>17 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-7x+6\leq 0 \\ 2x+5<7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2-7x+6\leq 0 \\ 2x+5\leq 7 \end{cases}$

10. (71-6) Résoudre :

a) $x+\sqrt{25-x^2}=2x+1$ b) $3x+\sqrt{6x+10}=35$

c) $x+1-\sqrt{5x+1}=0$ d) $\sqrt{4x^2+7x-2}=x+2$

11. (71-14) Résoudre :

a) $(x-2)(x^2-2x-3)=0$ b) $x(x^2+3x+2)=0$

c) $(x^2-3x)(2^{x+1}-1)=0$ d) $(x+5)\log_2(x-3)=0$

e) $(x^4-5x^2+4)(5^x-10)=0$ f) $(x^2+5)(\sqrt{x}-3)=0$

12. (71-13) Factoriser et résoudre :

a) $x^3-4x=0$ b) $x^3+x^2-6x=0$

c) $x^3+2x^2-x-2=0$ d) $x^3-x^2-5x-3=0$

13. (72-18) Résoudre :

a) $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy+2y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ xy-y^2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x(x-y)=2y^2-8 \end{cases}$

14. (72-19) Résoudre :

a) $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2+2y^2=35 \\ x^2-2y^2=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32 \\ x^2-y^2+x-y=28 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+2y^2+x+1=0 \\ x^2-2y^2+3x+1=0 \end{cases}$

15. (72-20) Résoudre:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20} \\ x+2y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2-2y+1=x \\ \sqrt{x}+y=5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1}=y+1 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

16. (72-21) Résoudre:

a) $\begin{cases} xy=15 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy=12 \\ x^2-5y^2=16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy=4 \\ (x+y)^2=25 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{82}{9} \\ xy=-1 \end{cases}$

17. (72-21) Résoudre:

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2^x-2^y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ x-y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^{x+1}-y=0 \\ 2^x+y=12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log x-\log y=1 \\ x+y=22 \end{cases}$

18. (72-23) Résoudre les inéquations :

a) $\dfrac{7-3x}{2}<x+1$ b) $\dfrac{x+4}{3}+3\geq\dfrac{x+10}{6}$

c) $2x-2(3x-5)<x$ d) $x-1-\dfrac{x-1}{2}<0$

19. (72-24) Résoudre les inéquations :

a) $x^2+2x-3>0$ b) $x^2-3x-10\leq 0$

c) $x^2-4x-5<0$ d) $2x^2+9x-5\geq 0$

20. (72-25) Résoudre les inéquations :

a) $-x^2+3x-2\geq 0$ b) $-x^2+2x+3\leq 0$

c) $x^2-2x-7>5-x$ d) $x^2<\dfrac{x+7}{6}$

21. (72-27) Résoudre les inéquations :

a) $3x(x+4) - x(x-1) < 15$

b) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x > 0$

c) $\frac{x^2-9}{5} - \frac{x^2-4}{15} < \frac{1-2x}{3}$

22. (72-29) Résoudre les systèmes d'inéquations:

a) $\begin{cases} \frac{x+2}{4} < \frac{x}{2} - 3 \\ \frac{8-x}{3} < \frac{1+x}{2} - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{2x+2}{3} > \frac{3x-7}{6} \\ \frac{2x-1}{4} + 2x < \frac{2x-9}{4} \end{cases}$

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{3x+1} = e^{2x-5}$ 2) $e^{x} - e^{-x} = 0$ 3) $e^{x^2-8} = e^{2x}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x-3} = 1$ 2) $e^{\frac{1}{x^2-1}-1} - 1 = 0$ 3) $e^{2x-1} \times e^{-3x-5} = 1$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{4x-7} = e$ 2) $e^{3x} = 5$ 3) $-3e^{x} + 8 = e^{x}$

3 Résoudre les équations suivantes

a) $3^{x^2-5} = 81$ b) $2^{x+1} = \sqrt[3]{4}$

c) $4^{x} + 4^{x+2} = 272$ d) $2^{x} + 2^{x+3} = 36$

e) $5^{x} = 193$ f) $2^{x^2-2} = 835$

4 Résoudre les équations suivantes

a) $\log_2(2x-1) = 3$ b) $\log_2(x+3) = -1$

c) $\log 4x = 2$ d) $\log(x-2) = 2{,}5$

e) $\log(3x+1) = -1$ f) $\log_2(x^2-8) = 0$

5 Résoudre les équations suivantes

a) $2^{x+1} = \sqrt{8}$ b) $\sqrt{3^{x}} = 17$

c) $10^{1-x^2} = 0{,}001$ d) $81\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 3^{x+2}$

6 Résoudre les équations suivantes

a) $3 \cdot 5^{x} + 5^{x+1} = 200$

b) $7 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^{x} = -\frac{3}{4}$

c) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} - 5 \cdot 3^{x} = 108$

d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 224$

7 Résoudre les équations suivantes

a) $\log_5(2x-3) = 1$ b) $\log_4\left(\frac{x+1}{2}\right) = -2$

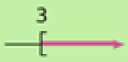
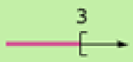
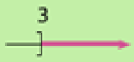
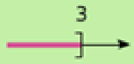
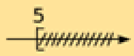
c) $\log_2(\sqrt{x}-1) = 3$ d) $\log(2^{x}-15) = 0$

8 Résoudre les équations suivantes

a) $2\log_3 x - \log_3 4 = 4$ b) $\log_2 x - \log_2 3 = 2$

c) $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$ d) $\log(x-9) - \log x = 1$

Coche les bonnes réponses :

		R1	R2	R3	R4
1	Parmi les nombres suivants, des solutions de l'inéquation $2x + 7 \leqslant 3x + 5$ sont...	-1	0	3	2
2	Le nombre 3 est solution de l'inéquation...	$3x + 7 < x - 3$	$2x - 5 \geqslant 1$	$4x - 4 > x + 1$	$(x + 7)^2 > 80$
3	L'ensemble des nombres strictement supérieurs à 3 est représenté par...				
4	L'inéquation qui a pour solutions tous les nombres inférieurs ou égaux à -2 est...	$3x < -6$	$x + 2 \geqslant 4x + 8$	$-5x \leqslant 10$	$8 \geqslant x + 10$
5	$3x + 2 \leqslant 2x + 1$ possède exactement les mêmes solutions que...	$3x \leqslant 2x - 1$	$2x + 1 \geqslant 3x + 2$	$x \leqslant 1$	$-x \leqslant -1$
6	Le produit de a par 7 est strictement plus grand que la moitié de a retranchée à 12, donc a est solution de...	$7a > 12 - 2a$	$7a > \frac{a}{2} - 12$	$7a > 12 - \frac{a}{2}$	$12 - \frac{a}{2} < 7a$
7	Un nombre est supérieur ou égal à -3 donc...	son triple est strictement supérieur à -9	son opposé est inférieur ou égal à 3	son double peut être égal à -10	en ajoutant 5, le résultat est positif
8	L'inéquation $2x + 5 \leqslant 2x + 6$...	n'a pas de solution	admet 7 comme solution	a une infinité de solutions	admet tout nombre positif comme solution
9	Les abscisses des points de cet axe représentés en couleur correspondent... 	aux nombres strictement supérieurs à 1,5	aux nombres strictement inférieurs à 1,5	aux nombres inférieurs ou égaux à 1,5	aux nombres supérieurs ou égaux à 1,5
10	L'ensemble des nombres qui ne sont pas solutions de l'inéquation $x + 3 > 2x - 2$ est représenté par...				

EXERCICE 4A.1 - MARSEILLE 2000.

Une salle de spectacles propose des spectacles pour un tarif A et des spectacles pour un tarif B.
Laura réserve 1 spectacle au tarif A et 3 spectacles au tarif B. Elle paie 480 F.
Michel réserve 2 spectacles au tarif A et 1 spectacle au tarif B. Il paie 410 F.
On cherche à calculer le prix d'un spectacle au tarif A et d'un spectacle au tarif B.
Pour faire ces calculs, ton professeur te propose de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 480 \\ 2x + y = 410 \end{cases}$$

1. Que représentent dans le système les lettres x et y ?
2. Quelle information donnée dans l'énoncé est traduite par l'équation « $x + 3y = 480$ » ?
3. Quelle information donnée dans l'énoncé est traduite par l'équation « $2x + y = 410$ » ?
4. Résoudre le système.

EXERCICE 4A.2 - AMIENS 1998.

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 42x + 80y = 1\,514 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

2. Pour un concert de jazz, les places valent 42 F ou 80 F. Une association a acheté 27 places pour un montant de 1 514 F.
Combien de places de chaque sorte l'association a-t-elle achetées ?

EXERCICE 4A.3 - NANTES 2000.

Un club de kayak doit renouveler son matériel pour la nouvelle saison. Lors d'une première commande, trois kayaks et cinq pagaies sont achetés pour la somme de 8 500 F. On décide de compléter l'équipement du club par une nouvelle commande ; le club achète deux autres kayaks et trois autres pagaies pour la somme de 5 600 F.

Calculer le prix d'un kayak et le prix d'une pagaie.

EXERCICE 4A.4 - ASIE 2000.

Chez le pépiniériste Beauplant, une promotion est réalisée sur un lot d'arbres fruitiers.
Mme Fleur achète 4 poiriers et 6 noisetiers pour 670 F.
Mr Dujardin achète 6 poiriers et 10 noisetiers pour 1 060 F.
On cherche le prix d'un poirier et le prix d'un noisetier.

1. Écrire un système d'équations traduisant les données du problème.
2. Résoudre ce système pour trouver le prix d'un poirier et le prix d'un noisetier.

EXERCICE 4A.5 - MARSEILLE 1999.

1. Résoudre par la méthode de votre choix le système :

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 7x + 5y = 104 \end{cases}$$

2. Une rose coûte 8 F de plus qu'une marguerite. Un bouquet de 7 roses et 5 marguerites coûte 104 F.

Quel est le prix d'une rose ?

Quel est le prix d'une marguerite ?

EXERCICE 4A.6 - PARIS 1999.

Pour équiper une salle de réunion, Mr Dupont achète des chaises et des tabourets.

- Chaque chaise coûte 200 F et chaque tabouret 80 F. Il paie au total 6 600 F.
- Il a acheté 5 chaises de plus que de tabourets.

Quel est le nombre de chaises et tabourets ?hetés par Mr Dupont ?

EXERCICE 4A.7 - CAEN 2000.

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14\,220 \end{cases}$$

2. Dans un parc zoologique, la visite coûte 30 F pour les adultes et 18 F pour les enfants. A la fin de la journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 14 220 F.

Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour là, quel est le nombre d'enfant ? Quel est le nombre d'adultes ?

EXERCICE 4A.8 - CLERMONT-FERRAND 1998

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ 2x + 3y = 25{,}5 \end{cases}$$

2. Pierre vient de commander 3 pains au chocolat et 2 croissants à la boulangerie. Pour cet achat, il a payé 27 francs. Soudain il se ravise et dit au boulanger :

- Excusez-moi, je me suis trompé, c'est le contraire. Pouvez-vous me donner un pain au chocolat de moins et un croissant de plus ?
- Bien sûr, répond le boulanger.

Il fait l'échange et rend 1,50 franc à Pierre.

Trouver, en justifiant la réponse, le prix d'un pain au chocolat et celui d'un croissant.

EXERCICE 4A.9 - LYON 2000.

Trois cahiers et un stylo coûtent 57 F.

Cinq cahiers et trois stylos coûtent 107 F.

Calculer le prix d'un cahier et le prix d'un stylo.

AUTOEVALUATION CHAPITRE 3

1. Résolvez les équations suivantes :

a) $\sqrt{x+1} - x = \frac{x-7}{4}$ b) $\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{5}{2} = 0$

2. Résolvez les systèmes :

a) $\begin{cases} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = 15 \\ 4x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

3. Résolvez les équations suivantes :

a) $10^{2x-1} = 0{,}001$ b) $25^x = 500$

c) $2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{17}{8}$ d) $\frac{1}{2}\log_2(3x+3) - \frac{1}{2}\log_2(2x-3) = \log_2 2$

4. Résolvez

a) $3x^2 - 5x - 2 \le 0$ b) $\begin{cases} 2x - 3 < 4 \\ 4 - x \ge -1 \end{cases}$

5. Un commerçant veut vendre à 60.000€ les ordinateurs qu'il a dans le magasin. Mais il y en a deux en panne et veule vendre les autres 50€ plus chers pour gagner le même.
   Combien d'ordinateurs il y avait ?, Quel était le prix à vendre ?

6. Les sommes des diagonales d'un losange sont égales à 42 m et son aire est 216 m^2. Quelle est la valeur du périmètre du losange ?

7. Dans une classe il y a 5 garçons de plus que de filles. On sait qu'il y a plus de 20 élèves, mais moins de 25. Combien d'élèves peut-il y avoir dans la classe ?

8. Combien de litres de vin de 5€/l on doit mélanger avec 20 l d'un autre vin de 3,50€/l pour avoir un prix du mélange inférieur à 4€/l ?

1. CONCEPT DE FONCTION

Une **fonction** est une relation entre deux ensembles, établie de telle manière qu'à chaque élément (x) de l'ensemble de départ est associé, au plus, un élément (y) de l'ensemble d'arrivée.

La variable x est appelée **variable indépendante**, et la variable y, **variable dépendante.**

Ensemble de définition et image d'une fonction

L'ensemble de définition *de* f est l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe. On le lit en faisant attention aux conventions graphiques : courbe illimitée, extrémité exclue ou non.
D s'appelle ***l'ensemble de définition** de f*
f(x) s'appelle ***l'image** de x par f*
Si k est donné, les solutions dans D de l'équation f(x)=k s'appellent *les antécédents de k par f*

2. DIFFÉRENTES FAÇONS POUR EXPRIMER UNE FONCTION

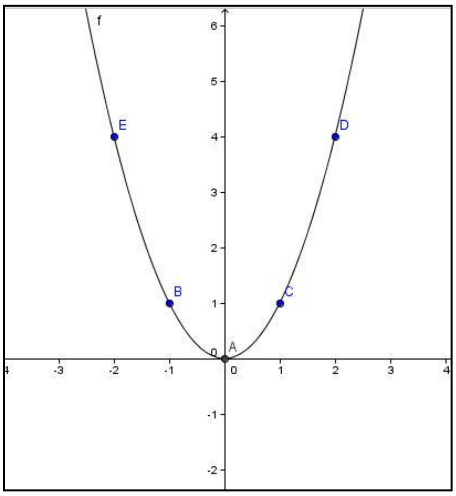
- Graphique

Les couples de valeurs se rapportant à une fonction (x,y) sont des données d'un point du plan. La représentation graphique d'une fonction, c'est l'ensemble des points (x, y).

On représente la variable indépendante, x, en abscisses et la variable dépendante, y, en ordonnées.

Ex : Le graphique de la fonction

$y= x^2$



- Énoncé

Le rapport entre les variables d'une fonction peut être exprimé d'une façon verbale.
Ex : « à chaque nombre on associe son carreau »

- Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=x^2$	4	1	0	1	4

- Équation ou expression algébrique

  On note par y=f(x) et elle est appelée équation de la fonction.

  - l'élément *y* est appelé l'image de *x*
  - l'élément *x* est appelé un antécédent de *y*

  Ex : « $y = x^2$ ou $f(x)= x^2$ »

3. ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de f contient toutes les valeurs de x qui ont une image par f

donc, x appartient à l'ensemble de définition si f(x) existe; réciproquement, f(x) existe si x appartient à l'ensemble de définition.ç

Méthode :

Pour chercher l'ensemble de définition de f, on cherche les valeurs de x telles que f(x) existe

Pour cela, on cherche à résoudre:

- Les équations obtenues en écrivant que les dénominateurs sont différents de 0, puisque 0 n'a pas d'inverse
- Les inéquations obtenues en écrivant que les quantités sous les racines carrées sont positives, puisque √a est défini seulement lorsque a≥0
- Les inéquations obtenues en écrivant que les quantités à 'l'intérieur' des logarithmes sont strictement positives, puisque ln(a) est défini seulement lorsque a>0

  Exemples :

1) $f(x)=x^3-5x^2+6$

Dans l'expression f(x), il n'y a pas de dénominateurs, ni de racines carrées, ni de logarithmes

<u>donc</u> f peut être définie sur $\mathbb{R}$, alors **D(f)=** $\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x^2-x^2-1}{6}$

Dans l'expression f(x), le dénominateur ne s'annule pas

<u>donc</u> f peut être définie sur $\mathbb{R}$, alors **D(f)=** $\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{x^2-x^2-1}{x^2-1}$

L'expression du dénominateur $x^2-1=(x-1)(x+1)$ s'annule pour x=-1 ou x=1

donc f peut être définie sur $\mathbb{R}$ -{-1; 1}, alors **D(f)= $\mathbb{R}$ -{-1; 1}**

4) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

L'expression sous la racine carrée est positive ou nulle pour $x \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$

donc f peut être définie sur $]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$,

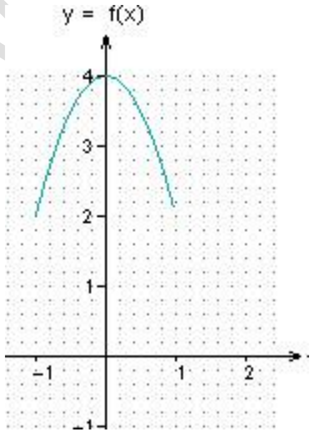
alors **D(f)=** $]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$

4. CONTINUITÉ- discontinuité

Continue-discontinue

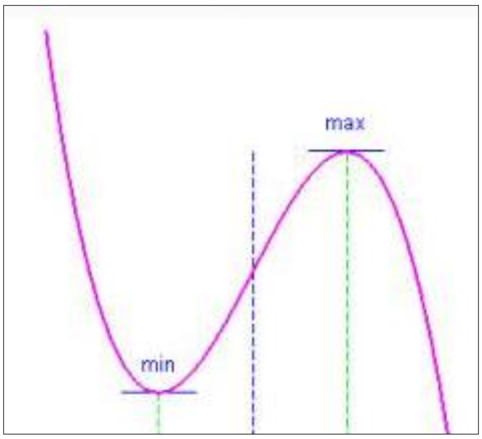
Intuitivement, fonction dont la courbe n'est interrompue nulle part. On peut en tracer le graphique sans lever le crayon.

Même si une fonction continue sur un intervalle [*a*, *b*] doit être définie pour tout élément de cet intervalle, il faut aussi mentionner que son image doit aussi ne présenter aucun discontinuité.



5. SENS DE VARIATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I=(a,b)
f est **croissante** sur I lorsque :
Quels que soient a et b dans I, si a<b, alors f(a)<f(b)
f est **décroissante** sur I lorsque :
Quels que soient a et b dans I, si a<b, alors f(a)>f(b)
f est **constante** sur I lorsque :
Quels que soient a et b dans I, si a<b, alors f(a)=f(b)



- Extremums d'une fonction

Soit a appartenant à D

- (a, f(a)) est le maximum . Le maximum c'est tout simplement la plus grande valeur atteinte par la fonction.
- (a, f(a)) est le minimum . Le minimum c'est tout simplement la plus petite valeur atteinte par la fonction.

- ❖ **Taux de variation moyenne**

La fonction *f* est définie sur l'intervalle *[a,b]*
Le taux de variation de *f* entre *a* et *b* est :

$$T.V.M.de\ f\ en\ [a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interprétation géométrique.
Le taux de variation est le coefficient directeur de la droite, nommée sécante.

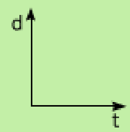
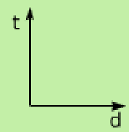
6. TENDANCE ET FONCTION PÉRIODIQUE

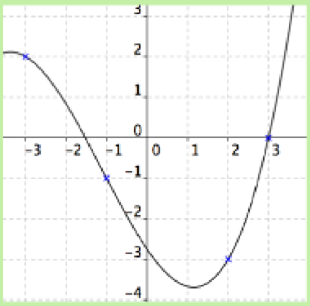
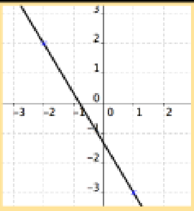
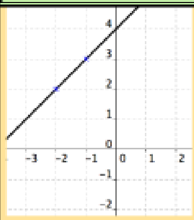
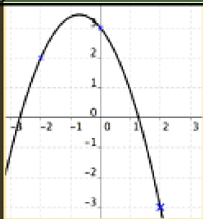
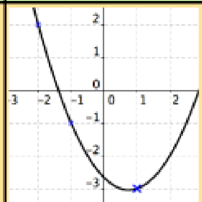
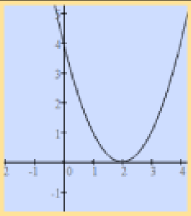
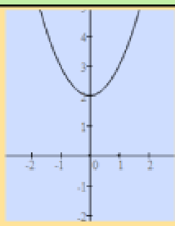
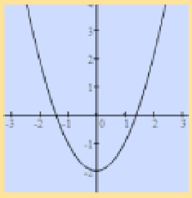
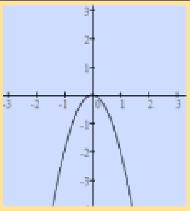
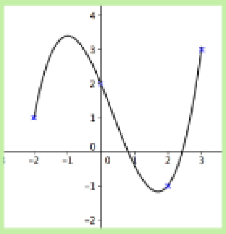
Tendance. Il y a de fonctions dont on peut dire comme seront loin de l'intervalle où sont connues parce qu'elles ont une tendance très claire.

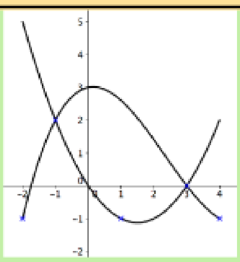
FONCTION PÉRIODIQUE de période T. On dit des fonctions tels que f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=.. pour toutes les valeurs de l'ensemble de définition.

QCM

Coche les bonnes réponses :

		R1	R2	R3	R4
1	La fonction z associe à chaque instant t la distance d parcourue par une voiture.	On note $z(t) = d$	On note $z(d) = t$	On la représente usuellement : 	On la représente usuellement : 
2	Voici l'algorithme qui calcule l'image d'un nombre par une fonction f : • Saisir x ; • Calculer le triple de x ; • Retirer 5 ; • Élever le résultat au carré ; • Ajouter 4 ; • Afficher le résultat.	L'expression de f est : $f(x) = (3x - 5)^2 + 4$	L'expression de f est : $f(x) = 3(x + 5)^2 - 4$	L'expression de f est : $f(x) = 3(x - 5)^2 + 4$	L'expression de f est : $f(x) = (3x - 5^2) + 4$

<table>
<tr><td>3</td><td></td><td>$f(3) = -2$</td><td>$f(2) = -3$</td><td>$f(-3) = 2$</td><td>$f(-3) = -2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Soit h une fonction telle que $h(3) = -8$</td><td>L'image de -8 par la fonction h est 3</td><td>La représentation graphique de la fonction h passe par le point A(3 ; − 8)</td><td>La représentation graphique de la fonction h passe par le point B(− 8 ; 3)</td><td>L'image de 3 par la fonction h est − 8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Soit g une fonction telle que
Soit $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-5}$</td><td>$g(0) = -\dfrac{3}{5}$</td><td>$g(5) = 13$</td><td>$g(5) = 0$</td><td>$g(-1{,}5) = 0$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Voici un tableau de valeurs pour la fonction h :<table><tr><td>x</td><td>− 2</td><td>1</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>2</td><td>− 3</td></tr></table>h pourrait avoir pour représentation graphique :</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Soit f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x+5}{-3x-1}$</td><td>Tout nombre réel a une image par f</td><td>0 n'a pas d'image par f</td><td>$\dfrac{1}{3}$ n'a pas d'image par f</td><td>$-\dfrac{1}{3}$ n'a pas d'image par f</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Soit v une fonction définie par $v(x) = x^2 - 2$
La représentation graphique de v pourrait être :</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Voici un tableau de valeurs pour la fonction f :<table><tr><td>x</td><td>3</td><td>− 2</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>19</td><td>9</td></tr></table></td><td>$f(9) = -2$</td><td>3 est un antécédent de 19 par f</td><td>L'expression de f pourrait être : $f(x) = 3x + 10$</td><td>L'expression de f pourrait être : $f(x) = 2x^2 + 1$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Quelle(s) est (sont) la (les) phrase(s) vraie(s) ?</td><td>Un nombre peut ne pas avoir d'image par une fonction</td><td>Un nombre peut avoir plusieurs images par une fonction</td><td>Un nombre peut ne pas avoir d'antécédent par une fonction</td><td>Un nombre peut avoir plusieurs antécédents par une fonction</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Voici la représentation graphique de la fonction g
</td><td>L'équation $g(x) = 2$ admet 3 solutions</td><td>−2 est une solution de l'équation $g(x) = 1$</td><td>−1 est une solution de l'équation $g(x) = 2$</td><td>L'équation $g(x) = 4$ n'admet aucune solution.</td></tr>
</table>

12	Soit u la fonction définie par $u(x) = 2x - 2$	u est une fonction affine	-12 n'a pas d'antécédent par u	-2 est l'antécédent de 0 par u	4 est l'antécédent de 6 par u
13	 Voici la représentation graphique des fonctions f et g	-1 est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$	2 est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$	0 est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$	L'équation $f(x) = g(x)$ admet 2 solutions

Questions:

La fonction f, définie par $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ **, a pour ensemble de définition** ________________________________

La fonction f, définie par $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2}+1}$**, a pour ensemble de définition** ________________________________

La fonction f, définie par $f(x)=\sqrt{x-1}$**, a pour ensemble de définition** ________________________________

La fonction f, définie par $f(x)=\frac{5}{2x+14}$**, a pour ensemble de définition** ________________________________

La fonction f, définie par $f(x)=\frac{x+7}{7x}$ **, a pour ensemble de définition** ________________________________

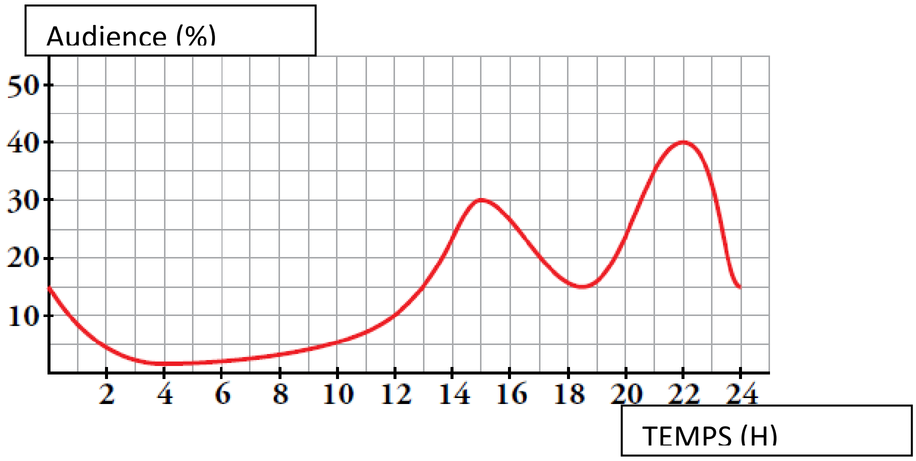
La fonction f, définie par $f(x)=x^2-100$**, a pour ensemble de définition** ____________________________

La fonction f, définie par $f(x)=\frac{x+1}{10}$ **, a pour ensemble de définition** ________________________________

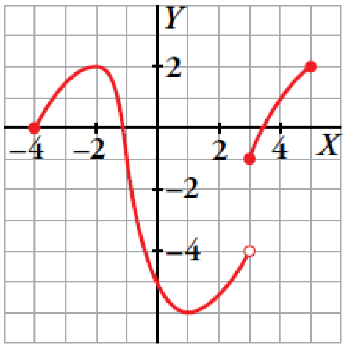
La fonction f, définie par $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x^2-9}$ **, a pour ensemble de définition** ____________________________

AUTOEVALUATION CHAPITRE 4

1. Cette courbe montre l'audience de la télévision sur toute une journée.



a) Décrivez-le, en tenant compte des moments les plus significatifs.
b) Quel est votre domaine de définition? Et son voyage?
c) Dessine dans ton cahier la courbe qui selon toi correspond à un dimanche.
d) Dessine la courbe du 31 décembre dans ton cahier.



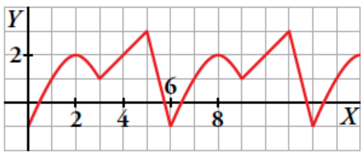
2. Regardez le graphique et trouvez:

a) Ensemble de définition et image
b) Maximum et minimum.
c) Intervalles de croissance et de décroissance.
d) Continuité et discontinuité.

3. Calcule l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $y = \sqrt{4x+8}$ b) $y = \dfrac{1}{x-7}$ c) $y = \sqrt{x^2+2x-15}$

4. a) Cette fonction est-elle périodique?
   b) Quelle est la période?
   c) Trouve les valeurs de la fonction aux points d'abscisse: x = 2; x = 4; x = 40; x = 42



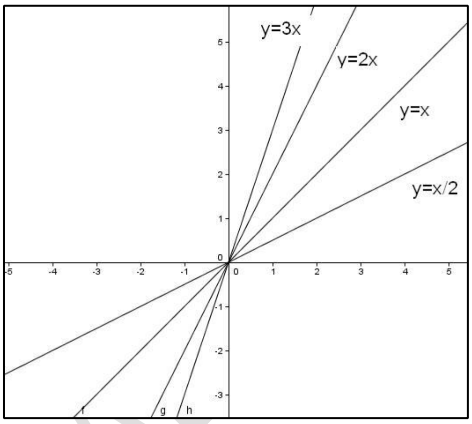
5. Représente la fonction $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 26$, définie dans [0, 5], donnant des valeurs x entières. Supposons que y soit la valeur en bourse, en millions d'euros, d'une entreprise qui vient de changer d'adresse, et que x est le nombre de mois depuis qu'il a changé d'adresse.
Décrivez son évolution au cours de ces cinq mois, en indiquant la croissance, la décroissance, les maximums et les minimums.

1. TYPES DE FONCTIONS

- Une **fonction linéaire** (ou de proportionnalité directe) est définie de la manière suivante $y = mx$, où m est un nombre réel quelconque.

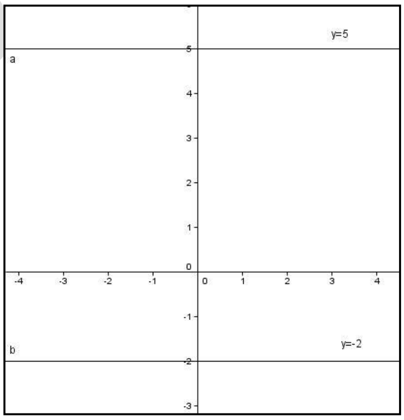
Les fonctions linéaires se représentent dans le plan par une droite. Cette droite passe par l'origine du repère (0, 0).
Le nombre **m** s'appelle coefficient directeur ou pente de la droite.

Si m>0, la fonction est croissante, et si m<0 la fonction est décroissante.



- Fonction **y = n**

Une droite ***parallèle à l'axe des abscisses*** possède une équation de la forme y=n où n est un nombre qui mesure la hauteur algébrique (positive ou négative) de la droite par rapport à l'axe des abscisses. On dit parfois qu'une telle droite est *horizontale*.



- **Fonction affine**

Une **fonction affine** est définie de la manière suivante $y = mx + n$, où m et n sont des nombres réels quelconques.
Les fonctions affines se représentent dans le plan par une droite
Le nombre m s'appelle coefficient directeur ou **pente** de la droite.

Le nombre n est l'ordonnée à l'origine. La droite coupe l'axe Y dans le point (0, n)

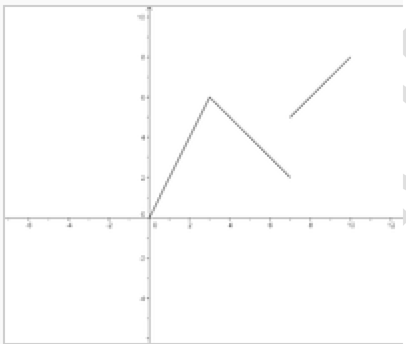
- **FONCTIONS DÉFINIES PAR MORCEAUX**

Fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la règle est constituée de plusieurs équations appliquées à différents intervalles du domaine. Les parties qui constituent une telle fonction peuvent appartenir à différentes familles de fonctions.

Ex :

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{si } x \in [0;3]; \\ 9-x & \text{si } x \in [3;7[; \\ x-2 & \text{si } x \in [7;10] \end{cases}$$

Définition d'une fonction affine par morceaux et représentation graphique.



Courbe représentative de la fonction définie ci-contre.

2. PARABOLES ET FONCTIONS QUADRATIQUES

Les fonctions $y = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, sont appelées quadratiques, la représentation graphique est une parabole continue dans tout $\mathbb{R}$

<u>Orientation de la parabole</u>

Si $a > 0$, la parabole sera ouverte vers le haut

Si $a < 0$, la parabole sera ouverte vers le bas

<u>Coordonnée importante</u>

Sommet de la parabole $= \left(\frac{-b}{2a} , \frac{4ac-b^2}{4a} \right)$

Représentation graphique

- **On calcule p=** $\boldsymbol{\frac{-b}{2a}}$
- **On calcule le tableau de valeurs proches au sommet**
- **Points d'intersection de la courbe avec les axes du repère**

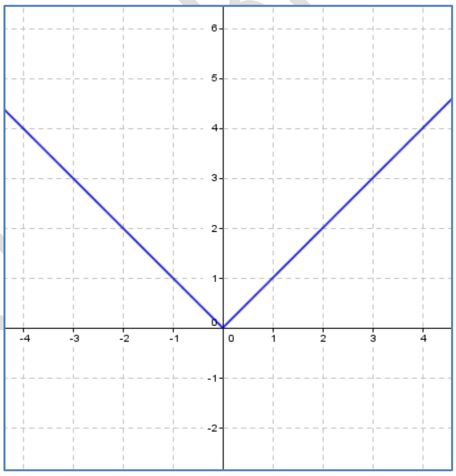
- ♦ Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée f(0), donc la courbe f coupe l'axe des ordonnées au point (0,f(0))

- ♦ Le point d'ordonnée 0 a pour abscisse la solution de l'équation f(k)=0 , donc la courbe f coupe l'axe des abscisses au point (k,0)

  Il faut résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

- **Graphique**

3. LA FONCTION VALEUR ABSOLUE



On appelle fonction valeur absolue, la fonction définie sur **R**, qui a tout réel x associe le réel noté |x| tel que :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

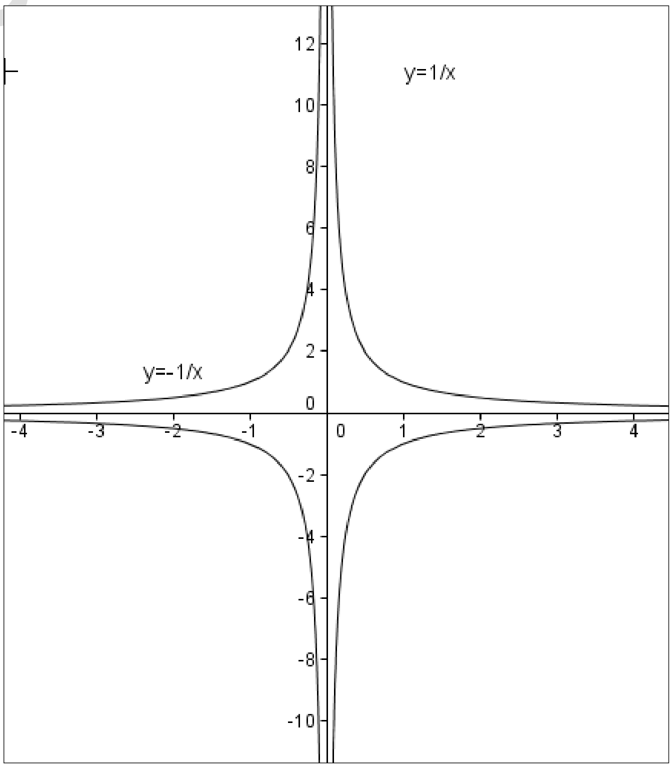
et $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$

4. FONCTIONS DE PROPORTIONNALITÉ INVERSE

L'expression algébrique d'une fonction traduisant une relation de proportionnalité inverse a pour forme générale

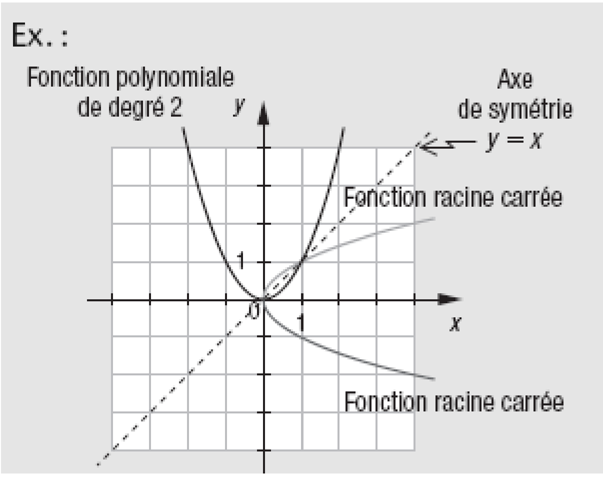
$$y = \frac{k}{x}$$

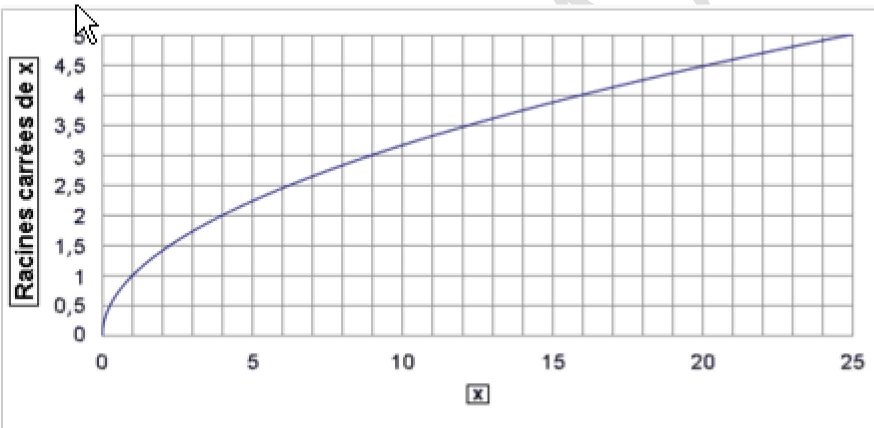
Son graphique est une hyperbole



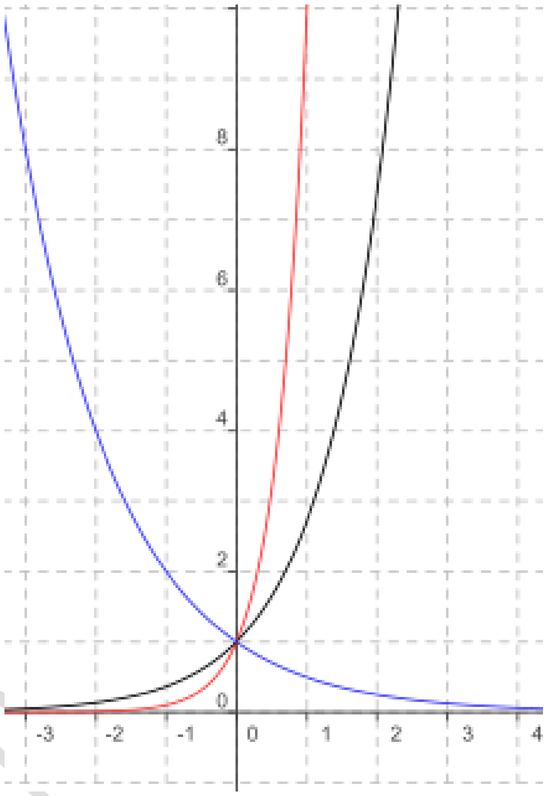
5. FONCTIONS RADICALES

La réciproque d'une fonction polynomiale de degré 2 correspond à une relation définie par deux fonctions racine carrée.





La règle d'une fonction racine carrée peut s'écrire sous la forme, canonique
$y = a\sqrt{x+b}\quad ou\;\; y = a\sqrt{-x+b}.$
La représentation graphique est une courbe dont l'ensemble de définition est
[-b, ∞) ou [-∞,b)



6. FONCTIONS EXPONENTIELLES

La fonction **exponentielle de base *a*** est la fonction notée $y = a^x$ qui, à tout réel x, associe le réel a^x. Elle n'a de sens que pour un réel a strictement positif.

C'est une fonction continue.

Elle peut être définie comme la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$, prenant la valeur (0,1) et (1, a)

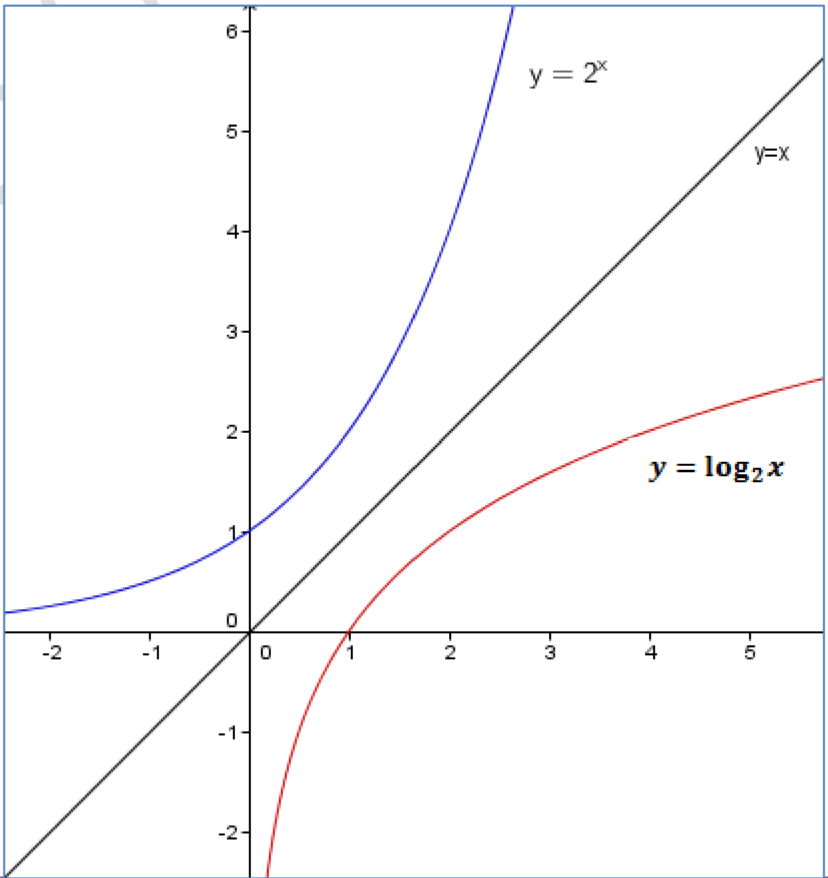
Si a>1, les fonctions sont croissantes.

Si 0<a<1, les fonctions sont décroissantes.

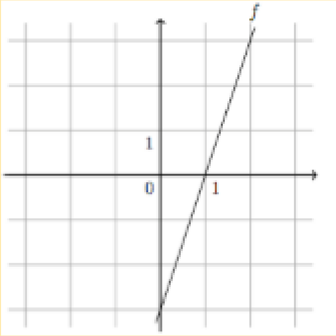
7. LES FONCTIONS LOGARITHMES

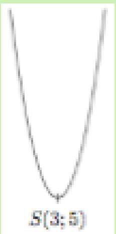
Les fonctions logarithmes y=$\log_a x$ avec a>1 est l'inverse (ou réciproque) de la exponentielle y=a^x. Définies pour valeurs plus grands que zéro. C'est-à-dire son **ensemble de définition** est **(0, +∞)**

La fonction est continue sur $\mathbb{R}$, prenant la valeur (1,0) et (a, 1)



QCM

1	Voici la représentation graphique d'une fonction affine f.  Quelle peut être l'expression de f ?	$f(x) = x - 3$	$f(x) = 3x + 1$	$f(x) = 3x - 3$	$f(x) = x + 1$
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
2	On donne ci-après le tableau de signes d'une fonction affine f. x: $-\infty$ … 3 … $+\infty$ $f(x)$: − 0 + Quelles expressions de la fonction f peuvent correspondre à ce tableau ?	$f(x) = 3 - x$	$f(x) = x - 3$	$f(x) = 12x - 4$	$f(x) = 4x - 12$
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
3	Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = -3x + 2$.	f est croissante.	f est décroissante.	$f(x) > 0$ si et seulement si $x > \frac{2}{3}$.	$f(x) > 0$ si et seulement si $x < \frac{2}{3}$.
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
4	Soit la fonction affine g définie par $g(x) = 4x - 2$. Quel est le tableau de signes de la fonction g ?	x: $-\infty$ … $\frac{1}{2}$ … $+\infty$ $g(x)$: + 0 −	x: $-\infty$ … 2 … $+\infty$ $g(x)$: − 0 +	x: $-\infty$ … 2 … $+\infty$ $g(x)$: + 0 −	x: $-\infty$ … $\frac{1}{2}$ … $+\infty$ $g(x)$: − 0 +
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
5	Pour tout nombre x, l'expression $3x^2 + 6x - 9$ est égale à :	$3(x-1)(x+3)$	$3x^2 - 6$	$3(x+1)^2 - 6$	$(x+3)^2$
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
6	Voici le programme de calcul de l'image d'un nombre x par une fonction f : • Choisir un nombre x ; • multiplier par 3 ; • retirer 5 ; • élever au carré ; • ajouter 4 ; • afficher le résultat.	L'expression de f est $f(x) = (3x-5)^2 + 4$.	L'expression de f est $f(x) = (3x+4)^2 - 5$.	L'expression de f est $f(x) = 3(x-5)^2 + 4$.	L'expression de f est $f(x) = (3x - 5^2) + 4$.

7	Soit la fonction g définie sur $[-5;5]$ par $g(x) = -2(x+3)^2+4$.	Le maximum de g est 3.	g n'admet pas de maximum sur $[-5;5]$.	Le maximum de g est 4.	Le maximum de g est 5.
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
8	On a dressé un tableau de valeurs d'une fonction du second degré : $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 7 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ \hline \end{array}$ À quelles expressions ce tableau peut-il correspondre ?	$f(x) = 2x^2-8x+7$	$f(x) = x^2+7$	$f(x) = 2(x-2)^2-1$	$f(x) = 2x^2-2x-1$
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
9	Vrai ou faux ?	Si $x > 2$ alors $x^2 > 4$.	Si $x^2 > 4$ alors $x > 2$.	Pour tout nombre x, $(x-3)^2+9 \geq 5$.	Pour tout nombre réel x, $(x+3)^2 = x^2+9$.
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
10	Voici la parabole représentant une fonction du second degré f.  Le point $S(3;5)$ est le sommet de la parabole. On a perdu les axes de coordonnées. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?	Le minimum de f est 3.	Si $f(0) = 8$, alors $f(6) = 8$.	Pour tout nombre réel x, $f(x)$ est positif.	f est croissante sur l'intervalle $[3;+\infty[$.
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP
11	Vrai ou faux ?	Si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.	Pour tout nombre réel x, $\frac{x^2}{x} = x$	Si $x > 3$ alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$.	Si $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$ alors $x < 3$.
	Pour chaque question, choisir V (vrai), F (faux) ou NSP (ne sait pas).	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP	○V ○F ○NSP

AUTOEVALUATION CHAPITRE 5

1. Représenter la fonction définie par morceaux dont l'équation est:

$$y = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x<-2 \\ x/2+3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -x+6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

2. Trouvez le sommet de chacune des paraboles suivantes et représentez-les:

   a) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ b) $y = x^2 + 4x - 5$

   c) $y = (5-x)(x+1)$ d) $y = -(x-3)^2 - 1$

   e) $y = 2x^2 + 4x$ f) $y = 9 - (x-1)^2$

   g) $y = 2(x-1)(x+3)$ h) $y = (x+2)^2 - 2x^2$

3. Exprimer ces fonctions sans utiliser la valeur absolue (du type défini par morceaux). Représente-les.

   a) $y = |2x+1|$ b) $y = \left|1 - \dfrac{x}{4}\right|$

   c) $y = |-x^2 + 4x - 3|$ d) $y = |9 - (x-2)^2|$

4. Représente les fonctions suivantes et indique leurs ensembles de définition:

   a) $y = \dfrac{1}{x+5}$ b) $y = \dfrac{3}{x} - 2$ c) $y = \dfrac{3}{x-1} + 1$

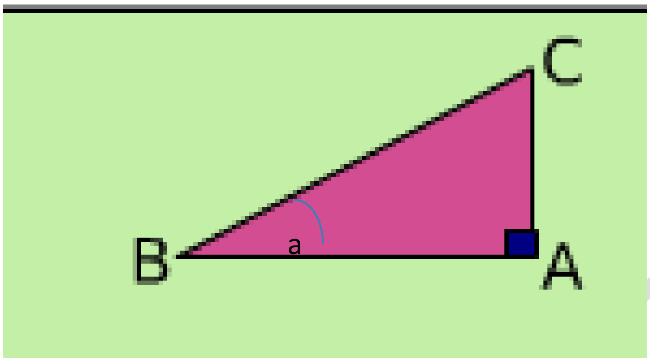
   d) $y = \sqrt{x+2}$ e) $y = 2\sqrt{x-1}$ f) $y = -\sqrt{x-3}$

5. Représenter ces paires de fonctions:

   a) $y = 1{,}2^x;\ y = log_{1,2}\, x$ b) $y = 2{,}2^x;\ y = log_{2,2}\, x$

6. Avec un ruban de bois de 3 mètres de long, nous voulons faire un cadre pour une peinture.
   a) Si la base du carré mesurait 0,5 m, combien mesurerait la hauteur? Et la surface?
   b) Quelle est la valeur de la surface pour toute base, x?
   c) Pour quelle valeur de base est la surface maximale obtenue? Combien vaut cette surface?

1. DÉFINITIONS D'UN ANGLE AIGU



- Le sinus de l'angle α

  $\text{Sin } \alpha = \dfrac{\text{Côté opposé à } \alpha}{\text{Hypoténuse}}$

- Le cosinus de l'angle α

  $\text{Cos } \alpha = \dfrac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{Hypoténuse}}$

- La tangente de l'angle α

  $\text{Tan } \alpha = \dfrac{\text{côté opposé a } \alpha}{\text{Côté adjacent à } \alpha}$

2. RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Soit α un angle aigu, c'est-à-dire un angle dont la mesure en degré est strictement comprise entre 0 et 90. Alors

$\sin^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ($\sin^2\alpha$ se lit « sinus carré de α » et est égal au carré de sin α soit $(\sin \alpha)^2$)

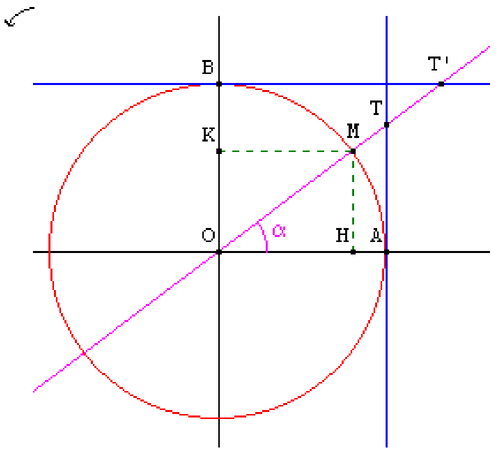
$$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto}$$

3. ANGLES REMARQUABLES

Angle en degrés	0º	30º	45º	60º	90º
Mesure α en radians	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$	$\frac{\Pi}{2}$
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4. COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE

On peut identifier chaque angle avec un point du plan.
Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, son périmètre est donc égal à 2π.



$\cos\ \alpha = \overline{OH}$

$\sin\ \alpha = \overline{OK}$

$\tan\ \alpha = \dfrac{\overline{OK}}{\overline{OH}} = \overline{AT}$

$\cot \alpha = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{OK}} = \overline{BT'}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Cercle trigonométrique : OM=1

On a la correspondance 2π radians = 360 degrés qui donne
x radians = $\frac{180}{\pi}$ x degrés et réciproquement x degrés = $\frac{\pi}{180}$ x radians
Le sens trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Soit α un réel et (a,b) le point correspondant du cercle trigonométrique.
Cos α est l'abscisse ; sin α est l'ordonnée c'est-à-dire (a, b) = (cos α, sin α)
Signe des sinus, cosinus et tangente dans les différents quadrants :

	I	II	III	IV
Angle α	De 0º à 90º	De 90º à 180º	De 180º à 270º	De 270º à 360º
Sin α	+	+	-	-
Cos α	+	-	-	+
Tg α	+	-	+	-

Valeurs des sinus, cosinus et tangente d'angles qui sont dans les axes de coordonnées :

Angle	0º	90º	180º	270º
Sinus	0	1	0	-1
Cosinus	1	0	-1	0
Tangente	0	Il n'existe pas	0	Il n'existe pas

4.1. Réduction des angles au premier quadrant

- Si α est un angle du second quadrant :

$$\text{Sin } \alpha = \sin(180º-\alpha)$$
$$\text{Cos } \alpha = -\cos(180º-\alpha)$$
$$\text{tg } \alpha = -\text{tg}(180º-\alpha)$$

- Si α est un angle du troisième quadrant :

$$\text{Sin } \alpha = -\sin(180º+\alpha)$$
$$\text{Cos } \alpha = -\cos(180º+\alpha)$$
$$\text{tg } \alpha = \text{tg}(180º+\alpha)$$

- Si α est un angle du quatrième quadrant :

$$\text{Sin } \alpha = -\sin(360º-\alpha)$$
$$\text{Cos } \alpha = \cos(360º-\alpha)$$
$$\text{tg } \alpha = -\text{tg}(360º-\alpha)$$

4.2. Angles complémentaires, supplémentaires et opposés

Fonctions trigonométriques des angles complémentaires

Si $\alpha+\beta = 90º$ alors $\boldsymbol{\beta = 90º-\alpha}$, les fonctions trigonométriques sont:

$$\text{Sin } \alpha = \cos\beta = \cos(90º-\alpha)$$
$$\text{Cos } \alpha = \sin\beta = \sin(90º-\alpha)$$
$$\text{Tg } \alpha = \frac{1}{tg\beta}$$

Fonctions trigonométriques des angles supplémentaires

Si $\alpha+\beta = 180º$ alors $\boldsymbol{\beta = 180º-\alpha}$, les fonctions trigonométriques sont :

$$\text{Sin } \alpha = \sin(180º-\alpha)$$
$$\text{Cos } \alpha = -\cos(180º-\alpha)$$
$$\text{tg } \alpha = -\text{tg}(180º-\alpha)$$

Fonctions trigonométriques des angles opposés

Si $\alpha+\beta = 360º$ alors $\beta = 360º-\alpha$ c'est-à-dire $\boldsymbol{\beta = -\alpha}$, les fonctions trigonométriques sont:

$$\text{Sin } \alpha = -\sin(-\alpha)$$
$$\text{Cos } \alpha = \cos(-\alpha)$$
$$\text{tg } \alpha = -\text{tg}(-\alpha)$$

4.3. Fonctions trigonométriques d'angles supérieurs à 360º

Pour calculer les fonctions trigonométriques d'un angle supérieur à 360º, on divise l'angle par 360º, et on calcule les fonctions trigonométriques du reste de la division.

5. APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

5.1. Calcule des longueurs et des aires

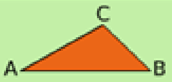
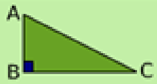
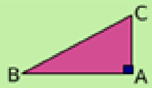
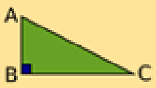
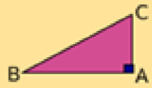
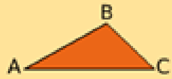
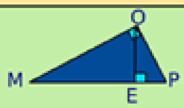
C'est, étant donné un côté et deux angles adjacents, ou un angle et deux côtés adjacents, ou à la rigueur deux côtés b et c et l'angle B, trouver le triangle correspondant, c'est-à-dire, a, b, c, A, B, C (et vérifier une des règles non appliquée dans le processus). On résout ce genre de problème à l'aide des formules précédentes

5.2. Calcule des distances inaccessibles

La trigonométrie, qui traite des relations entre les côtés et les angles des triangles, est un outil mathématique employé pour déterminer des distances inaccessibles en navigation, topographie, astronomie.

4ºESO CHAPITRE 6-7: TRIGONOMÉTRIE

Coche les bonnes réponses :

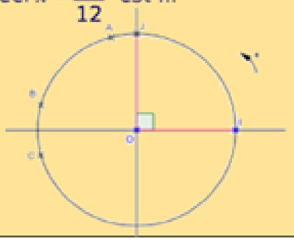
		R1	R2	R3	R4
1	[AC] est le côté adjacent à l'angle aigu $\widehat{BAC}$ dans le triangle...				
2	[AB] est le côté opposé à l'angle aigu $\widehat{BCA}$ dans le triangle...				
3	TGP est un triangle rectangle en P donc...	$\cos\widehat{TGP}=\frac{GP}{TG}$	$\sin\widehat{GTP}=\frac{GP}{TG}$	$TG^2 = TP^2 + PG^2$	$\tan\widehat{GTP}=\frac{GP}{TG}$
4	$\tan 45°=\frac{AB}{7}$ donc...	$AB = 7 \times \tan 45°$	$AB = \frac{\tan 45°}{7}$	$AB = \frac{7}{\tan 45°}$	$AB \approx 7$
5		$\sin\widehat{OMP}=\frac{OM}{OP}$	$\cos\widehat{OPE}=\frac{MO}{OP}$	$\tan\widehat{EPO}=\frac{OE}{PO}$	$\sin\widehat{OPM}=\frac{OE}{OP}$
6	LNT est un triangle rectangle en N tel que TN = 7 cm et LN = 5 cm. On a donc...	$\widehat{TLN}=\frac{5}{7}$	$\widehat{TLN}\approx 54°$	$\tan\widehat{TLN} = 1,4$	$\tan\widehat{TLN}\approx 0,7$
7	QRS est un triangle rectangle en R tel que SQ = 10 et RQ = 8 (en cm). On a donc...	$\widehat{RSQ} = 53°$	$\widehat{RSQ}\approx 37°$	$\widehat{RSQ} = 37°$	$\widehat{RSQ}\approx 53°$
8	Le triangle ISO est un triangle rectangle et isocèle en S donc...	$OI = SO \times \sqrt{2}$	$\frac{OS}{OI}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\widehat{IOS} = 1$	$\tan\widehat{OIS} = 1$
9	Le sinus d'un angle aigu est...	un nombre quelconque	un nombre supérieur à 1	un rapport de longueurs	compris entre 0 et 1
10	$\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ sont deux angles complémentaires donc....	$\tan\widehat{x} = \tan\widehat{y}$	$\cos\widehat{x} = \sin\widehat{y}$	$\sin\widehat{x} = \cos\widehat{y}$	$\sin\widehat{x} = \sin\widehat{y}$

4ºESO	CHAPITRE 6-7: TRIGONOMÉTRIE

Coche les bonnes réponses : (une seule bonne réponse par question)

		R1	R2	R3
1	Combien mesure en cm le périmètre d'un cercle de rayon 10 cm?	2π	10π	20π
2	$\cos(13\pi) = \dots$	-1	+ 1	0
3	Si $\cos(x) = -0{,}8$ environ alors une mesure approchée de x en degré, angle au centre associé au réel x, peut être ...	37°	-37°	143°
4	Si $\cos(x) = -0{,}8$ et $0 < x < \pi$ alors $\sin(x) = \dots$	-0,6	0,6	0,2
5	Si $\sin(x) = -0{,}8$ et $\frac{-\pi}{2} < x < 0$ alors $\cos(x) = \dots$	-0,6	0,6	-0,2

6	Parmi les réels suivants quels sont ceux qui sont associés à un même point du cercle trigonométrique ?	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$	10π et 11π	$\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$
7	Parmi les réels suivants quels sont ceux qui sont associés à un même point du cercle trigonométrique ?	$\frac{59\pi}{3}$ et $\frac{61\pi}{3}$	$\frac{-71\pi}{5}$ et $\frac{-81\pi}{5}$	$\frac{-41\pi}{6}$ et $\frac{41\pi}{6}$
8	Soit M le point associé à un réel x, sur le cercle trigonométrique. Si $x = 10\pi$ alors les coordonnées de M sont...	(1 ; 0)	(-1 ; 0)	(0 ; 1)
9	Soit M le point associé à un réel x, sur le cercle trigonométrique. Si $x = \frac{4\pi}{3}$ alors les coordonnées de M sont...	$\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10	Sur le cercle trigonométrique le point associé au réel $x = \frac{7\pi}{12}$ est ... 	le point A	le point B	le point C

EXERCICE 1.

A l'aide d'un quadrillage,

a. Construire un angle $\widehat{xOy}$ tel que $\tan\widehat{xOy} = \frac{5}{3}$.

Déterminer l'arrondi à 1° près de $\widehat{xOy}$ puis vérifier sur le dessin.

b. Construire un angle $\widehat{xOy}$ tel que $\tan\widehat{xOy} = \frac{4}{5}$.

Déterminer l'arrondi à 1° près de $\widehat{xOy}$ puis vérifier sur le dessin.

EXERCICE 2.

Sans utiliser le rapporteur, construire :

a. Un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$AC = 4{,}5 \text{ cm et } \sin\widehat{B} = \frac{3}{4} \;;$$

b. Un triangle PQR rectangle en Q tel que :

$$QR = 6 \text{ cm et } \tan\widehat{P} = \frac{2}{3} \;;$$

c. Un triangle STU isocèle en S tel que :

$$TU = 5{,}4 \text{ cm et } \tan\widehat{T} = 3.$$

EXERCICE 3.

Soit un triangle ABC rectangle en C.

On a : AC = 15 cm et AB = 17 cm.

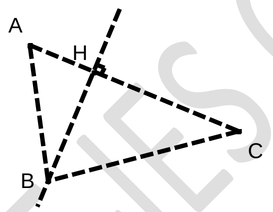
a. Déterminer BC.

b. Déterminer : $\sin\widehat{BAC}$; $\cos\widehat{BAC}$; $\tan\widehat{BAC}$.

c. Déterminer $\widehat{BAC}$ arrondi à 1° près.

EXERCICE 4.

Soit H le pied de la hauteur issue de B.
On a : BC=6,5, AH=2 et HC=5,2.



a. Faire une figure précise.

b. Calculer BH.

c. Calculer $\sin\widehat{HBC}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{HBC}$ (au degré près).

d. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$ (à 1° près).

EXERCICE 5.

1) Sans la calculatrice, compléter le tableau :

	cos x	sin x	tan x
a.	0,6	…	…
b.	$\frac{2}{5}$	…	…
c.	…	$\frac{1}{3}$	
d.	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	…	…

2) Simplifier les expressions suivantes :

- $(sin a + cos a)^2 + (sin a - cos a)^2$;

- $\dfrac{1}{\cos^2 a}$ - (1 – tan²a).

EXERCICE 6.

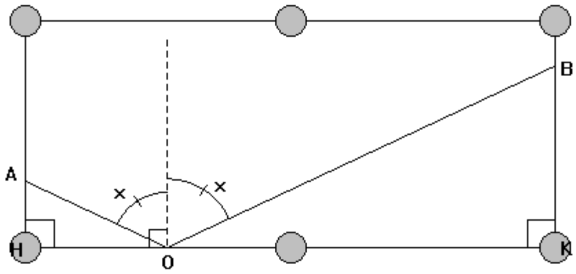
Un câble est tendu entre le sommet d'un poteau vertical de 12 m et le sol horizontal. Il forme un angle de 34° avec le sol.
Calculer la longueur du cable arrondie au dm .

EXERCICE 7.

Samuel nage à 50 m d'un phare. Il le voit sous un angle de 43°.
Quelle est la hauteur du phare (arrondie au dm).

EXERCICE 8.

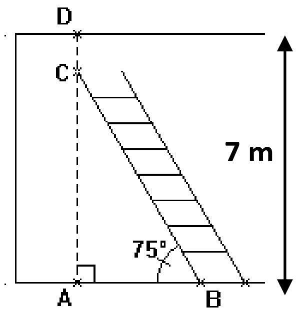
Jean est un grand amateur de billard, son coup préféré est la « bande avant » : la boule située en A doit aller frapper la boule placée en B mais auparavant, elle doit touchée la bande du billard. Lorsque la boule n'a pas d'effet, la perpendiculaire en O à la bande est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. On pose x = $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ et on donne : AH = 0,5 m, BK = 1 m et HK = 2,4 m.



a. Exprimer OH et OK en fonction de tan*x.*
b. En déduire la valeur arrondie de *x* à 1° près.

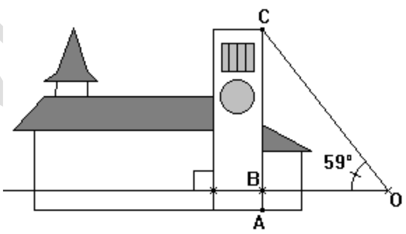
EXERCICE 9.

Une échelle de 6 m est appuyée contre un mur vertical de 7 m de haut. Par mesure de sécurité, on estime que l'angle que fait l'échelle avec le sol doit être de 75°.
Calculer la distance AB entre le pied de l'échelle et le mur (arrondie au cm).
A quelle distance CD du mur se trouve le haut de l'échelle (arrondie au cm) ?



EXERCICE 10.

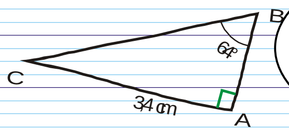
On veut mesurer la hauteur d'une cathédrale.



Grâce à un instrument de mesure placé en O à 1,5 m du sol, on mesure l'angle $\widehat{COB}$ et on trouve 59°. On donne OB =85 m.
Calculer la hauteur de la cathédrale (arrondie au mètre le plus proche).

① ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 64°$ et AC = 3,4 cm.
Calcule la longueur de [BC] arrondie au centième.

① On sait que : ABC est rectangle en A.
② On applique : la trigonométrie
③ On conclut : $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$



Donc $\sin 64° = \dfrac{3{,}4}{BC}$

Les produits en croix sont égaux : $BC \times \sin 64° = 3{,}4$

D'où $BC = \dfrac{3{,}4}{\sin 64°} \approx 3{,}78$ (en cm).

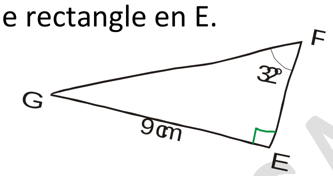
Donc [BC] mesure environ 3,78 cm.

On connaît l'angle $\widehat{ABC}$ et son côté opposé AC, et on cherche l'hypoténuse BC.
On choisit donc le sinus (« côté opposé sur hypoténuse »).

Pour le calcul de BC, on tape 3,4 ÷ sin 64 à la calculatrice et on arrondit au centième :
3,782846598... ≈ 3,78.
3,78 ou 3,79 Il y a un 2 après le 8, donc on arrondit à 3,78.

② *Recopie et complète :*

Enoncé : EFG est un triangle rectangle en E.
$\widehat{EFG} = 32°$, EG = 9 cm,
calcule EF au mm près.



Solution :
① On sait que : EFG est un … en …
② On applique : la …
③ On conclut : $\tan \widehat{\dots} = \dfrac{EG}{\dots}$

Donc $\tan \dots° = \dfrac{9}{\dots}$

Les produits en … sont …, donc :
… × tan …° = 9

Et donc $EF = \dfrac{9}{\tan \dots°} \approx \dots$

[EF] mesure environ … cm.

On connaît le côté *opposé* et on cherche le côté *adjacent*, donc on utilise la *tangente* !

Au mm près, ici c'est arrondir au dixième !

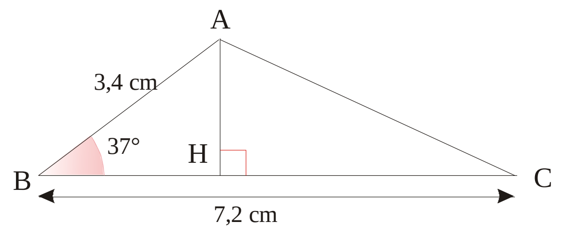
③ ABC est un triangle rectangle en A. Calcule la longueur demandée au mm près (*conseils : dessine à main levée et pense à **rédiger***) :

a) $\widehat{ABC} = 68°$; AB = 12 cm ; AC ≈ ?

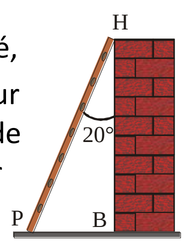
b) $\widehat{ACB} = 25°$; AB = 3,5 cm ; BC ≈ ?

c) $\widehat{ACB} = 48°$; AC = 7,4 cm ; BC ≈ ?

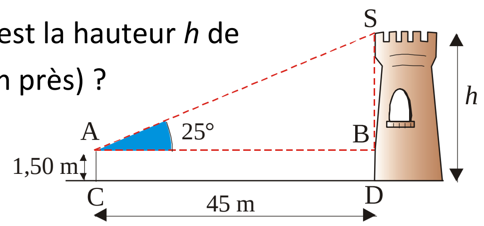
④ Calcule la longueur AH au mm près, puis l'aire de ABC arrondie au cm^2.



⑤ Pour un maximum de sécurité, une échelle doit former avec un mur un angle de 20°. Avec une échelle de 9 m, jusqu'à quelle hauteur de mur peut on monter (au cm près) ?



⑥ Quelle est la hauteur *h* de la tour (au cm près) ?



① **a)** *x* est un angle aigu tel que $\sin x = 0{,}3$. Déduis-en la valeur **exacte** de $\cos x$, puis **l'arrondi** au millième près de $\tan x$.
b) $\cos 35° \approx 0{,}819$. Déduis-en la valeur au millième de $\sin 55°$.

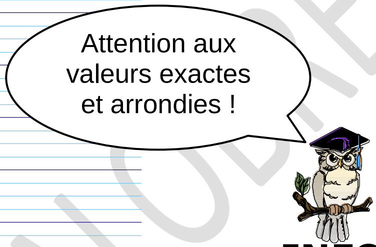
a) • $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x + 0{,}3^2 = 1$ d'où $\cos^2 x + 0{,}09 = 1$

$\cos^2 x = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$ donc $\cos x = \sqrt{0{,}91}$

• $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{0{,}3}{\sqrt{0{,}91}} \approx 0{,}314$

b) 35° et 55° sont des angles complémentaires, car $35° + 55° = 90°$.

Donc $\sin 55° = \cos 35° \approx 0{,}819$



INFO

② *Recopie et complète :*

Enoncé : $\cos 18° \approx 0{,}951$.
Déduis-en l'arrondi au millième de :
a) sin 18° ;
b) tan 18° ;
c) sin 72°.

Solution :
a) $\cos^2 18° + \ldots^2 \ldots° = 1$
$0{,}951^{\cdots} + \sin^{\cdots} 18° = 1$
$\sin^{\cdots} 18° = \ldots - 0{,}951^{\cdots} = 0{,}095599$
Donc $\sin 18° \approx \sqrt{\ldots} \approx 0{,}309$.
b) $\tan 18° = \dfrac{\ldots\ 18°}{\ldots\ 18°} \approx \dfrac{\cdots}{\cdots} \approx 0{,}325$.
c) 18° et 72° sont des angles …, donc :
$\sin 72° = \ldots \approx \ldots$

③ *x* est la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle. Sans calculatrice, calcule la valeur manquante dans chaque cas :

a) $\sin x = 0{,}6$; $\cos x = \ldots$; $\tan x = \ldots$

b) $\sin x = \ldots$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = \ldots$

c) $\sin x = \dfrac{15}{17}$; $\cos x = \dfrac{16}{34}$; $\tan x = \ldots$

d) $\sin x = \dfrac{10}{26}$; $\cos x = \ldots$; $\tan x = \dfrac{10}{24}$.

④ Soit *x* la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle, démontre en développant le carré que :
$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x.$$

⑤ Des angles particuliers…

a) $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, déduis-en les valeurs exactes de sin 45° et de tan 45°.

b) $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, déduis-en les valeurs exactes de cos 30° et de tan 30°.

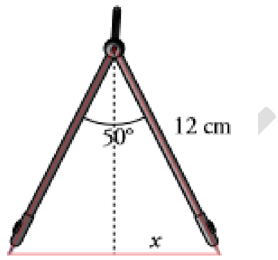
c) Sachant que $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, déduis-en les valeurs exactes de cos 60°, sin 60° et de tan 60°.

AUTOEVALUATION CHAPITRE 7

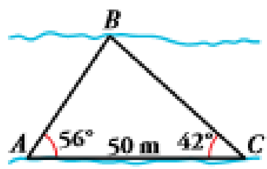
1. a) Si cos α=0,52 et α>90^o, calculer sin α et tg α

   b) Si tg β=$\frac{12}{5}$ et β< 90^o, calculer sin β et cosβ

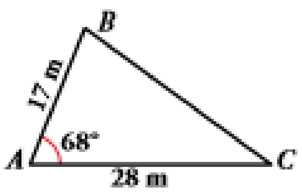
2. Les bras d'un compas, mesurant 12 cm, forment un angle de 50 °. Quel est le rayon de la circonférence qui peut être tracé avec cette ouverture?

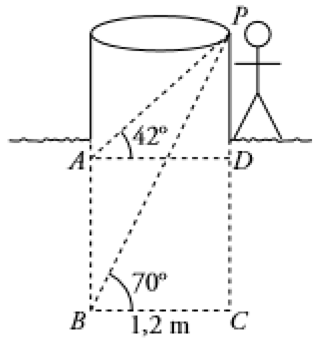


3. Pour mesurer la largueur d'un fleuve, on a pris les mesures indiquées sur le dessin. Calcule la largueur du fleuve.



4. Calcule la hauteur sur AC, puis l'aire de ABC et l'angle $\hat{C}$





5. Dans un verger il y a un puits de 1,2 m de large. Quand il est vide, nous voyons, à partir de la bordure, le bord opposé du fond à un angle de 70 ° avec l'horizontale. Lorsque l'eau monte, nous voyons le bord opposé de l'eau à un angle de 42 °. Quelle est la hauteur du puits? De combien a augmenté l'eau?

6. Si cos α = - 1/5 et tg α <0, indiquez dans quel quadrant est-il l'angle α, et calculer les autres rapports trigonométriques.

1. VECTEURS DANS LE PLAN

1.1 Éléments d'un vecteur

Soit A et B deux points distincts du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur défini par :

- Sa direction : celle de la droite AB
- Son sens : de A vers B
- Sa norme (sa longueur) est $|\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{AB}$ a pour origine A et pour extrémité B

1.2 Coordonnées de vecteurs

Soit $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$ les coordonnées de $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$

1.3 Calculer la norme de vecteurs

Soit $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vecteur, la norme est

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

1.4. Vecteurs équivalents et parallèles

Deux vecteurs sont équivalents s'ils ont la même norme, la même direction et le même sens. Les coordonnées sont égales.
Deux vecteurs sont parallèles s'ils ont la même direction. Les coordonnées sont proportionnelles.

2. OPÉRATIONS AVEC VECTEURS

2.1 . Somme et différence de deux vecteurs

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
Soit $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Opposé d'un vecteur:

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$, de même direction et de même norme que $\vec{u}$, mais de sens opposé à celui de $\vec{u}$.

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (0,0)$ Le vecteur de norme nulle est appelé le vecteur nul; il est noté $\vec{0}$. Il n'a ni sens, ni direction.

$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

2.2. Multiplication d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et k un réel, les coordonnées de $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$

2.3. Somme d'un point et d'un vecteur

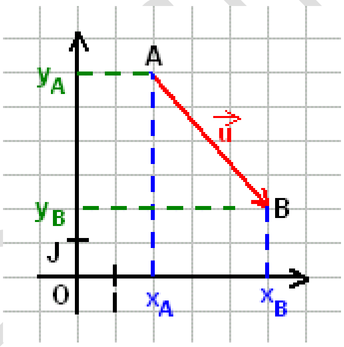
Un point A a pour coordonnées (a_1, a_2) et un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$, la somme est un autre point avec coordonnées

$$A' = A + \vec{u} = (a_1, a_2) + (u_1, u_2) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$$

3. CALCULER LES COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Propriété (coordonnées d'un vecteur)

Soit (O ; I ; J) un repère. Soient A(x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points.
$\overrightarrow{OA}$= (x_A ; y_A)
$\overrightarrow{OB}$ = (x_B ; y_B)
Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$)



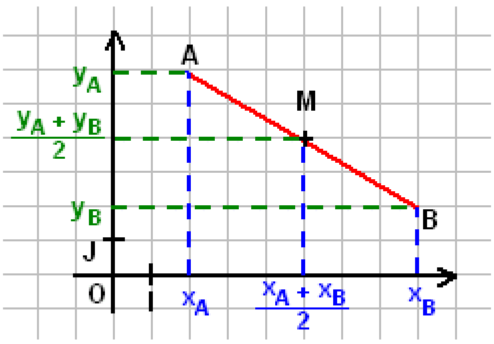
4. CALCULER LES COORDONNÉES D'UN MILIEU

Propriété (coordonnées du milieu d'un segment)

Soit (O ; I ; J) un repère. Soient A(x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points.

Alors le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



5. POINTS ALIGNÉS

Les points A(x_A ; y_A) , B (x_B ; y_B) et C(x_C ; y_C), trois points sont alignés s'ils se situent sur une même droite, c'est-à-dire, si les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont proportionnelles.

6. ÉQUATIONS DE LA DROITE

- **DROITE VECTORIELLE**

Une droite est entièrement définie par la donnée d'un de ses points et d'un vecteur directeur.

Soit A= (a, b) point et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vecteur directeur d'une droite

$(x, y) = (a, b) + t \cdot (v_1, v_2)$

- **RÉPRESENTATION PARAMÉTRIQUE DE LA DROITE**

Soit A= (a, b) point et $\vec{v}$ =(v_1, v_2) vecteur directeur d'une droite

$(x, y) = (a, b) + t \cdot (v_1, v_2)$

La représentation paramétrique de la droite:

$\begin{cases} x = a + t \cdot v_1 \\ y = b + t \cdot v_2 \end{cases}$ avec *t* réel

- **ÉQUATION**

Soit $\begin{cases} x = a + t \cdot v_1 \\ y = b + t \cdot v_2 \end{cases}$ avec *t* réel

En posant $\begin{cases} t = \dfrac{x-a}{v_1} \\ t = \dfrac{y-b}{v_2} \end{cases}$ alors $\dfrac{x-a}{v_1} = \dfrac{y-b}{v_2}$

- **ÉQUATION POINT-PENTE ET RÉDUITE**

Équation point-pente

$y - b = m(x - a)$ $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ S'Appelle coefficient directeur ou **pente**

Les droites parallèles ont la même pente

Équation réduite

$y = mx + n$

m s'appelle coefficient directeur ou **pente**

n s'appelle **l'ordonnée à l'origine**

La pente d'une droite est le réel m= tgα .

L'angle α représente l'angle entre l'axe des abscisses et la droite.

- **ÉQUATION CARTÉSIENNE**

L'équation cartésienne a la forme *Ax+By+C = 0* avec A, B, et C sont réels.

Le vecteur directeur à partir d'une équation cartésienne est $\vec{v}$ = *(-B, A)*

7. DROITES. PARALLÉLISME ET PERPENDICULARITÉ

La direction d'une droite est déterminé par le vecteur directeur $\vec{v} = (v_1, v_2)$, ou par la pente $m = \frac{v_2}{v_1}$

Soit une droite **d** avec un vecteur directeur $\vec{v} = (v_1, v_2)$ et de pente **m.**
Soit une droite **d'** avec un vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et de pente **m'.**

Les droites parallèles ont la même pente *c'est-à-dire : m = m'*

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{u_2}{u_1}$$

Les droites perpendiculaires vérifient : *m·m'=-1 ou m'=* $\frac{1}{m}$

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{u_1}{u_2}$$

8. DROITES PARALLÈLES AUX AXES

Droites parallèles aux axes

- Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet une équation de la forme ***x = k***

- Si la droite est parallèle à l'axe des abscisses (la pente m=0), dans ce cas, la droite a une équation de la forme ***y = n***

9. INTERSECTION DE DEUX DROITES

Dans le plan, deux droites peuvent être parallèles, confondues ou sécantes.

- Parallèles : les droites ont la même direction et n'ont pas de points communs.
- Confondues : les droites ont la même direction et tous les points sont communs.

- Sécantes : les directions sont différentes et ont seulement un point commun. Les coordonnées du point d'intersection est une solution du système formé par les équations des droites

Soit une droite d avec un vecteur directeur $\vec{v} = (v_1, v_2)$ et de pente m.
Soit une droite d' avec un vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et de pente m'.

Positions	Vecteurs directeurs	Pentes	Equation cartésienne
Parallèles	Proportionnels $\frac{v_2}{v_1} = \frac{u_2}{u_1}$	Égales m = m'	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Confondues	Proportionnels $\frac{v_2}{v_1} = \frac{u_2}{u_1}$	Égales m = m'	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Sécantes	Non proportionnels $\frac{v_2}{v_1} = \frac{u_2}{u_1}$	Différentes m ≠m'	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

10. DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

A(x_A ; y_A), B(x_B ; y_B) deux points du plan. La distance AB est donnée par la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On calcule avec la formule suivante:

$|\overrightarrow{AB}|$ = distance $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2}$

EXERCICE 1 : / 4 points Difficulté : ☆

On considère les quatre points A(-3;-3), B(1;9), C(5;9) et D(-1;-10).

1. Déterminer l'équation de la droite (AB).
2. La droite d d'équation $y=3x+2$ est-elle parallèle à la droite (AB) ? à la droite (CD) ?
3. On considère le point E(1;-4). Les points C, D et E sont-ils alignés ?

EXERCICE 2 : / 1 point Difficulté : ☆

Parmi les droites dont on donne une équation ci-dessous, dites celles qui sont parallèles.

$d_1: y=3x+7$; $d_2: y=7$; $d_3: x=7$; $d_4: y=7x+3$

$d_5: x=3$; $d_6: y=-3x+1$; $d_7: y=-7x+1$; $d_8: y=3x$

EXERCICE 3 : / 2 points Difficulté : ☆

Soient D et D' les droites d'équations respectives $y=3x-1$ et $y=4x+1$. Démontrez qu'elles sont sécantes puis déterminez leur point d'intersection.

EXERCICE 4 : / 3 points Difficulté : ☆

Soient les deux systèmes ci-dessous :

(S_1) : $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=-3x+4 \end{cases}$ (S_2) : $\begin{cases} 3y-2x+15=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$

Résolvez chacun d'eux par la méthode de votre choix et interprétez graphiquement vos résultats.

*****Question Bonus***** : même question pour le système (S_3) : $\begin{cases} 30x-6y+12=0 \\ y-5x-2=0 \end{cases}$

EXERCICE 5 : / 4 points Difficulté : ☆☆

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$. On considère les droites δ d'équation $y=\frac{1}{3}x-\frac{9}{2}$ et δ' passant par les points $A\left(-1;\frac{7}{2}\right)$ et $H\left(\frac{3}{2};-4\right)$.

1. Démontrez que le point H est sur la droite δ.
2. Déterminez une équation de la droite d passant par A et parallèle à δ.
3. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur les droites (AH) et (HB) où B est le point de δ qui a pour abscisse 6 ?
4. Démontrez votre conjecture.

EXERCICE 6 :

A

Dans un repère orthonormé du plan, les droites d'équations $y = -\frac{1}{2}x + 2$ et $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ sont-elles parallèles ?

○ Oui ○ Non

B

Dans un repère orthonormé du plan, les droites d'équations $y = \frac{12}{7}x + \frac{9}{7}$ et $y = \frac{12}{7}x - \frac{7}{3}$ sont-elles parallèles ?

○ Oui ○ Non

C

Dans un repère orthonormé du plan, les droites d'équations $y = -\frac{3}{2}x - 1$ et $y = -x - \frac{3}{2}$ sont-elles parallèles ?

○ Oui ○ Non

AUTOEVALUATION CHAPITRE 8

1. Soient les vecteurs $\vec{u}$ (4, -2) et $\vec{v}$ (-2, -1):

   a) Représente les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ et -3$\vec{v}$ et trouve leurs coordonnées.

   b) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$

2. Représente les points A (-5, 0), B (0, 2), C (3, 7) et D (-2,5) et vérifie analytiquement que le milieu de AC coïncide avec le milieu de BD.
3. Trouvez le symétrique de P (-7, -15) par rapport à M (2, 0).
4. Trouve la valeur de k pour que les points A (1, -5), B (3, 0) et C (6, k) soient alignés.
5. Ecrire les équations vectorielles, paramétriques, de manière continue et explicite de la droite qui passe par le point P (3, -2) et qui a la direction du vecteur d (-1, 5).
6. Obtenir les équations des droites r et leur point d'intersection:

   r passe (-3, 2) et est perpendiculaire à 8x - 3y + 6 = 0.

   s passe (9, -5/2) et est parallèle à 2x + et - 7 = 0

7. Dans le triangle des sommets A (-2, 2), B (0, 7) et C (6, 4), trouvez l'équation de la médiane qui commence à B.

8. Calculer la longueur des côtés du triangle des sommets A (- 4, 1), B (6, 3) et C (-2, -3).

9. Étudiez la position relative de ces droites:

   r: 2x + y - 2 = 0 s: x +$\frac{1}{2}$ y = 1

10. Trouvez l'équation de la circonférence qui a son centre au point C (0, -3) et passe par le point A (3, 0).

1. DEUX BRANCHES : STATISTIQUES DESCRIPTIVES ET INFÉRENTIELLES

LE LANGAGE STATISTIQUE

La **statistique** est la science formelle qui comprend la collecte, l'analyse, l'interprétation de données ainsi que la présentation de ces données afin de les rendre lisibles.

Population et échantillon

- **Population**. Tout ensemble étudié par la statistique est une population.
- **Échantillon.** Désigne un sous ensemble d'individus extraits d'une population initiale.
- **Individus.** Un individu donné de la population peut être étudié selon certaines propriétés. Ces propriétes sont appelées caractères
  ou **variables statistiques**.
- **Effectif total.** Nombre d'individus de la population ou de l'échantillon.

Variables statistiques

<table>
<tr><th>Types</th><th colspan="2">Propriétés</th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>Qualitative</td><td colspan="2">Si la variable prend des valeurs non chiffrées, c'est-à-dire qualités.</td><td>La profession d'une personne.
La couleur du cheveu</td></tr>
<tr><td>Quantitative</td><td colspan="2">Si la variable prend des valeurs chiffrées</td><td>Poids
Nombre de frères</td></tr>
<tr><td></td><td>Discrète</td><td>La variable prendre valeurs isolées dans un intervalle.</td><td>Nombre d'amis :2,3 (mais non 2.5)</td></tr>
<tr><td></td><td>Continue</td><td>La variable peut prendre toute valeur dans un intervalle.</td><td>Les tailles: 1.7,1.71,1.711,…</td></tr>
</table>

Il s'agit d'organiser et résumer des observations. Le but est de décrire l'échantillon. Les statistiques inférentielles servent à étendre à la population les résultats ainsi obtenus.

2. EFFECTIFS ET TABLEAUX

Recueil de données

Une série statistique est un recueil de données relatives à une variable quantitative, ordonnées par ordre croissant des valeurs qu'elle prend.
On peut présenter les données sous la forme d'un tableau avec :

- En première colonne : les valeurs de la variable statistique.

Les modalités d'une variable discrète sont les valeurs que prend cette variable. Dans le cas d'une variable continue, on regroupe les valeurs selon des intervalles disjoints. Chaque intervalle est une classe. Pour les calculs, on utilise le centre de chaque classe.

- En deuxième ligne : l'effectif de la valeur

Effectif et fréquence.

L'**effectif** d'une modalité est le nombre d'individus présentant cette modalité. On note comme f_i. La somme des effectifs est égale à l'effectif total.

La **fréquence** d'une modalité est le rapport entre l'effectif de cette modalité et l'effectif total de la population. On note comme h_i. Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1. La somme de toutes les fréquences est 1.

Effectif cumulé, fréquence cumulé.

L'effectif cumulé d'une modalité d'une série statistique est la somme des effectifs des modalités qui lui sont inférieures (ou égales). On note F_i.

$$F_i = f_1+f_2+.....+f_i$$

La fréquence cumulée d'une modalité d'une série statistique est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures (ou égales). On note H_i.

$$H_i = h_1+h_2+.....+h_i$$

Modalité x_i	Effectif f_i	Fréquence h_i	Pourcentage %	Effectif cumulé F_i	Fréquence cumulée H_i
x_1	f_1	h_1	$h_1 \cdot 100$	F_1	H_1
x_2	f_2	h_2	$h_2 \cdot 100$	$F_2=f_1+f_2$	$H_2=h_1+h_2$
…	…	…	…	…	…
x_p	f_p	h_p	$h_p \cdot 100$	$f_1+f_2+\ldots f_p=N$	$h_1+h_2+\ldots h_p=1$

Tableau de fréquences

Méthode 2 : Regrouper des données par classes

À connaître

Lorsque l'on traite une série brute de données quantitatives, pour **limiter la taille du tableau de données**, on est parfois amené à **regrouper les données par classes**.
Une **classe** est un intervalle de valeurs que peut prendre le caractère quantitatif étudié.
Regrouper par classes, **c'est déterminer le nombre de caractères qui appartiennent à chaque classe**.
L'amplitude d'une classe est la longueur de l'intervalle de valeurs. Les classes peuvent être d'amplitudes différentes.

Exemple : On a demandé à 28 élèves leur taille en centimètres. La série brute constituée par les résultats de cette enquête est la suivante :

155	151	153	148	155	153	148	152	151	153	156	147	145	156
154	156	149	153	155	152	149	148	152	156	153	148	148	150

Regroupe ces données par classes d'amplitude 4 puis indique le nombre de personnes qui ont une taille comprise entre 150 cm et 154 cm.

On commence par regarder les valeurs extrêmes de cette série puis on détermine le nombre de classes que l'on va faire.

Taille comprise (en cm)	Entre 145 et 149	Entre 150 et 154	Entre 155 et 159
Effectif	9	12	7

Il y a donc 12 personnes qui ont une taille comprise entre 150 et 154 cm.

3. PARAMÈTRES STATISTIQUES : $\bar{x}$ *et* σ

- **Moyenne arithmétique** $\bar{x}$ **.** C'est la somme des produits des valeurs du caractère par leur effectif, divisé par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_1 \cdot x_1 + \cdots + f_n \cdot x_n}{N}$$

Si la variable est continue, x_i est le centre de chacune des classes.

La moyenne d'une série statistique est la somme de toutes ses valeurs divisée par l'effectif total.

Remarques :

- Lorsque l'on dispose d'un tableau d'effectifs, on effectue le produit des valeurs par leur effectif, avant de diviser par l'effectif total
- Quand les valeurs sont regroupées en classes, on choisit comme représentant le centre de la classe.

On détermine au préalable les centres des classes pour plus de facilité.

Classes	[0 ; 60[	[60 ; 120[	[120 ; 240[	[240 ; 480[	[480 ; 720[	[720 ; 1320[
Centres	30	90	180	360	600	1020
Effectifs	1	3	12	26	11	15

Calculs :

$\frac{0+60}{2} = 30$ $\frac{60+120}{2} = 90$ $\frac{120+240}{2} = 180$ $\frac{240+480}{2} = 360$ $\frac{480+720}{2} = 600$ $\frac{720+1320}{2} = 1020$

Sésamath

Méthode 2 : Calculer la moyenne pondérée d'une série statistique

À connaître

Pour calculer la **moyenne pondérée** M d'une série statistique :

- on additionne les produits des effectifs par les valeurs associées du caractère ;
- on divise la somme obtenue par l'effectif total de la série.

Si n_1, n_2, ..., n_p sont les effectifs du caractère, x_1, x_2, ..., x_p les valeurs associées et N l'effectif total, alors : $M = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_p x_p}{N}$.

Exemple : Chaque élève de 4ᵉB du collège de Potigny a indiqué le nombre de livres qu'il a lus durant le mois de septembre. Voici les résultats de l'enquête :

Nombre de livres lus	0	1	2	3	7	8	15
Effectifs	12	4	3	3	1	1	1

Calcule le nombre de livres lus, en moyenne, par les élèves de 4ᵉB durant le mois de septembre.

$$M = \frac{0\times12+1\times4+2\times3+3\times3+7\times1+8\times1+15\times1}{25} = \frac{49}{25} = 1{,}96 .$$

Les élèves de 4ᵉB de ce collège ont lu, en moyenne, 1,96 livres au mois de Septembre.

- La **variance** est la simple moyenne arithmétique des carrés des écarts à la moyenne arithmétique observée. On note σ^2

$$Var = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

- L'**écart type** mesure la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne. C'est la racine carrée de la variance. On note σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

- **Coefficient de variation** : C'est l'écart type divisé par la moyenne arithmétique.

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

4. PARAMÈTRES DE POSITION

- **Médiane, Me**. La médiane d'une série statistique est la modalité qui partage la population en deux groupes de même effectif : il y a autant d'individus ayant une modalité inférieure à la médiane que d'individus ayant une modalité supérieure à la médiane.

Dans le cas d'une variable discrète, on ordonne toutes les valeurs de la série par ordre croissant, en répétant les valeurs identiques :

- Si l'effectif total est impair, la médiane est la valeur centrale.
- Si l'effectif total est pair, on convient que la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales.

La médiane correspond donc aussi à une fréquence cumulée de 0,5 su à un pourcentage cumulé de 50%.

- **Les quartiles** sont les valeurs du caractère qui partagent l'effectif total en 4 parties égales.

Le quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 25% des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales.
De même, le quartile Q_2 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 50% des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales (correspondant à la médiane).
Et le quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 75% des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales.

	Q_1	Q_2	Q_3
25%	25%	25%	25%

- **Les percentiles** sont les valeurs du caractère qui partagent l'effectif total en 100 parties égales.
- **L'effectif cumulé** d'une modalité d'une série statistique est la somme des effectifs des modalités qui lui sont inférieures (ou égales). On note F_i.

$$F_i = f_1 + f_2 + \ldots.. + f_i$$

La fréquence cumulée d'une modalité d'une série statistique est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures (ou égales). On note H_i.

$$H_i = h_1 + h_2 + \ldots.. + h_i$$

Méthode 1 : Déterminer des caractéristiques d'une série statistique donnée sous forme de liste ou de tableau

À connaître

On appelle **médiane** m d'une série statistique dont les valeurs sont ordonnées tout nombre qui partage cette série en deux groupes de même effectif.
Le **premier quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur Q_1 telle qu'au moins 25 % des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1.
Le **troisième quartile** d'une série statistique est la plus petite valeur Q_3 telle qu'au moins 75 % des valeurs sont inférieures ou égales à Q_3.
L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par cette série.

Exemple 1 : Voici le temps consacré, en minutes, au petit-déjeuner par 16 personnes.

16 12 1 9 17 19 13 10 4 8 7 8 14 12 14 9

Détermine une valeur médiane, les valeurs des premier et troisième quartiles, ainsi que l'étendue de cette série statistique.

On commence par ranger les 16 valeurs dans l'ordre croissant.

1 4 7 **8** 8 9 9 **10** **12** 12 13 **14** 14 16 17 19

- Tout nombre compris entre la 8ᵉ et la 9ᵉ valeur peut être considéré comme médiane. En général, on prend la demi-somme de ces deux valeurs : m = **11**. (La moitié de ce groupe consacre moins de 11 minutes au petit-déjeuner.)
- 25 % et 75 % de 16 sont égaux à 4 et 12 donc le premier quartile est la 4ᵉ valeur, soit Q_1 = **8**, et le troisième quartile est la 12ᵉ valeur, soit Q_3 = **14**.
- 19 − 1 = 18 donc l'étendue est 18.

Exemple 2 : On donne la répartition des notes à un contrôle dans une classe de 27 élèves.

Note sur 20	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	3	5	2	1	6	3	3	2

Détermine une valeur médiane, les valeurs des premier et troisième quartiles, ainsi que l'étendue de cette série statistique.

On commence par calculer les effectifs cumulés croissants.

Note sur 20	7	8	**9**	10	11	**12**	**13**	14	15
Effectifs cumulés	2	5	**10**	12	13	**19**	**22**	25	27

- L'effectif total est de 27. Or 27 ÷ 2 = 13,5 donc la médiane est la 14ᵉ note : m = **12**. Cette valeur partage la série en deux groupes de même effectif : un groupe de 13 notes inférieures ou égales à 12 et un groupe de 13 notes supérieures ou égales à 12.
- 25 % et 75 % de 27 sont égaux à 6,75 et 20,25 donc le premier quartile est la 7ᵉ valeur, soit Q_1 = **9**, et le troisième quartile est la 21ᵉ valeur, soit Q_3 = **13**.
- 15 − 7 = 8 donc l'étendue est 8.

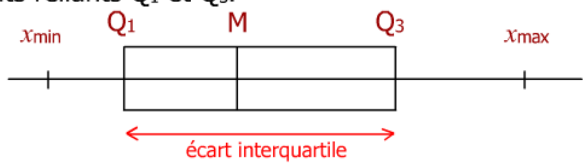
5. DIAGRAMME EN BOÎTE

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs du caractère.

R= máx-min

Lorsque l'on souhaite comparer deux séries statistiques, on peut utiliser une méthode visuelle appelée diagramme en boîte (appelée également "boîte à moustaches").

Principe : on place sur ce diagramme plusieurs "traits verticaux" représentant la valeur minimale de la série, la valeur maximale de la série, le premier quartile Q_1, la médiane M et le troisième quartile Q_3. On termine ensuite "la boîte" en traçant deux segments reliants Q_1 et Q_3.



Cette représentation de la série permet de visualiser facilement plusieurs éléments, comme :
- l'étendue (différence entre les valeurs minimale et maximale de la série)
- l'écart interquartile (différence entre les quartiles 1 et 3, qui représente environ 50 % des données de la série)

6. STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

L'**inférence statistique** consiste à induire les caractéristiques inconnues d'une population à partir d'un échantillon issu de cette population. Les caractéristiques de l'échantillon, une fois connues, reflètent avec une certaine marge d'erreur possible celles de la population.

Strictement, l'inférence s'applique **à l'ensemble des membres (pris comme un tout)** de la population représentée par l'échantillon, et **non pas à tel ou tel membre particulier** de cette population. Par exemple, les intentions de vote indiquées par l'échantillon, ne peuvent révéler l'intention de vote qu'a tel ou tel membre particulier de la population des électeurs de la circonscription électorale.

L'inférence statistique est donc un ensemble de méthodes permettant de tirer des conclusions fiables à partir de données d'échantillons statistiques. L'interprétation de données statistiques est, pour une large part, le point clé de l'inférence statistique.

EXERCICES

nº 1.- **Les notes obtenues à l'examen de mathématiques d'une classe de 4º ESO sont les suivantes :**

4	5	7	5	8	3	9	6	4	5
7	5	8	4	3	10	6	6	3	3

a) Classe les données dans une table de fréquences.

b) Représente la distribution avec un graphique.

nº 2.- **Dans une classe de 4º ESO, on a demandé aux élèves combien d'heures par semaine ils passent à étudier. Voici leurs réponses:**

16	11	17	12	10	5	1	8	10	14
15	20	3	2	5	12	7	6	3	9
10	8	10	6	16	16	10	3	4	12

a) Classe les données dans une table de fréquences, en les regroupant par intervalle de la manière qui te semble la plus appropriée.

b) Représente la distribution avec un graphique.

nº 3.- **Nous avons noté l'âge de chacun des membres d'un groupe de 30 personnes, et nous avons obtenus ces données :**

24	3	29	6	5	17	25	24	36	42
30	16	14	12	8	4	8	37	32	40
37	26	28	15	17	41	20	18	27	42

a) Fais une table de fréquences.

b) Représente la distribution avec un graphique.

nº 4.- **Nous avons demandé à un groupe de 50 personnes leur âge. Les résultats obtenus sont représentés dans la table suivante:**

AGE	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)
N.º DE PERSONNES	4	8	10	9	17	2

Calcule la moyenne et l'écart type.

nº 5.- **Dans une entreprise A, le salaire moyen des travailleurs est de 950€ par mois avec un écart type de 150 €. Dans une autre entreprise B, le salaire moyen est de 1 200 € par mois, avec un écart type de 200 € par mois. Calcule le coefficient de variation dans les deux cas et dis laquelle des deux entreprises a une différence relative des salaires plus grande.**

nº 6.- **Dans la table suivante, nous avons résumé les résultats obtenus après avoir lancé un dé 120 fois:**

N.º OBTENU	1	2	3	4	5	6
N.º DE FOIS	18	30	21	25	17	9

Calcule *Me*, Q_1, Q_3 et p_{20}.

nº 7.- **On a fait passé une épreuve de calcul mental de 105 questions a un groupe de 125 étudiants de 4.º ESO. On a rassemblé les résultats dans la table suivante:**

N.º DE RÉPONSES CORRECTES	N.º D'ÉTUDIANTS
[0, 15)	2
[15, 30)	8
[30, 45)	15
[45, 60)	26
[60, 75)	35
[75, 90)	23
[90,105]	16

On considère qu'un étudiant maîtrise le calcul mental de réponses correctes est égal ou supérieur à 70. Quel pourcentage d'étudiants doit améliorer leur calcul mental ?

nº 8.- **On veut connaître le niveau de satisfaction des clients d'une banque par rapport à son personnel. Pour ça, on choisit un échantillon de 1000 individus. Indique si chacune de méthodes suivantes te paraissent correctes et explique pourquoi:**

a) Parmi les 200 succursalles existantes, choisis 5 des clients les plus représentatifs.

b) On choisit 1000 personnes au hasard parmi celles qui ont une hypothèque.

c) A partir de la liste de clients on en sélectionne 1000 au hasard.

d) On choisit 1000 personnes au hasard parmi celles qui ont un revenu mensuel supérieur à 5 000 €.

nº 9.-**On aimerait mener les études suivantes:**

a) Temps dédié à la lecture chez les jeunes entre 12 et 18 ans.

b) Opinion qu'ont les personnes qui se trouvent là à un certain moment sur une nouvelle installation sportive.

c) Type de sport que font les étudiants de 4.º ESO d'un centre scolaire.

Dans chaque cas, quelle est la population? Dans quel cas est-il nécessaire d'avoir recours à un échantillon? Pourquoi?

AUTOEVALUATION CHAPITRE 9

L'âge	Nº visiteurs
15-25	63
25-35	95
35-45	189
45-55	243
55-65	175
65-75	105

1. L'âge des visiteurs d'une exposition sont les données dans le tableau de droite :
   a. Représente la distribution avec un graphique.
   b. Calcule la moyenne, la déviation typique et le coefficient de variation

2. A) Calcule la moyenne, la déviation typique, le C.V., médiane, quartiles et percentiles 20 et 80 des notes obtenues par ces 20 étudiants :

2	6	5	4	4	5	9	7	3	4
8	6	6	5	6	8	3	10	4	4

   B) Représente la distribution avec un diagramme en bâtons

3. Avec les quartiles et la médiane obtenues dans l'exercice précèdent, représente le diagramme en boîte

4. Calcule la médiane et les quartiles de la suivante distribution. Représente avec un diagramme en boîte.

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

Poids	Effectif
35,5-42,5	2
42,5-49,5	11
49,5-56,5	13
56,5-63,5	9
63,5-70,5	3
70,5-77,5	2

5. Le tableau montre le poids de 40 étudiants :
   a. Représente la distribution avec un histogramme.
   b. Calcule la médiane et les quartiles et estime les percentiles qui correspondent aux poids de 40 kg, 60 kg et 70 kg.

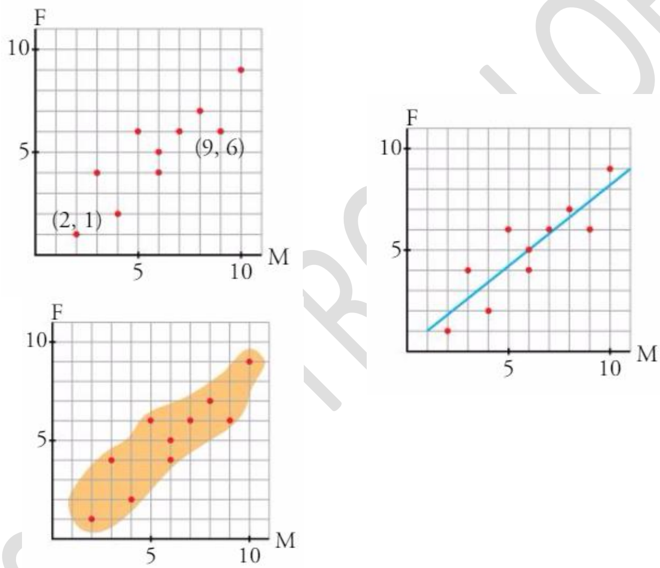
6. Dis, dans quel cas est-il nécessaire de parler d'une population ou d'un échantillon. Justifie la réponse :
   a. Étude du nombre d'élèves ayant moins de 5, en 4ºESO dans un lycée.
   b. Étude du temps de péremption des bricks de lait dans une entreprise.
   c. Étude de rentes annuelles, dépenses mensuels, les coutumes de la population d'un pays concret.

1. DISTRIBUTIONS BIDIMENSIONNELLES

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude simultanée de deux variables X et Y , étudiées sur le même échantillon. L'objectif essentiel des méthodes présentées est de mettre en évidence une éventuelle variation simultanée des deux variables, que nous appellerons alors ***liaison***. Les graphiques illustrant les liaisons entre variables on appelle ***nuage de points*** ou ***diagramme de dispersion***.

Dans les cas, ou il y a une certaine liaison statistique entre les valeurs de la distribution, on dit qu'il y a ***corrélation*** entre les variables. Cette corrélation qu'on peut regarder sur le nuage de points c'est étroite et, dans ce cas-là, on peut dessiner une droite très lié. On appelle la ***droite de régression linéaire***.

Étudiants	Note en Mat.	Note en Fis.
a	7	6
b	6	4
c	8	7
d	3	4
e	6	5
f	9	6
g	4	2
h	10	9
i	2	1
j	5	6

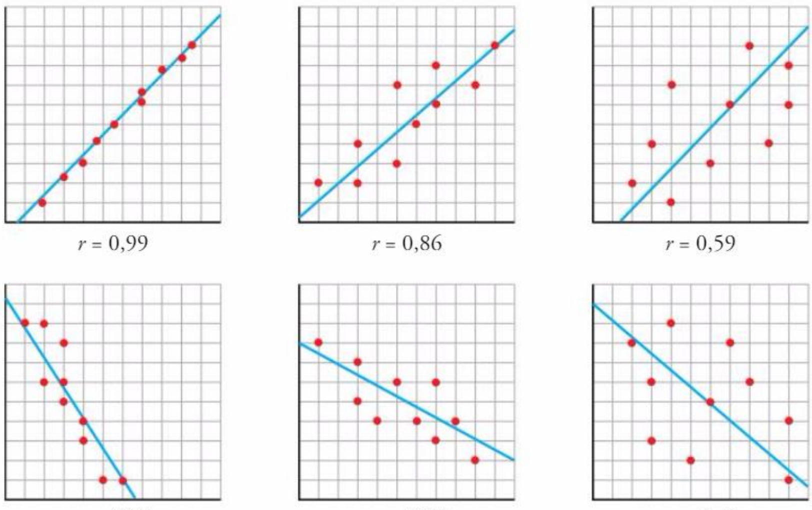


Nuage de points : Il s'agit d'un graphique très commode pour représenter les observations simultanées de deux variables quantitatives. Il consiste à considérer deux axes perpendiculaires, l'axe horizontal représentant la variable X et l'axe vertical la variable Y, puis à représenter chaque individu observé par les coordonnées des valeurs observées.

2. LA VALEUR DE LA CORRÉLATION

Le coefficient de corrélation linéaire est un indice rendant compte numériquement de la manière dont les deux variables considérées varient simultanément. Le coefficient de corrélation prend ses valeurs entre -1 et +1. Les valeurs −1 et +1 correspondent à une liaison linéaire parfaite entre X et Y.

$$\mathbf{r} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad \sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$



r = 0,99 r = 0,86 r = 0,59

r = –0,92 r = –0,77 r = –0,41

3. LA DROITE DE RÉGRESSION

La droite de régression introduit l'hypothèse que les valeurs d'une variable de l'autre, c'est-à-dire postulent que *la connaissance des valeurs de X permet de prévoir les valeurs de Y*. Il s'agit donc d'un modèle de prévision et l'objectif est de minimiser l'erreur de prévision c'est-à-dire la distance entre les valeurs observées et les valeurs estimés par une relation y=mx+n.

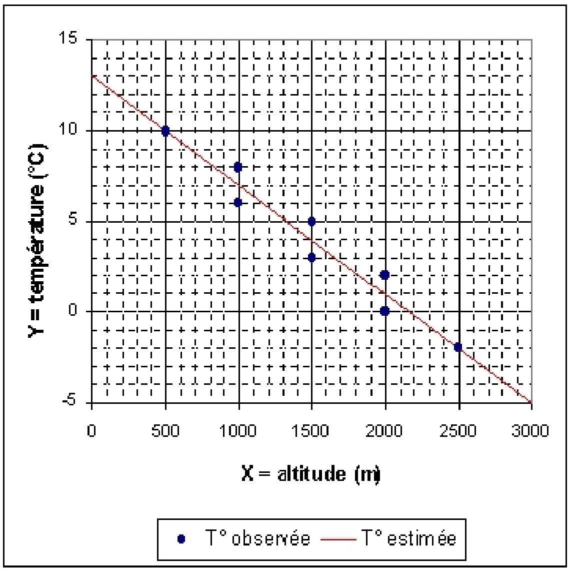
Rappel : L'équation de la droite passant par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est donnée par : $y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B)$

Alors, l'équation de la droite de régression : $$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

Tableau : Paramètres caractéristiques de la température (Y) et de l'altitude (X) de 8 stations météorologiques d'une vallée alpine (données imaginaires)

i	(Xi)	(Yi)
1	2000	0
2	1500	3
3	1000	6
4	500	10
5	1000	8
6	1500	5
7	2000	2
8	2500	-2
moyenne	mX = 1500	mY = 4
écart-type	612	3.8

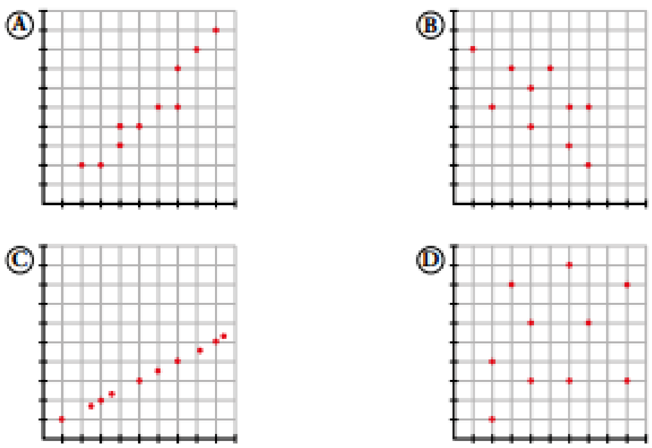
Droite de régression exprimant la température en fonction de l'altitude pour 8 stations météorologiques d'une vallée alpin



AUTOEVALUATION CHAPITRE 10

1. Parmi les suivantes distributions bidimensionnelles, dis les cas où la corrélation est positive, les cas où elle est négative et ceux qui n'ont pas de corrélation :
   a. La taille d'une personne- la mesure de son chien
   b. La distance d'un voyage en avion- le prix du billet
   c. La latitude d'un lieu de l'hémisphère nord- La température moyenne annuelle
   d. L'altitude – La pression atmosphérique
   e. La profondeur de la mer- La pression de l'eau

2. Reliez chaque distribution bidimensionnelle de l'exercice précédent avec ces corrélations :
   r= -1 r= 0,83 r= -0,92 r= 0,23 r=1
3. Reliez chaque nuage de points avec les suivantes corrélations :
   r= 1 r=- 0,83 r= 0,97 r= 0,18



4. On a noté les notes d'anglais et français de 10 étudiants d'ESO. Voici les résultats :
   a. Représente les données avec un nuage de points. Dessine la droite de régression.
   b. Lequel de ces coefficients de corrélation on peut donner ?
      r= 0,99 r=- 0,86 r= 0,88 r= 0,63

Note d'anglais	Note de français
6	6
3	4
5	6
6	5
5	7
8	7
10	9
4	5
9	10
7	7

5. En sachant que la droite de régression correspondante aux notes d'anglais et français de l'activité précédente a pour équation ***y= 1 + 0,85x :***
   a. Quel sera la note en français des étudiants avec un 1 ; 6,5 ; et 9,5 en anglais ?
   b. On peut considérer fiables ces prédictions ? Justifie la réponse

1. ÉPREUVES ET ÉVÉNEMENTS

Expériences aléatoires

Une **expérience** est dite **aléatoire** si ses résultats ne sont pas prévisibles avec certitude en fonction des conditions initiales, c'est-à-dire des expériences dans lesquelles, le hasard, intervient.

Lorsque les conditions de l'expérience entraînent un résultat unique, on parle d'expériences **déterministes.**

Toutefois, on parle généralement d'expérience lorsqu'on peut la réaliser à volonté, sinon on parle d'**épreuve.**

On appelle **épreuve** la réalisation d'une expérience aléatoire.

Événements

On appelle **événement** chaque possible résultat d'une épreuve aléatoire. Si l'événement est constitué d'un seul élément, on parle alors de **l'événement élémentaire ou éventualité**. L'ensemble de tous les résultats possibles sera appelé l'**univers des possibles**.

En général, un événement est un sous-ensemble de l'univers.

L'univers Ω ou E est un événement, appelé événement certain.

L'ensemble vide Ø est un événement, appelé événement impossible.

Exemple : Nous disposons 52 cartes et deux jokers sur une table et nous tirons une seule carte. Tirer une carte individuelle dans l'univers des 54 cartes, représente un événement élémentaire. Mais les sous-ensembles (y compris les événements élémentaires) sont simplement appelés des « événements ». Des événements de cet univers peuvent être :

- *« obtenir un roi » ensemble constitué des 4 rois (union de 4 évènements élémentaires),*
- *« obtenir une carte de cœur » (ensemble de 13 cartes)*
- *« obtenir une figure » (ensemble de 12 cartes).*

Événement composé : événement résultant de la réunion ou de l'intersection de plusieurs événements.

RAPPORTS ET OPÉRATIONS AVEC LES ÉVÉNEMENTS

L'union de deux événements A et B est un autre événement qui contient tous les événements élémentaires de A et de B. C'est-à-dire l'événement $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ est réalisé dès que A ou B est réalisé.

L'intersection de deux événements A et B, est un autre événement qui contient les éléments communs de A et de B. C'est-à-dire l'événement $\boldsymbol{A \cap B}$ est réalisé dès que A et B sont réalisés dans la même expérience.

Événements compatibles et incompatibles
Deux événements qui ne peuvent pas être réalisés au cours d'une même expérience sont appelés **événements incompatibles**.

Si A et B sont incompatibles alors $\boldsymbol{A \cap B} = \acute{\emptyset}$

Exemple : Dans un lancer de dé, si l'événement A est «obtenir un multiple de 4 » et l'événement B «obtenir un multiple de 3», les événements A et B sont incompatibles.
Si l'événement C est « obtenir un multiple de 2», les événements A et C sont compatibles, et les événements B et C aussi.

Le contraire: l'événement contraire de A, noté $\boldsymbol{\bar{A}}$ contient tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. C'est l'événement qui est réalisé dès que A n'est pas réalisé.

L'union d'un événement et de son contraire est l'univers et l'intersection est l'ensemble vide.

$$\boldsymbol{A} \cup \bar{A} = E; \qquad A \cap \bar{A} = \acute{\emptyset}$$

Le contraire du contraire d'un événement est égal à l'événement initial.

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Le contraire de l'union d'événements est l'intersection des contraires.

$$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \bar{\boldsymbol{A}} \cap \bar{\boldsymbol{B}}$$

Le contraire de l'intersection de l'union d'événements est l'union des contraires.

$$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \bar{\boldsymbol{A}} \cup \bar{\boldsymbol{B}}$$

Exemple :

Dans un lancer de dé, si l'événement A est «obtenir un nombre pair » et l'événement B « obtenir un multiple de 3 » :

- *L'événement $A \cup B$ est l'événement «obtenir un nombre pair **OU** un multiple de 3 », c'est-à-dire {2 ; 3 ; 4 ; 6}.*

- *L'événement $A \cap B$ est l'événement «obtenir un nombre pair **ET** multiple de 3 », c'est-à-dire {6}.*
- *Dans un lancer de dé, si l'événement A est «obtenir un nombre pair», l'événement contraire de A, $\bar{A}$ est l'événement «obtenir un nombre impair».*

2. PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT. PROPRIÉTÉS

Lorsque l'univers lié à l'expérience aléatoire comporte un nombre déterminé d'éventualités, on affecte à chaque éventualité une probabilité d'apparition. Il s'agit d'un nombre compris entre 0 et 1. Ces probabilités doivent cependant vérifier une unique contrainte : leur somme doit être égale à 1.
La probabilité d'un événement est alors définie comme la somme des probabilités des éventualités qui composent cet événement.
Soit A un événement ; on note la probabilité de A : P(A)

- **Propriétés des probabilités sur les événements**

Les probabilités sur les événements vérifient alors les propriétés élémentaires suivantes :

- L'ensemble vide Ø est un événement, appelé événement impossible, tel que P(Ø)=0.
- L'univers Ω ou E est un événement, appelé événement certain, tel que P(E)=1.
- La probabilité d'un autre événement est toujours un nombre compris entre 0 et 1 :

$$0<P(S)<1$$

- Si E=$\{x_{1,}\ x_2, \ldots\ldots x_n\}$ alors P$(x_{1,}) + P(x_2) + \cdots + P(x_n) = 1$
- Soient A et B deux événements incompatibles, la probabilité de leur union est :
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$
- Soient A et B deux événements compatibles, la probabilité de leur union est :
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- Soient A et $\bar{A}$ des événements contraires :
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

3. PROBABILITÉS D'ÉVENTUALITÉS.

La **loi des grands nombres** indique que lorsqu'on augmente le nombre de fois qu'on réalise une épreuve, la fréquence d'un événement converge vers sa probabilité.

C'est le concept statistique de probabilité et il permet de calculer les probabilités d'une épreuve où les événements ne sont pas équiprobables.

- **RÈGLE DE LAPLACE**

Les éventualités sont équiprobables si elles ont la même probabilité d'être réalisées dans une épreuve. Si on estime que toutes les éventualités sont équiprobables, chaque éventualité a une probabilité d'apparition de

P(éventualité) = $\frac{1}{nombre\ \ d'éléments\ \ dans\ \ E}$

La probabilité de l'événement A est alors donnée par la formule :

P(A) = $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$

Exemple

On lance un dé.
L'univers est E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. → *Cas possibles = 6*
Soit l'événement
A =« on obtient au plus 3 en lançant le dé »= {1 ; 2 ; 3} → *Cas favorables = 3*
Alors P(A)= $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4. PROBABILITÉS SUR ÉVÉNEMENTS COMPOSÉS

A et B sont deux événements indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre.

A et B sont deux événements dépendants si la réalisation de l'un n'influence la probabilité de réalisation de l'autre.

5. COMPOSER ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Si A , B, C, …. sont des événements indépendants la probabilité

$P(Aet\ Bet\ C\ et\ \dots.)$ =P(A∩ $B \cap C \cap ..$)= P(A)·P(B)·P(C)·…

6. COMPOSER ÉVÉNEMENTS DÉPENDANTS

Si A et B sont des événements dépendants la probabilité

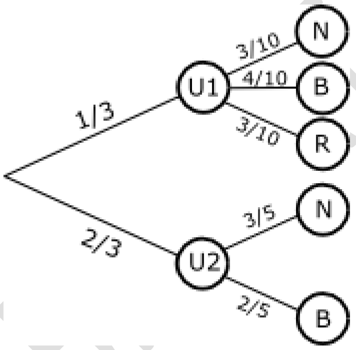
$P(Aet\ B)$ =P(A∩ B)= P(A)·P(B/A)

La probabilité conditionnelle de l'événement B, une fois que l'événement A s'est produit, est donnée par P(B/A).

- **Diagramme d'arbre**

Un **arbre de probabilité** est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire.

EXEMPLE:



U_1N
U_1B
U_1R

U_2N
$U_2\,B$

7. TABLEAUX DE CONTINGENCE

Un **tableau de contingence** est une méthode de représentation de données découlant d'un comptage. Les données sont rassemblées dans un tableau avec le caractère auquel elles sont reliées.

On pratique des études sur plusieurs caractères, en essayant alors de déterminer s'il existe une quelconque liaison entre eux. Pour cela on étudie les individus recensant plusieurs caractères à la fois.

Par exemple, l'âge et le nombre de fois où l'on tombe malade sont-ils liés ?

âge/malade	0 fois	1 fois	2 fois	Total
[20,30)	4	1	0	5
[30,40)	4	2	1	7
[40,50)	3	3	1	7
[50,60)	2	3	2	7
[60,70)	0	4	3	7
Total	13	13	7	33

- **PROBABILITÉ CONDITIONNELLE**

Si *A* et *B* sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors la probabilité conditionnelle de l'événement *A*, une fois que l'événement *B* s'est produit, est le rapport de la probabilité que *A* et *B* se produisent simultanément à la probabilité de *B* (considérée ici comme non nulle).

La probabilité conditionnelle de l'événement A, une fois que l'événement B s'est produit, est donnée par:

$$P\langle A|B\rangle = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A et B sont deux événements indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre. On obtient alors la définition suivante:

A et B sont deux événements indépendants si $P\langle A|B\rangle$= P(A) et $P\langle B|A\rangle$= P(B). De la définition d'une probabilité conditionnelle, on voit alors que A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B)$ = P(A)·P(B).

Ex. On dit que les résultats d'une classe à un test sont indépendants de la taille moyenne des élèves de cette classe, si le fait de connaitre la moyenne des tailles ne permet en rien de prédire quoi que ce soit sur les résultats du test.

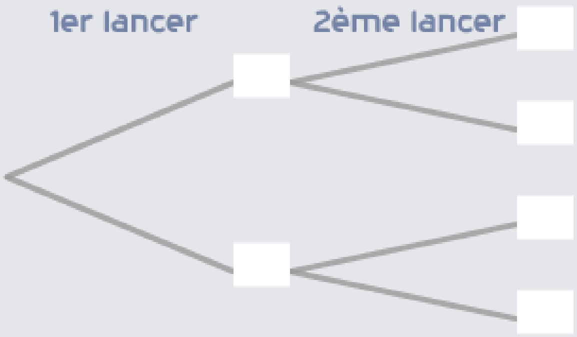
D'autre part savoir la taille moyenne des élèves ne change pas les résultats du test.

COCHE LES BONNES RÉPONSES

5	On jette un dé cubique non truqué. La probabilité d'obtenir...	un nombre pair est 0,5	un multiple de 3 est 0,3	7 est 1	6 est $\frac{1}{6}$
6	Stéphane a lancé une pièce de monnaie et a obtenu pile. Au prochain lancer...	on ne peut pas savoir ce qu'il va obtenir	il obtiendra forcément face	il a une chance sur deux d'obtenir face	la probabilité d'obtenir face est supérieure à 0,5
7	Léa et Léo jouent à pile ou face. Léa dit : « Face tu perds, pile je gagne ». Quelle est la probabilité que Léa gagne ?	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{3}$

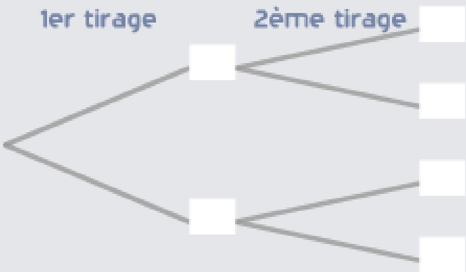
QUESTION Nº 2

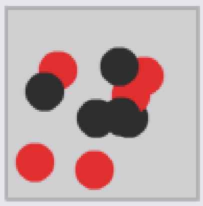
On réalise deux lancers successifs d'une même pièce non truquée.
Complète avec les lettres P (pour "pile") et F (pour "face") l'arbre de probabilité ci-dessous, c'est un schéma permettant de résumer cette expérience aléatoire :



QUESTION Nº3

Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules noires, indiscernables au toucher. On réalise deux tirages successifs d'une boule dans l'urne, ceci avec remise, c'est-à-dire qu'à l'issue de chaque tirage on remet la boule dans l'urne.
Complète avec les lettres R (pour "rouge") et N (pour "noire") l'arbre de probabilité ci-dessous. Il permet de résumer cette expérience aléatoire :





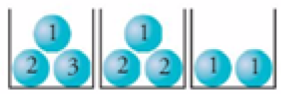
AUTOEVALUATION CHAPITRE 12

1. Un sac contient quatre boules numérotées : 0, 1, 2 et 3. On dispose d'un dé normal. On réalise un tirage d'une boule dans le sac, on jette le dé et on additionne les deux résultats. On appelle x la somme.
   a. Écris l'univers de cette expérience aléatoire et dis la probabilité de chaque éventualité.
   b. Soient A = » x<7 » et B= » 4<x<9 ». Calcule$A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, et $\overline{(A \cup B)}$

   c. Calcule les probabilités des événements A, B,$A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, et $\overline{(A \cup B)}$

2. On a deux sacs, A et B, avec les boules :
   A : 7 boules blanches et 3 boules noires
   B : 1 boule blanche, 2 boules noires et 7 boules rouges
   On jette un dé, s'il sort 1 ou 2, on réalise un tirage du sac A. En cas contraire, c'est-à-dire avec le 3, 4, 5 ou 6, on réalise un tirage du sac B. Calcule la probabilité d'obtenir une boule rouge.

3. On réalise un tirage de chaque boîte. Calcule la probabilité que la somme soit 5



4. Une urne A contient 3 boules rouges et 1 noire, et une autre B, 3 noires et 1 rouge. On fait un tirage de A que l'on met en B. Calcule la probabilité que les deux boules soient rouges.

5. Dans un groupe d'hommes, certains portent une moustache, et les autres non. Qu'est-ce que signifient Moustache/Afrique et Afrique/Moustache ? Calcule leurs probabilités.

	EUROPE	AFRIQUE	AMÉRIQUE
MOUSTACHE	2	6	4
NON MOUSTACHE	8	4	6

6. On pioche trois cartes d'un jeu de 40 cartes. Calculer la probabilité que toutes les cartes soient des as ou des rois.