3ºESO CHAPITRE 1 : FRACTIONS ET DÉCIMAUX

1. Nombres rationnels

Nombres entiers relatifs

$\mathbb{N}= \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots \dots \dots\}$

$\mathbb{Z}= \{\dots \dots ., -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots \dots \dots\}$

$\mathbb{Q}= \left\{\dots \dots ., -\mathbf{3}, .., -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}, .., -\mathbf{2}, .., -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, .. -\mathbf{1}, .., -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, .. \mathbf{0}, .., \mathbf{1}, .., \dots\right\}$

Une fraction à l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ désigne le quotient de a et b.
a et **b** sont deux entiers relatifs b $\neq$0.

On appelle **a** le <u>numérateur</u> et **b** le <u>dénominateur</u>

FRACTIONS ÉQUIVALEN TES

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, sont équivalentes et on écrit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ce qui équivaut à *ad=bc*

(b≠0, d≠0)

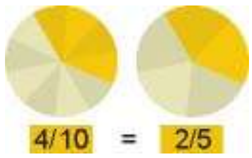
AMPLIFICATION ET SIMPLIFICATION DES FRACTIONS

- Amplifier des fractions c'est multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

- Simplifier des fractions c'est diviser le numérateur et le dénominateur par un diviseur commun.

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$



FRACTION IRRÉDUCTIBLE

Une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux est irréductible.
Pour rendre irréductible une fraction, on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD

RÉDUIRE AU MÊME DÉNOMINATEUR

Si les dénominateurs ne sont pas les mêmes on réduit au même dénominateur : on cherche un dénominateur commun

COMPARAISON DE FRACTIONS

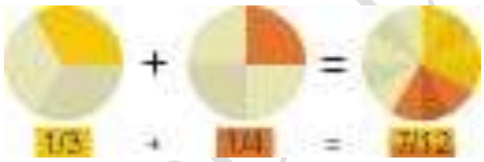
Pour comparer des fractions on les réduit au même dénominateur. La plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

2. OPERATIONS AVEC FRACTIONS

ADDITION ET SOUSTRACTION DES FRACTIONS

- Addition dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes :

On additionne les numérateurs et on conserve le dénominateur



- Addition dans le cas où les dénominateurs ne sont pas les mêmes :

Avant d'additionner on trouve un dénominateur commun et après c'est comme dans le cas précédent.

MULTIPLICATION

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

On multiplie les numérateurs

(b et d non nuls)

On multiplie les dénominateurs

DIVISION

Diviser, c'est multiplier par l'inverse

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$ (b et d non nuls)

PRIORITÉS DES OPÉRATIONS

- Les calculs entre parenthèses sont prioritaires. On commence par effectuer les multiplications et divisions à l'intérieur des parenthèses.
- On effectue la multiplication et la division
- Et enfin les additions et soustractions.

3. NOMBRES DÉCIMAUX

Les nombres décimaux ont une partie entière, avant la virgule, et une partie décimale après la virgule

Dizaine de million	millions	Centaine de millier	Dizaine de millier	milliers	centaines	dizaines	unités	virgule	dixièmes	centièmes	millièmes	....	...
						4	3	,	6	3	5		

0,1 se lit un dixième
0,01 se lit un centième
0,001 se lit un millième

Types de nombres décimaux

- Nombres ayant un développement décimal limité : 0,25; $2x10^3$
- Nombres dont le nombre de chiffres après la virgule est infini et périodique à partir d'un moment : 6/7; 8/3;..
- Nombres dont le nombre de chiffres après la virgule est infini et non périodique : $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \pi, ..$

FRACTIONS ET NOMBRES DÉCIMAUX

RETROUVER LE NOMBRE DÉCIMAL

Quand on divise le numérateur d'une fraction par son dénominateur on peut l'exprimer ainsi:

- Un nombre entier, c'est-à-dire, un nombre dont le numérateur est multiple du dénominateur.
- Un nombre décimal, c'est-à-dire un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{N}{10^n}$ où *N* et *n* sont des entiers relatifs.
- Un nombre décimal périodique, dans le cas où il n'y aurait aucune des conditions antérieures.

4. RETROUVER LE RATIONNEL

À partir de l'écriture décimale périodique d'un nombre, on peut retrouver son écriture sous forme de fraction.

Exemple

Nous appelons N la fraction, alors N=$2,\overset{\frown}{34}$

$$100N = 234,\overset{\frown}{34}$$
$$N = 2,\overset{\frown}{34}$$
$$99N = 232 \qquad \text{Alors} \quad N = \frac{232}{99}$$

EXERCICES :

(page 14 et 15) Calcule en simplifiant d'abord le plus possible les fractions :

1. a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}$ b) $6-\frac{11}{4}$ c) $3\cdot\frac{4}{5}$ d) $6:\frac{4}{5}$ e) $\frac{4}{5}:6$ f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}$

2. a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}$ b) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)$

3. a) $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}$ b) $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}$

4. a) $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}$ b) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}$

5. Un cycliste a parcouru les 5/9 de l'étape d'aujourd'hui, qui mesure 216 km. Combien de kilomètres a-t-il déjà fait?

6. J'ai retiré de la banque 3900 €, ce qui correspond aux 3/11 de mes économies. Combien d'argent avait-je avant de les retirer?

7. D'un radeau de 5250 litres d'eau, les 4/15 correspondent à Braulio; les 2/5, à Enrique, et le reste, à Ruperto. Ruperto destine 3/10 pour arroser les tomates, et le reste pour arroser les arbres fruitiers. Quelle quantité d'eau Ruperto destine-t-il aux arbres fruitiers?

8. Classe les nombres suivants selon l'ensemble : entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, irrationnels ou réels.

   $3{,}52$ $2{,}\widehat{8}$ $1{,}\widehat{54}$ $\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots$

   $2{,}7$ $3{,}5222\ldots$ $\pi-2=1{,}1415926\ldots$

9. (10 et 11, page 21) Exprime comme une fraction :

   a) $3{,}7$ b) $0{,}002$ c) $-1{,}03$

   d) $2{,}\widehat{5}$ e) $0{,}\widehat{21}$ f) $14{,}\widehat{3}$

   a) $0{,}3\widehat{2}$ b) $1{,}0\widehat{3}$ c) $0{,}0\widehat{12}$

   d) $-3{,}\widehat{15}$ e) $5{,}34\widehat{5}$ f) $9{,}0\widehat{9}$

10. (16, 17, 18, 19 page 22) Calcule et simplifie le plus possible

    a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{21}$ b) $\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{18}$ c) $\frac{12}{7}\cdot\frac{35}{36}$

    d) $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{27}$ e) $\frac{13}{12}\cdot\frac{84}{65}$ f) $\frac{90}{35}\cdot\frac{14}{36}$

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+1\right)$

c) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]$

a) $-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}:\frac{2}{3}\right)$

b) $3-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{8}(-2)$

c) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right):\left[2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\right)\right]$

a) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2$

c) $-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)$

11. (20 page 22) Calcule en passant précédemment à fraction

a) $3,5+2,\widehat{3}$ b) $0,1\widehat{2}-0,2$ c) $1,\widehat{6}-1,0\widehat{2}$

d) $3,\widehat{42}+7,\widehat{6}$ e) $2,\widehat{3}+4,\widehat{6}$ f) $6,\widehat{17}+3,\widehat{82}$

12. De trois cents livres d'une bibliothèque, un sixième sont de poésie ; il y a aussi cent-quatre-vingts roman, et le reste sont des livres d'Histoire. Quelle fraction représentent ceux-ci?

13. D'un tambour d'huile on en prend la moitié, puis un cinquième du reste. Si dans le tambour il y a encore cinq litres, quelle est sa capacité?

14. Deux agriculteurs, père et fils, mettent deux heures à labourer un champ. Si le père laboure seul, il met six heures. Combien aurait mis le fils à le faire tout seul lui aussi?

15. Un robinet remplit un dépôt d'eau en neuf heures. Si on ouvre aussi le tuyau, il le fait en trente-six heures. Avec le robinet fermé, en combien de temps le tuyau viderait le dépôt ?

16. Un groupe d'amis vont manger à une pizzeria et ont choisi trois types de pizza, A, B y C. Chacun a pris 1/2 de A, 1/3 de B et 1/4 de C; ils ont demandé un total de 17 pizzas, et aucune pizza n'est pas restée complète.
   a. Est-ce que chacun a mangé plus d'une pizza, ou moins? Combien d'amis sont-ils?
   b. Combien de pizzas de chaque type ont-ils demandé? Quelle quantité de pizza est restée?

17. Dans une recette pour préparer de la confiture de figues on lit: ajouter 400 g de sucre et 100 g d'eau pour chaque kg de figues. Trois amis vendeurs, A, B et C, ont élaboré ces quantités:
   A → 2 boîtes de 5/8 kg et 4 de 9/25 kg
   B → 3 boîtes de 1/5 kg et 3 de 5/8 kg
   C → 5 boîtes de 9/25 kg et 2 de 1/5 kg
   a. Qui en a préparé plus de quantité?
   b. Si quelqu'un veut acheter 3/4 kg, quelle est la manière pour lui vendre la quantité la plus proche?
   c. Si l'eau s'évapore pendant la cuisson, quelle est la proportion de sucre de la confiture?

18. Des nombres suivants, lesquels ne sont pas rationnels? Essaie de créer une fraction pour les décimaux:
   a. 0,018
   b. 1,212112111...
   c. 2π
   d. 7,03232...

19. Cherche quatre nombres rationnels compris entre 1/3 et 1/2. Il y en a combien?

20. Divise en 3 plusieurs nombres plus petits de 10 et observe les résultats. Qu'est-ce qu'il peut se passer quand on divise en 3?

21. Peux-tu prédire les chiffres décimales des quotients 30 : 3; 31 : 3 y 32 : 3?

22. Si nous savons que $a > b > c > 0$, compare ces couples de fractions et dites quelle est la plus petite dans chaque cas: 1) a/b et a/c ; 2) a/c et b/c ; 3) b/a et b/c.

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 1

1. Calcule et simplifie le résultat

$$\frac{1}{2}\left[3-\frac{2}{5}\left(1-\frac{5}{9}\right)-\left(4-\frac{2}{3}\right):2\right]$$

2. Calcule en passant précédemment à fraction

$$-1,8\widehat{9}+0,0\widehat{28}+0,\widehat{72}$$

3. Écrit, dans chaque partie, trois nombres compris entre les deux donnés

a) $\frac{3}{20}$ y $\frac{4}{25}$ b) $2,\widehat{7}$ y $2,\widehat{8}$

4. Classifie en décimales exacts ou périodiques sans faire la division

$\frac{89}{50}$ $\frac{113}{12}$ $\frac{23}{32}$ $\frac{18}{7}$

5. Deux caisses de pommes sont vendues pour 2,50 € le kg. La première, qui suppose les 5/12 du total, est vendue 50€.
Combien de kilos de pommes il y avait dans chaque caisse ?

6. Parmi les utilisateurs d'un centre sportif, un cinquième a plus de 60 ans et les deux tiers ont entre 25 et 60 ans.
a) Quelle fraction d'utilisateurs a 25 ans ou moins?
b) Si le nombre d'utilisateurs est de 525, combien y en a-t-il chaque groupe d'âge?

7. J'achète un vélo que je paierai en trois fois. La première fois, je paie 3/10 du total;
La seconde fois, 4/5 de ce qu'il me reste à payer, et pour la troisième, je n'ai qu'à payer 21 €. Quel est le prix du vélo?

8. Vrai ou faux? Exprime et donne des exemples :
a) Toutes les fractions sont des nombres rationnels.
b) Tous les nombres rationnels sont fractionnaires.
c) Les nombres entiers peuvent être exprimés en fraction.
d) Une fraction est toujours égale à un nombre décimal périodique.
e) Un nombre décimal périodique est un nombre rationnel.

1. PUISSANCES

- PUISSANCES D'EXPOSANT POSITIF
  $a^n = \underline{a \cdot a \cdot \quad \cdot a}$ (n facteurs) n>0
  a^n *se lit* a puissance n
  a exposant n

- SIGNE D'UNE PUISSANCE D'EXPOSANT POSITIF
  Soit a^n une puissance de base un nombre rationnel et exposant positif
  - Si la base est positive, la puissance est toujours positive
  - Si la base est négative, la puissance est positive si l'exposant est pair et négative si l'exposant est impair.

- PUISSANCES D'EXPOSANT NÉGATIF
  a^{-n} = inverse de a^{-n} $= \frac{1}{a^n}$

- PUISSANCES D'EXPOSANT 0, 1 ET -1

a est un nombre rationnel non nul : $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^{-1} = \frac{1}{a} \end{cases}$

PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES

Pour tous réels non nuls a et b, pour tous entiers relatifs n, p et q, on a:

- PUISSANCE D'UNE MULTIPLICATION $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

- PUISSANCE D'UNE DIVISION $(a:b)^n = a^n : b^n$

- MULTIPLICATION DE PUISSANCES AVEC LA MÊME BASE $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

- DIVISION DE PUISSANCES AVEC LA MÊME BASE $a^p : a^q = a^{p-q}$

- PUISSANCE D'UNE PUISSANCE $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

2. NOTATION SCIENTIFIQUE

- PUISSANCES DE BASE 10
  - Une puissance de base 10 et exposant positif est égale à l'unité suivie d'autant de zéros que le nombre de l'exposant.
  - Une puissance de base 10 et exposant négatif est égale à l'unité divisé par la même puissance d'exposant positif.

- NOTATION SCIENTIFIQUE

  La notation scientifique d'un décimal x est son écriture sous la forme

$x = d \cdot 10^{n}$ où :

  - d est un décimal ayant une seule chiffre non nul avant la virgule ;
  - n est un entier relatif

- ADDITION ET SOUSTRACTION en notation scientifique
  - Pour additionner ou soustraire des nombres en notation scientifique il faut que l'exposant de la puissance de 10 soit égal dans tous les termes, c'est-à-dire, que l'ordre de la magnitude doit être le même. On additionne les nombres décimaux et on laisse la puissance de 10 qu'on a.

    $3{,}5\cdot10^4+2{,}5\cdot10^3=3{,}5\cdot10^4+0{,}25\cdot10^4=3{,}75\cdot10^4$

- MULTIPLICATION ET DIVISION
  - Pour multiplier ou diviser des nombres en notation scientifique, on multiplie ou on divise d'un côté les puissances de 10, et de l'autre côté les nombres précédents.

3. RADICAUX

RACINE CARRÉ $\sqrt{a}$

RADICAL $\sqrt[n]{a}$ n est l'indice

a est le radicande

CALCULS AVEC DES RACINES

- Mettre sous la forme $b\sqrt[n]{a}$ avec n un nombre naturel.
- Un radical sous le radical $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$
- Quantité conjuguée (Cela permet de supprimer le radical au dénominateur) (Il permet de « rendre rationnels » des dénominateurs de fractions, ce qui facilite souvent les calculs.)

L'expression conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et vice versa, ensuite, on utilise le fait que :
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a - b$

RÈGLES SUR LES RADICAUX

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

4. NOMBRES RATIONNELS ET IRRATIONNELS

- NOMBRES IRRATIONNELS
  Nombres décimaux dont le nombre de chiffres après la virgule est infini et non périodique :$\sqrt{3}, \sqrt{7}, \pi$, ... Ils n’ont pas une écriture rationnelle.

- NOMBRES RÉELS
  R ensemble de nombres réels, c’est-à-dire des nombres qui sont soit rationnels, soit irrationnels

EXERCICES

1. (4 page 36) Exprime comme une seule puissance

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ b) $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$ c) $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^3$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} : \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{4}$ f) $\frac{3^{-1}}{5 \cdot 15^2}$

2. (5 page 36) Simplifie

a) $\frac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$ b) $\frac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 9^{-1}}{2^{-5} \cdot 8 \cdot 3^2}$ c) $\frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a}$

d) $(6a)^{-1} : (3a^{-2})^{-2}$ e) $(a^{-1}b^2)^2 \cdot (ab^{-2})^{-1}$ f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} (a^{-1})^{-2}$

3. (16 page 37) Calcule, s’il est possible, les racines suivantes:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[3]{216}$

f) $\sqrt[7]{-128}$ g) $\sqrt[5]{-243}$ h) $\sqrt[6]{4\,096}$ i) $\sqrt[6]{64}$ j) $\sqrt[3]{-8}$

k) $\sqrt[4]{625}$ l) $\sqrt{-8}$ m) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$ n) $\sqrt[5]{-1}$

4. (17 page 37) Simplifie le plus possible

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$ b) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$ c) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$

d) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$ e) $\sqrt[4]{16a^5 \cdot b}$ f) $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$

5. (18 page 37) Simplifie le plus possible

a) $\sqrt[4]{32}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt[3]{200}$

d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt[4]{144}$ f) $\sqrt[3]{250}$

g) $\sqrt[5]{64}$ h) $\sqrt[3]{243}$ i) $\sqrt{4a^3}$

6. (19 page 37) Simplifie le plus possible

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

7. (20 page 37) Simplifie le plus possible

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^4$ b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ c) $\left(\sqrt[6]{2^2}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{1000}$ e) $\sqrt[5]{2}\,\sqrt[5]{16}$ f) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{81}$

8. (22 page 37) Calcule

a) $\sqrt{50} + \sqrt{72} - 10\sqrt{2}$ b) $\sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{20}$

c) $-\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{108}$ d) $\sqrt{175} + \sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

9. Écris sous la forme d'une puissance de 2 ou de 3 :

$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $B = 27$ $C = \dfrac{1}{32}$

$D = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3}$ $E = \dfrac{2}{128}$ $F = (3 \times 3)^3$

10. Écris sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$A = 7^{-1}$ $B = 2^3 \times 3^2$ $C = \dfrac{2^5}{2^9}$

$D = \dfrac{2^{-3}}{5^{-2}}$ $E = \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^2$ $F = (2^{-4} \times 5^2)^2$

11. Soit a un nombre réel non nul. Écris sous la forme d'une puissance de a.

$A = a^7 \times a^2 \times a^5$ $B = \dfrac{1}{a^3 \times a^4}$ $C = \dfrac{a^{-5} \times a^2}{a^3 \times a^{-7}}$

$D = (a^{-2} \times a^7)^3$ $E = \dfrac{(a^7)^3}{(a^{-2})^{-6}}$ $F = \left(\dfrac{a^{-3}}{a^5}\right)^7$

12. Soit a, b, c trois nombres réels non nuls. Écris sous la forme d'une puissance de $a^n b^p c^q$.

$A = \dfrac{a^2 \times b^5 \times c^7}{a^3 \times b^2 \times c^2}$ $B = \dfrac{1}{b^3} \times \dfrac{ac}{b^2} \times \dfrac{a^3 b^2}{c^4}$ $C = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \times \dfrac{a^{-2}}{c^{-3}} \times \left(\dfrac{b^{-2}}{c^3}\right)^{-2}$

EXERCICE 3B.1

1. Compléter le tableau :

	ÉCRITURE DECIMALE	ÉCRITURE SCIENTIFIQUE
a.	540 000 000 000	**$5,4 \times 10^{11}$**
b.	650 000 000	
c.	0,000 000 006	
d.	1 048 000 000 000	
e.	0,000 002 64	
f.	20 300 000	
g.	673,185	
h.	8 070 000 000	
i.	4000,007	
j.	0,700 600 000	

2. Compléter le tableau :

	ÉCRITURE « $a \times 10^n$ »	ÉCRITURE SCIENTIFIQUE
a.	$6\,300 \times 10^{4}$	**$6,3 \times 10^{7}$**
b.	450×10^{6}	
c.	$0,000\,67 \times 10^{-5}$	
d.	$6\,300 \times 10^{12}$	
e.	$0,012\,500 \times 10^{-14}$	
f.	$0,012\,500 \times 10^{-12}$	
g.	$0,012\,500 \times 10^{15}$	
h.	$81\,500\,000 \times 10^{23}$	
i.	$81\,500\,000 \times 10^{13}$	
j.	$81\,500\,000 \times 10^{-34}$	

EXERCICE 3B.2

Donner un ordre de grandeur de chaque nombre :

a. 7 890 000 000 ↓ **$7,89 \times 10^{9}$** ↓ **8×10^{9}**	**b.** 596 523 654 198 ↓ ↓
c. 7 128 955 ↓ ↓	**d.** 0,000 006 89 ↓ ↓
e. 53 875 109 789 ↓ ↓	**f.** 0,008 098 432 123 ↓ ↓
g. 800 654 100 679 ↓ ↓	**h.** 0,000 100 200 300 ↓ ↓

EXERCICE 3B.3

Donner un ordre de grandeur du résultat :

a.	41 000	×	680 000		
	↓		↓		
	4×10^{4}	×	**7×10^{5}**	=	**28×10^{9}**
				=	**3×10^{10}**
b.	790 000 000	×	310 000 000		
	↓		↓		
		×		=	
				=	
c.	0,000 008 9	×	0,000 005 09		
	↓		↓		
		×		=	
				=	
d.	4 700 000	×	0,000 000 52		
	↓		↓		
		×		=	
				=	
e.	0,002 680 45	×	971 321 654		
	↓		↓		
		×		=	
				=	

EXERCICE 3B.4

1. Retrouver le résultat le plus proche :

a. $(8,2 \times 10^{6}) \times (5,4 \times 10^{8}) = ?$

$4,4 \times 10^{15}$ $4,2 \times 10^{17}$
$4,3 \times 10^{13}$ $4,5 \times 10^{-16}$

b. $(9,1 \times 10^{12}) \times (3,7 \times 10^{4}) = ?$

$7,4 \times 10^{17}$ $6,5 \times 10^{17}$
$3,4 \times 10^{17}$ $1,7 \times 10^{17}$

c. $(6,3 \times 10^{-5}) \times (8,9 \times 10^{-7}) = ?$

$5,6 \times 10^{12}$ $5,6 \times 10^{11}$
$5,6 \times 10^{-12}$ $5,6 \times 10^{-11}$

d. $(5,1 \times 10^{13}) \times (4,6 \times 10^{-19}) = ?$

$2,4 \times 10^{-32}$ $2,3 \times 10^{-5}$
$2,2 \times 10^{5}$ $2,5 \times 10^{-6}$

e. $(1,6 \times 10^{-45}) \times (9,8 \times 10^{34}) = ?$

$1,6 \times 10^{-11}$ $1,6 \times 10^{-9}$
$1,6 \times 10^{-10}$ $1,6 \times 10^{-12}$

2. Retrouver le résultat le plus proche

a. $534\,871 \times 765\,897\,108 = ?$

$3,9 \times 10^{15}$ $4,2 \times 10^{12}$
$4,1 \times 10^{14}$ $3,8 \times 10^{13}$

b. $0,000\,000\,518 \times 0,000\,004\,127 = ?$

$7,3 \times 10^{-12}$ $9,6 \times 10^{-12}$
$4,2 \times 10^{-12}$ $2,1 \times 10^{-12}$

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 2

1. Calcule

   a) $(-3)^{-2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{0}-3^{-1}$ b) $\left(3-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 2^{-3}$

2. Simplifie

   a) $\frac{3ab^{-2}}{6a^{2}b^{-1}}$ b) $\left(\frac{-1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

   c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4}\cdot\frac{a^{3}}{b^{2}}$ d) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-3}:\frac{(b^{2})^{-1}}{a^{-4}}$

3. Simplifie

   $\frac{24^{2}\cdot 15^{-2}\cdot 6^{4}}{8^{4}\cdot 9^{-3}\cdot 3^{10}}$

4. Exprime en écriture scientifique

   a) 234 000 000 b) 0,0000075

   c) $758\cdot 10^{-5}$ d) $0{,}035\cdot 10^{13}$

5. Calcule

   a) $(3{,}5\cdot 10^{7})\cdot(8\cdot 10^{-13})$ b) $(9{,}6\cdot 10^{-8}):(3{,}2\cdot 10^{10})$

   c) $(2{,}7\cdot 10^{8})+(3{,}3\cdot 10^{7})$ d) $\sqrt[3]{8\cdot 10^{18}}$

6. Simplifie

   a) $\sqrt[3]{-1\,331}$ b) $\sqrt[5]{125}\cdot\sqrt[5]{25}$ c) $\sqrt[3]{120a^{3}b^{4}}$

7. Simplifie s'il est possible

   a) $\sqrt{3}\sqrt{27}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}$

   c) $\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ d) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{5}$

8. L'un des plus grands gisements de gaz naturel en Asie centrale dispose de réserves de 900 km^3. Ils ont découvert un sac à essence qui augmente ces réserves de $1{,}3\cdot 10^{4}$ hm^{3}. Sa production annuelle s'élève à $1{,}8\cdot 10^{10}$ m^{3}. Combien d'années cette ressource énergétique peut-elle être exploitée si le taux de production actuel est maintenu? Exprime en notation scientifique et fait les opérations.

1. VALEUR APPROCHÉE D'UN NOMBRE

On emploi de valeurs approchées au lieu des valeurs exactes (par exemple, 3,14 au lieu de π).

1.1. ARRONDIR ET TRONQUER.

Il y a les valeurs approchées par défaut (légèrement en dessous), par excès (légèrement au-dessus) et arrondie (la plus proche de la valeur)

1.2. ERREURS

L'erreur absolue est : $|\text{valeur approchée} - \text{valeur réelle}|$

Où les barres verticales désignent la valeur absolue.

L'erreur relative est : $\frac{|\text{valeur approchée} - \text{valeur réelle}|}{valeur\ réelle}$

2. LA PROPORTIONNALITÉ DANS LES PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Dans ce chapitre on va résoudre des problèmes avec les outils de l'arithmétique. La plupart des problèmes ont des grandeurs proportionnelles. Premièrement on va rappeler les méthodes pour la résolution de problèmes de proportionnalité simple et multiple ou composée.

Le retour à l'unité. Le principe est simple : il consiste à calculer la valeur associé à l'unité. Il suffit ensuite de multiplier (DIVISER) cette valeur « à l'unité » appelé coefficient de proportionnalité par le nombre correspondant pour obtenir la quantité.

Règle de trois simples directes. Cette règle repose sur l'égalité des **produits en croix**, qui sont les produits des termes de chaque diagonale dans un tableau de proportionnalité à deux lignes et deux co**lonnes.**

Règle de trois simples inverses. Il y a des grandeurs qui **diminuent** proportionnellement à un accroissement des données.

Par exemple, si on demande en combien de temps 10 ouvriers construiront un certain mur que 15 ouvriers ont pu élever en 12 jours, on considérera qu'il faut, pour construire un tel mur, un travail égal à 18 jours.

Problèmes de proportionnalité multiple ou composée

Il s'agit de problèmes faisant intervenir la composition de plus de deux relations de proportionnalité simple.

RÈGLE DE TROIS COMPOSÉE

On entend par *règle de trois composée* une question dans laquelle il entre un nombre pair de quantités deux à deux de même espèce. Une de ces quantités est inconnue ; il faut la trouver au moyen de toutes les autres. La condition *expresse* pour qu'il y ait règle de trois composée est celle-ci : il faut que la grandeur de même espèce que l'inconnue, comparée successivement à toutes les autres grandeurs considérées une à une, soit proportionnelle ou inversement proportionnelle à ces grandeurs. Le numéro précédent donne la solution générale des règles de trois composées.

Exemple :
La classe de CM2 prépare une classe de mer pour 50 enfants pendant 28 jours. Comment calculer la consommation de sucre nécessaire, sachant qu'il faut compter 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants ?

3. PROBLÈMES CLASSIQUES
RÉPARTITIONS PROPORTIONNELLES

Répartitions directement proportionnelles

Pour répartir une somme N de façon directement proportionnelle à a, b, c,…, les parties on peuvent obtenir en multipliant chaque nombre a,b,c,…. par la constante de proportionnalité $\frac{N}{a+b+c+..}$

Répartitions inversement proportionnelles

Pour répartir une somme N de façon inversement proportionnelle à a, b, c,…, les parties on peuvent obtenir en divisant la constante de proportionnalité $\frac{N}{a+b+c+..}$ par chaque nombre a,b,c,…. .

4. **CALCULER UN POURCENTAGE**
Un pourcentage est un rapport exprimé d'une manière particulière; il s'agit de comparer une quantité à 100.
On écrit avec le signe % → **a% et on le lit "a pourcent".**

Fractions et pourcentages
Un pourcentage, c'est une fraction dont le dénominateur est 100 a%→ $\frac{a}{100}$

Pourcentages et nombres décimaux
Il faut écrire le pourcentage sous forme de fraction décimale puis calculer la valeur de la fraction obtenue.

Pourcentages spéciaux
Le 50% c'est la moitié. Pour calculer le 50%, d'une quantité, on peut la multiplier par 0,5 ou bien diviser la quantité par 2.
Le 25% c'est la quart part. Pour calculer le 25%, d'une quantité, on peut la multiplier par 0,25 ou bien diviser la quantité par 4.
Le 20% c'est la cinquième part. Pour calculer le 20%, d'une quantité, on peut la multiplier par 0,2 ou bien diviser la quantité par 5.
Le 10% c'est la dixième part. Pour calculer le 10%, d'une quantité, on peut la multiplier par 0,1 ou bien diviser la quantité par 10.

Pourcentage d'augmentation et de réduction

En économie et dans les taux d'intérêts, l'étude porte sur des variations en pourcentage, des augmentations ou des réductions. On peut tout à fait décomposer le calcul en deux temps : calcul de l'augmentation ou de la réduction, puis calcul de la valeur finale en effectuant une addition ou une soustraction. Mais il est préférable de voir ces augmentations ou ces réductions comme issues de l'application d'un coefficient multiplicateur. Seul cet aspect des choses permet de retrouver efficacement une valeur de référence ou d'appliquer des augmentations successives.

Une **augmentation** de **t %** se traduit par une multiplication par $1+\frac{t}{100}$ et une **diminution** de **t %** par une multiplication par $1-\frac{t}{100}$

Pourcentage de pourcentage

On peut être amené à multiplier entre eux des pourcentages. C'est le cas par exemple des pourcentages de pourcentage.

Un pourcentage de pourcentage, $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ d'une quantité, équivaut à calculer le $(t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots t_n)$% de la quantité

5. **INTÉRÊT COMPOSÉ**

Quand un capital est placé à intérêts composés, l'intérêt produit à la fin de la première année est ajouté au capital, ce qui forme un deuxième capital qui produit un intérêt pendant la deuxième année. Cet intérêt ajouté à son capital forme un troisième capital qui produit un intérêt pendant cette troisième année; cet intérêt s'ajoute à son capital, et ainsi de suite. De là nous allons déduire une expression très simple pour la valeur acquise par un capital placé à intérêts composés. Si on représente par t le nombre des années, par r taux périodique annuel (en pourcentage) et par Cf la valeur acquise par le capital C, la règle est exprimée par cette formule :

$$C_f = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

EXERCICES

1. Complète les phrases suivantes.

a. Pour augmenter un nombre de 20 % on le multiplie par ....

b. Pour diminuer un nombre de 15 % on le multiplie par ....

c. Pour augmenter un nombre de 5 % on le multiplie par ....

d. Pour diminuer un nombre de 7 % on le multiplie par ....

2. **Élections**

a. Lors d'une élection, une candidate a obtenu 11,5 % des voix exprimées, soit 17 273 voix. Calcule le nombre total de voix exprimées .
b. Pour la même élection, un autre candidat a obtenu 35 297 voix. Calcule le pourcentage de votes exprimés pour ce candidat.

3. **Imprimante.**

Mon imprimante peut agrandir ou réduire un document d'un certain pourcentage. Sur mon document Doc1, j'ai dessiné un carré de côté 7 cm.
a. Je veux obtenir un carré de 10 cm de côté sur Doc2, quel pourcentage dois-je utiliser ? On arrondira à 0,01 %.
b. J'ai perdu Doc1 entre temps et je veux réduire Doc2 pour retrouver, dans Doc3, un carré de côté 7 cm. Quel pourcentage dois-je utiliser ?

4. **Prix qui varie**

a. Un scooter coûte 950 €. Son prix augmente de 5 %. Quel est le nouveau prix (arrondi à 1 € près) ?
b. Un scooter coûte 950 €. Son prix baisse de 5 %. Quel est le nouveau prix (arrondi à 1 € près) ?
c. Le prix d'un scooter passe de 950 € à 1 100 €. Quel est le pourcentage de hausse (arrondi au dixième) ?
d. Un scooter coûte 1 050 € après une augmentation de 7 %. Quel était l'ancien prix (arrondi à 1 € près) ?
e. Le prix d'un scooter passe de 980 € à 830 €. Quel est le pourcentage de baisse (arrondi au dixième) ?
f. Un scooter coûte 850 € après une baisse de 11 %. Quel était l'ancien prix (arrondi à 1 € près) ?

5. Sur 175 élèves qui se sont présentés au DNB 137 ont été reçus. Calcule le pourcentage (à 0,1 % près) des élèves qui n'ont pas obtenu le DNB.

6. Sur une promotion pour une boîte de chocolat on peut lire : « 50 % de produit gratuit en plus ». Par rapport à la boîte habituelle, la boite en promotion contient-elle : (entoure la bonne réponse)

• le double de chocolat ?
• le triple ?
• une fois et demie ?

7. Sur un document on peut lire les résultat d'un concours administratif :

• candidats à la promotion A : 50 hommes et 200 femmes ;
• candidats à la promotion B : 80 hommes et 20 femmes.

Les résultats du concours sont les suivants :

• promotion A : 20 % de reçus chez les hommes et 80% chez les femmes ;
• promotion B : 80% de reçus chez les hommes et 20 % chez les femmes.

Clovis pense que les hommes et les femmes sont donc à égalité sur l'ensemble des deux promotions. A-t-il raison ?

8. Je place un capital de 10 000 € à un taux annuel de 2,5 %. Les intérêts sont ajoutés au capital chaque année.

a. Combien aurai-je au bout d'un an ?
b. Combien aurai-je au bout de 2 ans ?
c. Combien aurai-je au bout de 10 ans ?

9. À quels pourcentages correspondent ces fractions ?

a. Un demi c'est …….. %. b. Un quart c'est …….. %.

c. Trois quarts c'est …….. %.
d. Trois cinquièmes c'est …….. %.
e. Cinq quarts c'est …….. %.
f. Huit quarts c'est …….. %.

AUTOÉVALUATION

1. Indique l'indice de variation et le montant final dans chaque cas:
a) 300 diminue de 12% puis de 35%.
b) 1520 diminue de 90% puis augmente de 150%

2. Indique le pourcentage d'augmentation ou de diminution correspondant à chacun des indices de variation suivants:
a) 1,07 b) 0,78 c) 2,2

3. Le prix des tomates a augmenté de 3,5% et son prix est maintenant de 2,50 € le kilo.
a) Quel était le prix avant la hausse?
b) Si vous exprimez le résultat de la section précédente avec deux chiffres significatifs, que pouvez-vous dire de l'erreur absolue faite?

4. Pour un livre qui coûte 12,50 €, je n'ai dû payer que 9,50 €. Calculez le pourcentage de réduction appliqué au livre.

5. On mélange 20 kg de farine à 1,25 € / kg avec 35 kg d'une autre farine à 0,75 € / kg.
Quel sera le prix final du mix?

6. Nous voulons répartir 756 entre trois amis de 12, 13 et 15 ans de manière proportionnelle à l'âge de chacun. Quels montants vont-ils recevoir?

7. Un véhicule, à la vitesse de 3 m / s, effectue 14 tours dans un circuit en 4 heures.
Combien de tours donnera-t-il au même circuit, en 6 heures, s'il tourne à une vitesse de 5 m / s?

8. Il faut 5 heures à quatre jardiniers pour tondre un terrain de 150 m^2.
Combien de temps faudra-t-il à cinq jardiniers pour tondre une parcelle de 240 m^2?

9. Deux trains partent à 8 heures du matin de deux villes A et B distantes l'une de l'autre de 780 km.
Si celui qui part de A vers B a une vitesse de 110 km / h, et celui qui part de B vers A va à 90 km / h, à quelle heure se rencontreront-ils?

10. Nous déposons 4000 € à un taux d'intérêt annuel de 3,5% dans une banque.
Que deviendra-t-il dans 3 ans si les périodes de capitalisation sont trimestrielles?

1. SUITES

On appelle **suite numérique** toute application d'une partie de N sur *IR*. Une suite peut donc être considérée comme une liste ordonnée de nombres réels. La notation habituelle est, si la suite s'appelle (***a***):

(a_n) qui se lit **: "*a* indice n"** ou **"terme d'indice n de la suite *a*".**

Si la suite ***a*** a pour ensemble d'indice l'ensemble des entiers naturels IN, on a alors la suite:

a_1 **,** a_2 **, ... ,** a_n**, ...**

RÈGLE DE FORMATION

Il y a de suites où on peut déterminer les termes avec un certain critère de formation, ce critère est appelé règle de formation.

TERME GÉNÉRAL (terme de rang *n*)

Le terme général d'une suite c'est une expression algébrique donnée comme expression de *n,* et permet un calcul direct d'un terme quelconque. La notation de le **terme général** est a_n.

SUITES RÉCURRENTES

Une suite est récurrente quand chaque terme, après un certain, est obtenu à partir des précédents.

Ex.
La suite de Fibonacci où chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent et dont on connaît le terme général et sa relation avec le nombre d'or.

2. SUITES ARITHMÉTIQUES

Une **suite arithmétique** est une suite de nombres réels telle que chacun de ses termes, autres que le premier, est obtenu en ajoutant au terme qui le précède un même nombre appelé **raison d**.

EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Si a_1 désigne le premier terme et *d* la raison, on a, pour *n* entier supérieur ou égal à 1

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Pour une suite arithmétique de premier terme et de raison *r*, le terme général est donné, pour $n \geq 1$ par

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$ Où a_1 désigne le premier terme et *d* la raison

Si a_p et a_q sont des termes d'une suite arithmétique avec p<q, on peut vérifier

$$\boldsymbol{a_q = a_p + (q-p)d}$$

SOMME DES n PREMIERS TERMES D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Pour une suite arithmétique, la somme S_n des n premiers termes est donnée par :

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

3. SUITES GÉOMÉTRIQUES

Une **suite géométrique** est une suite de nombres réels telle que chacun de ses termes, autres que le premier, est obtenu en multipliant celui qui le précède par un même nombre appelé raison **r** .

On vérifie toujours dans les suites géométriques $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Si a_1 désigne le premier terme et r la raison, on a, pour n entier supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Pour une suite géométrique de premier terme a_1 et de raison r, le terme général est donné, pour $n \geq 1$ par

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Si a_p et a_q sont des termes d'une suite géométrique avec p<q, on peut vérifier

$$\boldsymbol{a_q = a_p \cdot r^{q-p}}$$

SOMME DES n PREMIERS TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Pour une suite géométrique de raison r, la somme S_n des n premiers termes est donnée par :

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}}$$

SOMME DES TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE AVEC $|\boldsymbol{r}| < 1$

Pour une suite géométrique de raison $-1 < r < 1$, la somme S des *infinis* termes est donnée par :

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

PRODUIT DES n TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Le produit $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ des n premiers termes d'une suite géométrique est donné par :

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

EXERCICE 1A.1
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = 3n - 7$
Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.2
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = 2^n$
Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.3
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = n^2$
Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.4
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
Déterminer les termes suivants (en écriture fractionnaire) :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.5
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = n^n$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.6
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = (-1)^n$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{53}	u_{72}	u_{147}

EXERCICE 1A.7
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

EXERCICE 1A.8
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6

EXERCICE 1A.9
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 128 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

EXERCICE 1A.10
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 - 4 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5

EXERCICE 1A.11 On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{50}	u_{101}	u_{764}

EXERCICE 1A.12 On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{50}	u_{101}	u_{764}

EXERCICE 2A.1
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 2A.2
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n}{2}$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 2A.3
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 5$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 2A.4
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. (u_n) est-elle une suite arithmétique ?

EXERCICE 2A.5
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 4n$
(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

EXERCICE 2A.6
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 5n^2$
(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
On rappelle la formule : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

EXERCICE 2A.7
a. On donne $u_0 = 5$ et $r = -2$ .Calculer u_7 .
b. On donne $u_0 = -7$ et $r = \frac{3}{2}$. Calculer u_5.
c. On donne $u_0 = 7$ et $r = \frac{-5}{7}$ .Calculer u_7 .

EXERCICE 2A.8
a. On donne $u_3 = 8$ et $r = 4$ .Calculer u_{11} .
b. On donne $u_2 = -7$ et $r = 2$ .Calculer u_8.
c. On donne $u_{12} = 31$ et $r = -\frac{1}{2}$ .Calculer u_{17} .

EXERCICE 2A.9
a. On donne $u_2 = 15$ et $u_{12} = 10$.
→ Calculer r puis u_{16} .
b. On donne $u_5 = 12$ et $u_{17} = 72$.
→ Calculer r puis u_{21} .
c. On donne $u_7 = 4$ et $u_4 = 7$.
→ Calculer r puis u_{35} .

EXERCICE 2A.10
a. Soit (u_n) est la suite arithmétique : de premier terme $u_0 = 5$, de raison $r = 2$.
→ Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.
b. Soit (u_n) est la suite arithmétique : de premier terme $u_1 = 1$, de raison $r = \frac{1}{3}$.
→ Calculer $u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.
c. Soit (u_n) est la suite arithmétique : de premier terme $u_5 = 8$, de raison $r = -\frac{1}{2}$.
→ Calculer $u_5 + \ldots + u_{10}$.

EXERCICE 2A.11
A l'aide d'une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison, calculer la somme :

$$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$$

(c'est-à-dire la somme des 50 premiers nombres pairs).

EXERCICE 2A.12
En janvier, un jeune diplômé décide d'ouvrir une concession automobile. Ce premier mois, il vend 3 voitures. Ensuite, chaque mois il vendra 2 voitures de plus que le mois précédent.
a. Définir une suite arithmétique de premier terme u_1 qui permette de déterminer le nombre de voitures vendues chaque mois.
b. Combien de voitures vendra-t-il en février ? mai ? décembre ?
c. Combien de voitures aura-t-il vendu au cours de la $1^{ère}$ année ?
d. Combien de voiture aura-t-il vendu en 5 ans ?
e. Combien de voitures aura-t-il vendu au cours de la $3^{ème}$ année.

EXERCICE 3A.1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 3A.2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 3A.3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5 \times (-1)^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 3A.4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

EXERCICE 3A.5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

EXERCICE 3A.6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite géomtrique de raison q.

On rappelle la formule : $\boxed{u_n = u_0.q^n}$

EXERCICE 3A.7

a. On donne $u_0 = -1$ et $q = 2$ .Calculer u_7 .

b. On donne $u_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2}$ .Calculer u_5.

c. On donne $u_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3}$ .Calculer u_5 .

EXERCICE 3A.8

a. On donne $u_3 = 2$ et $q = 3$ .Calculer u_6 .

b. On donne $u_5 = 2$ et $q = -5$ .Calculer u_9 .

c. On donne $u_3 = 0{,}01$ et $q = -10$ .Calculer u_7.

d. On donne $u_8 = 512$ et $q = 2$ .Calculer u_3.

e. On donne $u_2 = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{2}{3}$ .Calculer u_5 .

EXERCICE 3A.9

a. On donne $u_2 = 17$ et $u_3 = 51$

→ Calculer q puis u_5 .

b. On donne $u_1 = 7$ et $u_3 = 112$

→ Calculer q puis u_6 .

c. On donne $u_7 = 11$ et $u_{10} = 3\,773$

→ Calculer q puis u_{12} .

d. On donne $u_5 = 41$ et $u_9 = 25\,625$

→ Calculer q puis u_{10} .

e. On donne $u_4 = 256$ et $u_{15} = 0{,}125$

→ Calculer q puis u_{18} .

EXERCICE 3A.10

a. Soit (u_n) est la suite géométrique :

- de premier terme $u_0 = -3$
- de raison $q = 2$.

→ Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

b. Soit (u_n) est la suite géométrique :

- de premier terme $u_1 = 64$
- de raison $q = 0{,}5$.

→ Calculer $u_1 + \ldots + u_{12}$.

c. Soit (u_n) est la suite géométrique :

- de premier terme $u_5 = 5$
- de raison $q = 0{,}9$.

→ Calculer $u_5 + u_6 + \ldots + u_{20}$.

EXERCICE 3A.11

Un nageur s'apprête à traverser la manche, soit une distance de 21 km.

Pendant de la première heure, il parcourt 2,1 km. Mais à cause de la fatigue, à chaque heure il ne nage que 90% de la distance nagée pendant l'heure précédente.

1. a. Déterminer un suite géométrique u_n de premier terme $u_1 = 2{,}1$ dont chaque terme correspond à la distance nagée pendant la $n^{\text{ème}}$ heure.

b. Déterminer u_2, u_5 et u_{10}.

2. Quelle est la distance parcourue…

a. … en 10 heures ?

b. … en 20 heures ?

c. … en 100 heures ?

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 4

1. Écris le terme général de chacune des suites suivantes :

   a) $-\frac{9}{2}, -4, -\frac{7}{2}, -3, \ldots$

   b) $3; 0{,}6; 0{,}12; 0{,}024; \ldots$

   c) $1{,}2; 2{,}3; 3{,}4; 4{,}5; \ldots$

   d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

2. Trouve la formule par récurrence de la suite 8, 14, 6, -8,… et écris les trois termes suivantes.

3. Calcule la somme des dix premiers termes des suites suivantes :
   a) 9 ; 6,5 ; 4 ; 1,5 ; …
   b) 2, -4, 8, -16, …

4. Soit (a_n) est la suite arithmétique avec le terme $a_5 = 22$, et $a_9 = 38$. Calcule a_{25} et le lieu qui occupe le terme qui vaut 58.

5. Calcule la fraction de $6,\hat{4}$ en utilisant les suites géométriques.

6. La somme des douzes multiples consécutifs de 5 est 750. Calcule le premier et le dernier des multiples additionnés.

7. Une entreprise offre à ses employés un salaire de 15 000 € par an et une augmentation de 500 € pour chacune des années suivantes. Une autre entreprise offre le même salaire avec une augmentation annuelle de 5%. Justifie lequel des deux est le meilleur en comparant le salaire des 5 ans.

8. Afin d'enregistrer un annonce publicitaire, un grand nombre de personnes ont été embauchées et doivent être placées sur 51 lignes. Chaque ligne a deux personnes de plus que la précédente et à la ligne 26, il doit y avoir 57 personnes. Détermine le nombre de personnes dans la première ligne, le nombre de personnes de la dernière ligne et le nombre total de personnes impliquées dans l'annonce.

9. Vrai ou faux? Justifie tes réponses.
   a) Pour calculer S_{20} selon une progression arithmétique ou géométrique, il suffit de connaître deux de ses termes.
   b) Les termes d'une progression géométrique peuvent être obtenus en multipliant chaque terme par le précédent.
   c) La somme des termes infinis d'une progression géométrique peut être calculée si $-1 < r < 1$.
   d) Une progression arithmétique diminue lorsque la différence est inférieure à 1.

3ºESO CHAPITRE 5 : LE LANGAGE ALGÉBRIQUE

1. EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

Travailler en algébrique c'est faire des relations des nombres et des lettres.

- **Monômes**

$-6x^3$; $5xy$; $2xyz$; 5

- **Polynômes**

  $-6x^3 + 5xy$

- **Identités** : c'est vrai pour toutes les valeurs des lettres

  $2(x+1)=2x+2$

- **Équations** : ce n'est pas vrai pour toutes les valeurs des lettres

  $2(x+1)= x-3$

2. MONÔMES

C'est une expression littérale avec un seul terme.

OPÉRATIONS AVEC MONÔMES

Addition et soustraction de monômes

On regroupe les termes en x^n

E : Réduire

$3x^2 + 5x^2 - 2x^2 = 6x^2$

Multiplication et division

E : $(-3x^3) \cdot (2x^2) = -6x^5$

$(-8x^3) : (2x^2) = -4$

3. POLYNÔMES

C'est une expression littérale avec plus d'un terme. On doit écrire avec le moins de termes possible.

Le **degré** du polynôme, c'est le plus grand des degrés des termes.

La valeur d'un polynôme, c'est le résultat qu'on obtient en remplaçant les lettres ou variables par des nombres déterminés et en faisant après les opérations.

OPÉRATIONS AVEC POLYNÔMES

Addition et soustraction de polynômes

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possible.

Multiplication de polynômes

Pour multiplier deux polynômes on multiplie chaque monôme d'un polynôme par tous les monômes de l'autre polynôme, puis on réduit les termes semblables.

4. IDENTITÉS

Une identité c'est une égalité vrai pour toutes les valeurs des lettres

IDENTITÉS REMARQUABLES

Carré d'une somme $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$

Carré d'une somme = carré du premier terme + double produit+ carré du second terme

Carré d'une différence $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$

Carré d'une différence carré du premier terme - double produit+ carré du second terme

Produit d'une somme par une différence $(a+b)\cdot(a-b) \quad = \quad a^2 - b^2$

Produit d'une somme par une différence= différence de deux carrés

FACTEUR COMMUN

Remplacer une somme par un produit égal, c'est factoriser. La **mise en évidence** simple est une méthode qui permet de factoriser un polynôme composé de monômes qui contiennent tous un même facteur commun. Pour factoriser, suivant le cas, on peut utiliser :

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.

$A\cdot B+A\cdot C= A\cdot(B+C)$ $\qquad$ $A\cdot B-A\cdot C= A\cdot(B-C)$

5. DIVISION DE POLYNÔMES

Soient A(x) et B(x) deux polynômes, avec B(x) non nul, il existe
des polynômes Q(x) et R(x) , tels que
$A(x) = B(x)Q(x)+ R(x)$ et $\qquad$ degré de $R(x) <$ degré $B(x)$
Un même algorithme s'applique à la division euclidienne de polynômes.

Exemple : division de $x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6$ par $x^2 + 3x + 1$

Étape 1 : division de $x^4 - x^3 + x^2$ par $x^2 + 3x + 1$ (quotient x^2, reste $- 4x^3$)

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & -x^3 & +x^2 & -4x & +6 & x^2+3x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & -x^2 & & & x^2 \\ \cline{1-3}
 & -4x^3 & & & &
\end{array}
$$

Étape 2 : division de $-4x^3 - x$ par $x^2 + 3x + 1$ (quotient $-4x$, reste $12x^2 + 3x$)

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & -x^3 & +x^2 & -4x & +6 & x^2+3x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & -x^2 & & & x^2-4x \\ \cline{1-3}
 & -4x^3 & & -4x & & \\
 & +4x^3 & +12x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & +12x^2 & & &
\end{array}
$$

Étape 3 : division de $12x^2 - 3x + 8$ par $x^2 + 3x + 1$ (quotient 12, reste $-33x - 4$)

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & -x^3 & +x^2 & -4x & +6 & x^2+3x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & -x^2 & & & x^2-4x+12 \\ \cline{1-3}
 & -4x^3 & & -4x & & \\
 & +4x^3 & +12x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & +12x^2 & & +6 & \\
 & & -12x^2 & -36x & -12 & \\ \cline{3-5}
 & & & -36x & -6 &
\end{array}
$$

Conclusion : $x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 4x + 12) +(- 36x - 6)$

6. FRACTIONS ALGÉBRIQUES

Une fraction algébrique est une expression algébrique de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où P(x) est un polynôme et où Q(x) est un polynôme non nul.

Pour simplifier (où réduire) une fraction rationnelle, on procède comme suit:

- On factorise le numérateur et le dénominateur.
- On divise le numérateur et le dénominateur par le facteur commun.

EXERCICES

Déterminez la forme développée de chacune des expressions suivantes.

Exercice 1 $f(x) = (4x+3)^2$.

Exercice 2 $f(x) = (5x-9)(5x+9)$.

Exercice 3 $f(x) = (9x+6)^2$.

Exercice 4 $f(x) = (x-8)(x+8)$.

Exercice 5 $f(x) = (9x-9)(9x+9)$.

Exercice 6 $f(x) = (4x-7)(4x+7)$.

Exercice 7 $f(x) = (2x-10)^2$.

Exercice 8 $f(x) = (10x+5)^2$.

Exercice 9 $f(x) = (7x+2)^2$.

Exercice 10 $f(x) = (7x-5)(7x+5)$.

Exercice 11 $f(x) = (x+4)^2$.

Exercice 12 $f(x) = (5x-1)^2$.

Exercice 13 $f(x) = (7x-1)^2$.

Exercice 14 $f(x) = (8x-7)^2$.

Exercice 15 $f(x) = (2x+5)^2$.

Déterminez une forme factorisée de chacune des expressions suivantes.

Exercice 1 $f(x) = 16x^2 + 8x + 1$.

Exercice 2 $f(x) = 36x^2 - 96x + 64$.

Exercice 3 $f(x) = 9x^2 - 36$.

Exercice 4 $f(x) = 64x^2 + 144x + 81$.

Exercice 5 $f(x) = 49x^2 - 100$.

Exercice 6 $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Exercice 7 $f(x) = 64x^2 - 9$.

Exercice 8 $f(x) = 49x^2 - 112x + 64$.

Exercice 9 $f(x) = 81x^2 - 25$.

Exercice 10 $f(x) = 9x^2 + 30x + 25$.

Exercice 11 $f(x) = x^2 - 100$.

Exercice 12 $f(x) = 4x^2 - 24x + 36$.

Exercice 13 $f(x) = 16x^2 - 9$.

Exercice 14 $f(x) = 9x^2 - 42x + 49$.

Exercice 15 $f(x) = 4x^2 + 24x + 36$.

Développez et réduisez l'expression suivante (penser à ordonner):
$A = (7x + 9)^2$; A = ________________________________
$B = (3x - 7)^2$; B = ________________________________
$C = (7x + 3)(7x - 3)$; C = ________________________________
$D = (3 + 7x)^2$; D = ________________________________
$E = (5 - 7x)^2$; E = ________________________________
Factorisez l'expression suivante:
$F = 25x^2 + 70x + 49$; F = ________________________________
$G = 81x^2 - 54x + 9$; G = ________________________________
$H = 81x^2 - 9$; H = ________________________________
$I = 9x - 49x^2$; I = ________________________________
$J = (3x + 5)^2 - (2x + 9)^2$; J = ____________________________

EXERCICE 1B.1 - Développer en utilisant l'identité remarquable qui convient :

$A = (x + 4)^2$	$B = (2 - x)^2$	$C = (x + 1)(x - 1)$
$D = (2x + 1)^2$	$E = (3 - 2x)^2$	$F = (7x + 5)^2$
$G = (5x + 6)(5x - 6)$	$H = (4 - 8x)^2$	$I = (3 + 4x)(3 + 4x)$
$J = (3 + x)(x - 3)$	$K = (2 + 9x)^2$	$L = (11x - 12)^2$

EXERCICE 1B.2 - Développer puis réduire :

$\mathbf{Z = (x + 2)^2 + (3 - 2x)(3 + 2x)}$ $\mathbf{Z = x^2 + 4x + 4 + 9 - 4x^2}$ $\mathbf{Z = -3x^2 + 4x + 13}$	$A = (x + 1)^2 + (x - 3)^2$
$B = (3 - x)^2 + (x + 5)^2$	$C = (x - 2)^2 + (x + 4)(x - 4)$
$D = (x + 1)(x - 1) + (x + 4)^2$	$E = (x - 5)^2 + (2x + 7)(2x - 7)$

EXERCICE 1B.3 - Développer puis réduire :

$\mathbf{Z = (x + 2)^2 - (3 - 2x)(3 + 2x)}$ $\mathbf{Z = x^2 + 4x + 4 - (9 - 4x^2)}$ $\mathbf{Z = x^2 + 4x + 4 - 9 + 4x^2}$ $\mathbf{Z = 5x^2 + 4x - 5}$	$A = (2x + 1)^2 - (x + 3)^2$
$B = (2x + 3)^2 - (x - 7)(x + 7)$	$C = (x + 2)(x - 2) - (x - 3)^2$
$D = (x - 5)^2 - (2x - 7)(x - 5)$	$E = (3x + 1)(x - 2) - (2x - 3)^2$

EXERCICE 2B.1

a. Factoriser les expressions suivantes comme dans l'exemple :

$\mathbf{Z = (\underline{x+1})(x-2) + 5(\underline{x+1})}$ $\mathbf{Z = (x+1)[(x-2)+5]}$ $\mathbf{Z = (x+1)(x+3)}$	$A = (x-3)(2x+1) + 7(2x+1)$	$B = (x+1)(x+2) - 5(x+2)$
$C = (3-x)(4x+1) - 8(4x+1)$	$D = 5(1+2x) - (x+1)(1+2x)$	$E = -6(3x-2) - (3x-2)(x-4)$

b. Même consigne que l'exercice précédent :

$\mathbf{Z = (\underline{x+1})(x-2) + (\underline{x+1})(x+7)}$ $\mathbf{Z = (x+1)[(x-2)+(x+7)]}$ $\mathbf{Z = (x+1)(2x+5)}$	$A = (x+1)(3-x) + (x+1)(2+5x)$	$B = (x+2)(x+1) + (x+2)(7x-5)$
$C = (x+3)(3-2x) - (x+3)(5+x)$	$D = (2x+1)(x-5) - (3x+1)(2x+1)$	$E = (x-6)(2-x) - (2-x)(3+4x)$

c. Même consigne que l'exercice précédent :

$\mathbf{Z = (\underline{x+1})^2 + (\underline{x+1})(x+7)}$ $\mathbf{Z = (x+1)[(x+1)+(x+7)]}$ $\mathbf{Z = (x+1)(2x+8)}$	$A = (x+1)^2 + (x+1)(3x+1)$	$B = (2x+1)^2 + (2x+1)(x+3)$
$C = (x-3)^2 - (x-3)(4x+1)$	$D = (x+1)(2x-5) + (2x-5)^2$	$E = (3x-4)(2-x) - (3x-4)^2$

EXERCICE 2B.2

Transformer l'expression soulignée, pour faire apparaître le facteur commun, puis factoriser :

$\mathbf{Z = (x-1)(x-2) + (\underline{2x-2})(x+7)}$ $\mathbf{Z = (\underline{x-1})(x-2) + 2(\underline{x-1})(x+7)}$ $\mathbf{Z = (x+1)[(x-2)+2(x+7)]}$ $\mathbf{Z = (x+1)(x-2+2x+14)}$ $\mathbf{Z = (x+1)(3x+12)}$	$A = (x+1)(x+2) + (\underline{2x+2})(3x-4)$	$B = (x-1)(2x+1) + (\underline{6x+3})(3-x)$
$C = (\underline{10x-5})(x+2) + (1-x)(2x-1)$	$D = (\underline{4x+4})(1-2x) + (x+1)^2$	$G = (2x+1)^2 - (x+3)(\underline{10x+5})$

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 5

1. Décris, à l'aide d'une expression algébrique, les énoncés suivants:
   a) Le prix de la peinture obtenue en mélangeant 5 kg d'une de 3 € / kg avec 7 kg d'une autre de x €/kg.
   b) Ce que nous devons payer pour une glace, une boisson gazeuse et un café, si la glace coûte trois fois plus que le café et la boisson gazeuse la moitié que la glace.
   c) La surface totale et le volume d'un prisme de base carrée de côté x et de 5 cm de hauteur.

2. Effectue et réduit :
   a) $x(3x-2)^2-(x-3)(2x-1)x$
   b) $4\left[(x-2)^2-\frac{3}{4}x^2-4\right]$

3. Multiplie par le PPCM des dénominateurs et simplifie
   $\frac{5(x-1)}{9}+\frac{7x-2}{12}-\frac{x(x-1)}{2}$

4. Factorise le numérateur et le dénominateur et simplifie la fraction suivante :
   $\frac{4x^2-12x+9}{4x^2-9}$

5. Calcule le quotient et le reste en chaque sous partie
   a) $(3x^4-x^3+2x^2+4):(x^2+x)$
   b) $(x^3+3x^2-2x+2):(x+2)$

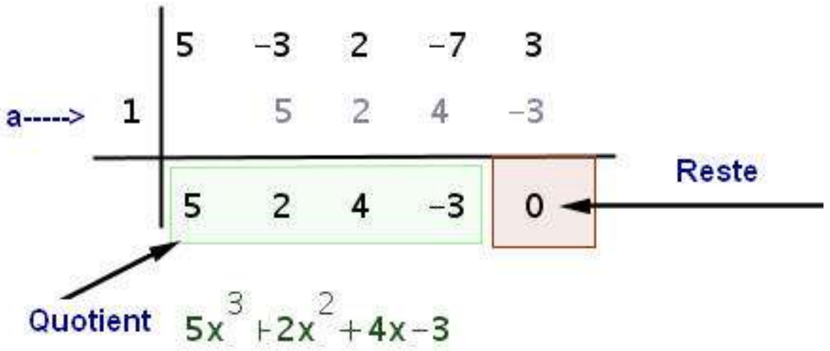
6. Effectue et simplifie s'il est possible :
   a) $\frac{3-x}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{x-5}{2x}$
   b) $\left(\frac{x-2}{x}\cdot\frac{3x}{x+1}\right):(x-2)$

7. Calcule la valeur de m pour que 2 soit une racine du polynôme ***$P=2x^3+mx^2+12$***

8. Vrai ou faux? Justifie et donne des exemples.
   a) L'expression ***$9x^3-15x^2=3x^2(3x-5)$*** est une identité.
   b) Si on multiplie deux binômes de degrés 1 et 2, on obtiendra un polynôme de degré 3.
   c) Si nous ajoutons deux binômes, nous obtenons toujours un binôme.
   d) Les nombres sont des monômes.
   e) Les monômes ***$3a^2b$*** et ***$-3ab^2$*** sont semblables.
   f) En divisant ***$3x^2y^2: 6xy^2$***, on obtient un monôme.

RÉGLE DE RUFFINI

La règle de Ruffini c'est un procédées pour diviser polynômes quand le diviseur est de la façon ***(x-a)***, où ***a*** est un entier relatif.



EXERCICES

1. Quel est le degré des polynômes ?

   a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

   b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

   c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

2. Calcule $P = 5x^3 - 2x + 1$ y $Q = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$

   $P + Q$ y $P - Q$.

3. Effectue et réduit
   Quel est le degré des polynômes ?

   a) $2x(x^2 + 3x - 1)$ b) $2x^2(3x^2 - 4x + 6)$

   c) $-2(-3x^3 - x)$ d) $5(x^2 + x - 1)$

   e) $-7x^5(2x^2 - 3x - 1)$ f) $-7x(2x^3 - 3x^2 + x)$

   g) $4x^2(3 - 5x + x^3)$ h) $8x^2(x^2 + 3)$

   i) $-x^3(-3x + 2x^2)$ j) $-4x[x + (3x)^2 - 2]$

4. Soient $P = 4x^2 + 3,\ Q = 5x^2 - 3x + 7$; $R = 5x - 8,$ Calcule :

   a) $P \cdot Q$ b) $P \cdot R$ c) $Q \cdot R$

5. (1 page 91) Calcule le quotient et le reste en chaque sous partie

   a) $(x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$

   b) $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$

   c) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$ **Ruffini**

6. Factoriser

   a) $P(x) = x^3 - 7x - 6$ b) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4x$

   c) $P(x) = x^3 - 3x + 2$ d) $P(x) = x^4 - x^2$

7. Simplifier

   a) $\dfrac{15x^2}{5x^2(x-3)}$ b) $\dfrac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$ c) $\dfrac{3x^2 - 9x^3}{15x^3 - 3x^4}$

   d) $\dfrac{9(x+1) - 3(x+1)}{2(x+1)}$ e) $\dfrac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$ f) $\dfrac{x(3x^3 - x^2)}{(3x-1)x^3}$

1. ÉQUATIONS: solutions d'une équation

Une Équation c'est une égalité algébrique que n'est pas vrai pour toutes les valeurs des lettres appelées inconnues.
La solution d'une équation c'est la valeur de l'inconnue qui fait vrai l'égalité.

Solution d'une équation. Équations équivalentes
Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui la vérifient.
Les équations avec les mêmes solutions s'appellent **équivalentes**

Types d'équations

- **Équations avec polynômes :** $x^2-4=0$; $x+3=2(x-1)$
- **Avec radicaux** $\sqrt{x+1}=$ x-1
- **Avec l'inconnue au dénominateur** $\frac{1}{x}+\frac{x}{4}=1$
- **Avec l'inconnue comme exposant** $3^x=9$

2. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Ce sont les équations qui, après transformations, se ramènent à la forme **ax =b,** dans laquelle **a** et **b** sont des nombres connus et **x** l'inconnue.
Si **a** est différent de zéro, alors l'équation **ax=b** a pour solution $x = \frac{b}{a}$

Règles de résolution

- Règle 1 : si on ajoute ou si on retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation ayant les mêmes solutions.
- Règle 2 : si on multiplie ou si on divise par un même nombre non nul les deux membres d'une équation, on obtient une équation ayant les mêmes solutions.

Transposer des termes
Pour résoudre une équation, on transforme son écriture en utilisant les règles précédentes.

3. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Ce sont les équations qui, après transformations, se ramènent à la forme
$ax^2+bx+c=0$, dans laquelle **a, b** et **c** sont des nombres connus et **x** l'inconnue. $a\neq 0$

Équations du second degré complètes
La formule pour résoudre une équation du second degré complète, c'est :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nombre de solutions d'une équation du second degré
Les solutions de l'équation du second degré dépendent du signe de

$\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant).

- Si $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions
- Si $\Delta = 0$, cette équation a une solution.

- Si $\Delta < 0$, cette équation n'a pas de solution

Équations du second degré incomplètes.

- Si **b**=0 . Équations du type ***ax²+c=0***. Les solutions sont

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Si **c=0**. Équations du type ***ax²+bx=0.*** Les solutions sont ***x=0*** et $x = -\frac{b}{a}$

- Si **b=0** et **c=0** . Équations du type ***ax²=0***. La solution est ***x=0***

4. RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

On doit traduire un texte en langage mathématique. Il faut suivre les points suivants :

- Il est important de lire et de comprendre l'énoncé et de choisir l'inconnue
- Formuler l'équation
- Résoudre l'équation
- Conclure en interprétant le résultat et en s'interrogeant sur sa vraisemblance.

5. ÉQUATIONS D'UN AUTRE TYPE

Équations du type (ax+b)·(cx+d) ·…=0

Appliquer : le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

(ax+b)·(cx+d) =0 → ax+b=0 ou cx+d=0

Exercices live ANAYA

1. (4 page 115) Résoudre :

a) $3x - 2(x+3) = x - 3(x+1)$

b) $4 + x - 4(1-x) + 5(2+x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x-1) = 3(x+3)$

d) $4(2x-7) - 3(3x+1) = 2 - (7-x)$

2. (8 page 115) Résoudre :

a) $4(2x+1) - 3(x+3) = 5(x-2)$

b) $2(x-3) + 1 = 3(x-1) - (2+x)$

c) $\frac{3x+1}{2} = 2x - \frac{1-x}{2}$

d) $x + \frac{2x-7}{4} = 2x + \frac{x-1}{2}$

EXERCICE 3D.1 - BORDEAUX 2000.

1. On considère l'expression :

$$E = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2)$$

a. Développer et réduire E.

b. Comment peut-on en déduire, sans calculatrice, le résultat de :

$$99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998 \;?$$

2. **a.** Factoriser l'expression :

$$F = (4x + 1)^2 - (4x + 1)(7x - 6)$$

b. Résoudre l'équation : $(4x + 1)(7 - 3x) = 0$

EXERCICE 3D.2 - CLERMONT-FERRAND 2000.

On donne l'expression algébrique :

$$D = (3x + 1)(6x - 9) - (2x - 3)^2$$

1. Montrer que D peut s'écrire sous la forme développée et réduite :

$$D = 14x^2 - 9x - 18$$

2. Calculer les valeurs de D pour $x = \frac{3}{2}$ puis pour $x = \sqrt{2}$. Écrire le second résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers.

3. Factoriser $6x - 9$, puis factoriser D.

4. En déduire les solutions de l'équation $D = 0$.

EXERCICE 3D.3 - LIMOGES 2000.

1. Soit $D = 9x^2 - 1$.

a. Quelle identité remarquable permet de factoriser D ?

b. Factoriser D.

2. Soit $E = (3x + 1)^2 + 9x^2 - 1$.

a. Développer E.

b. Factoriser E.

c. Déterminer les solutions de l'équation :

$$6x(3x + 1) = 0.$$

EXERCICE 3D.3 - LYON 2000.

On considère l'expression algébrique E suivante :

$$E = (2x + 3)^2 + (x - 7)(2x + 3)$$

1. Développer et réduire E.

2. Factoriser E.

3. Résoudre l'équation : $(2x + 3)(3x - 4) = 0$.

4. Calculer la valeur de E pour $x = \sqrt{2}$.

EXERCICE 3D.4 - NANTES 2000.

On considère l'expression :

$$E = (3x + 5)(2x - 1) + 9x^2 - 25$$

1. Développer et réduire E.

2. Factoriser $9x^2 - 25$, puis l'expression E.

3. Résoudre l'équation : $(3x + 5)(5x - 6) = 0$.

EXERCICE 3D.5 - ORLEANS - TOURS 2000.

On donne l'expression suivante :

$$K(x) = (5x - 3)^2 + 6(5x - 3)$$

1. Développer et réduire l'expression K(x).

2. Calculer $K(\sqrt{2})$.

EXERCICE 3D.6 - MARSEILLE 2002

Soit $C = (x - 1)(2x + 3) + (x - 1)^2$

1. Développer l'expression C et montrer qu'elle est égale à : $3x^2 - x - 2$

2. Calculer la valeur de C pour $x = \sqrt{2}$ et la mettre sous la forme $a - \sqrt{2}$, où a est un nombre entier.

3. Factoriser l'expression C.

4. Résoudre l'équation : $(x - 1)(3x + 2) = 0$

EXERCICE 3D.7 - PARIS 2002

On considère l'expression :

$$C = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x + 3)$$

1. Développer puis réduire C.

2. Factoriser C.

3. Résoudre l'équation : $(3x - 1)(x - 4) = 0$

4. Calculer C pour $x = \sqrt{2}$.

EXERCICE 3D.8 - POLYNESIE 2002

On considère l'expression :

$$D = (3x - 2)^2 - 25$$

1. Développer puis réduire D.

2. Factoriser D.

3. Calculer D pour $x = \sqrt{3}$.

4. Résoudre l'équation : $(4x - 1)(5x + 2) = 0$

EXERCICE 3D.9 - ANTILLES 2001

$$C = (3x - 1)^2 - 4x(3x - 1)$$

1. Développer puis réduire C.

2. Calculer C pour $x = 0$; pour $x = \sqrt{2}$.

3. Factoriser C.

4. Résoudre l'équation : $(3x - 1)(x + 1) = 0$

EXERCICE 3D.10 - ASIE DU SUD-EST 2001

On considère l'expression T suivante :

$$T = (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x + 5)$$

1. En développant et en réduisant, prouver que l'expression T peut s'écrire :

$$T = 2x^2 - 13x + 6$$

2. En utilisant l'expression obtenue à la question **1.**, calculer T pour $x = \frac{1}{3}$ et pour $x = \sqrt{2} + 1$.

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

3. Factoriser l'expression T, puis déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression T est égale à 0.

EXERCICES DU LIVRE ANAYA

3. (1 page 107) Résoudre :

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

e) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

f) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

g) $\frac{x}{2} - \frac{2(x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$

4. (1 page 108) Résoudre :

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

g) $x^2 - 3x + 15 = 0$

h) $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

5. (2 page 108) Résoudre les équations :

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $7x^2 + 28 = 0$

c) $4x^2 - 9 = 0$

d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$

f) $11x^2 - 37x = 0$

g) $2(x+5)^2 + (x-3)^2 = 14(x+4)$

h) $7x^2 + 5 = 68$

6. (11 page 116) Résoudre sans la formule:

a) $3x^2 - 12x = 0$

b) $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$

d) $2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^2 - 25 = 0$

f) $4x^2 + 100 = 0$

g) $16x^2 = 100$

h) $3x^2 - 6 = 0$

7. (12 page 116) Résoudre :

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d) $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$

f) $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 6

1. Résoudre mentalement les équations suivantes et exprimer le processus suivi

a) $(x+13)^2 = 25$ b) $\sqrt{x^2+15} = 8$

2. NON
3. Résoudre

a) $\frac{3x-2}{5} - \frac{3(x+1)}{10} = \frac{3-x}{4} - \frac{9}{10}$ b) $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$

c) $x - 1 + \frac{3-x}{2} = \frac{2}{3}x$

4. Résoudre les équations suivantes

a) $\frac{5}{2}x^2 - 2x = 0$ b) $4x^2 + 25 = 0$

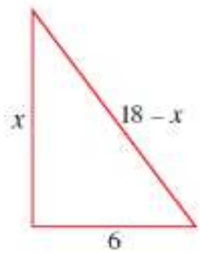
c) $(x+3)(x-3) - 25x = 9x - 298$ d) $\frac{(x-2)(x-3)}{6} - \frac{(x-1)^2}{4} = 2 - x$

5. Combien de kg de farine de 0,70 € / kg on doit-on mélanger avec 6 kg d'une autre farine de 1,30 € / kg pour avoir un prix du mélange à 1,10 € / kg?

6. Un train part de A à B à 135 km / h. Une heure plus tard, un autre train part de B à A à 115 km / h. Si la distance entre A et B est de 485 km, combien de temps faudra-t-il pour que les deux trains coïncident?

7. Trois amis facturent 540 € pour un travail. Le premier a travaillé 12 heures et le second, qui a travaillé 2 heures de plus que le troisième, a reçu 180 €. Combien d'heures et combien d'argent correspond à chacun?

8. Avec une corde de 24 m de long, on forme un triangle rectangle dans lequel un des côtés mesure 6 m. Combien doivent mesurer l'autre côté et l'hypoténuse?



9. Pour paver le sol d'une salle de 48 m^2 d'aire, des tuiles rectangulaires sont utilisées, dans laquelle un côté mesure 8 cm de moins que l'autre. Quelle taille aura chaque côté des tuiles?

1. ÉQUATIONS LINÉAIRES

Une équation linéaire à deux inconnues est l'ensemble des points (x,y) du plan vérifiant ax+by=c.

a,b,c sont des réels

x, y sont deux inconnues

Une **solution** de l'équation linéaire à deux inconnues est une paire de valeurs (une pour chaque inconnue) qui rendent vraie l'égalité.

Une équation linéaire à deux inconnues a une infinité de solutions.

- **Représentation graphique**

L'équation linéaire à deux inconnues ax+by=c c'est une droite. L'expression ax+by=c est l'équation d'une droite. Les points (m,n) sont des solutions de l'équation ; c'est-à-dire x= m, y=n .

2. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est un ensemble d'équations

ax + by =c

a'x+b'y=c'

Résoudre ce système c'est trouver tous les couples de valeurs (x,y) pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément. C'est donc trouver toutes les solutions communes aux équations.

3. SYSTÈMES ÉQUIVALENTES

Deux systèmes d'équations sont équivalentes s'ils ont la même solution.

4. NOMBRE DE SOLUTIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Classifier les systèmes

Selon le nombre de solutions d'un système d'équations linéaires on peut dire :

- **Le système n'a pas de solution.**
  Dans le cas où a/ a' = b / b'≠c/c', les droites sont strictement parallèles.
- **Le système a une infinité de solutions**.
  Dans le cas où a/ a'= b /b'=c/c', tous les couples de coordonnées des points de ax+by=c sont des solutions.
- **Le système a une solution unique**.
  Dans le cas où a/ a'≠ b /b', les droites sont sécantes en un point (x_0, y_0)

5. MÉTHODES POUR LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES

- **Résolution par la méthode de substitution**.

On calcule, dans l'une des équations, une des inconnues en fonction de l'autre, et on porte la valeur trouvée dans l'autre équation.

- **Résolution par la méthode de comparaison**

  Exprimer y en fonction de x ou x en fonction de y dans la première et la deuxième équation. Comme les deux expressions sont égales et on se ramène à une équation avec une inconnue, on résout. On peut calculer l'autre inconnue avec l'une des deux expressions.

- **Résolution par la méthode de combinaisons**

  On multiplie les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de sorte qu'en additionnant membre à membre les équations obtenues, l'une des inconnues disparaisse. Une telle méthode est aussi appelée méthode d'addition.

- **Interprétation graphique**

  On calcule y en fonction de x dans chacune des équations ; on obtient deux fonctions affines ; dans un repère orthogonal, on construit les droites représentatives de ces fonctions. Le couple de coordonnées du point d'intersection est la solution graphique du système.

6. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINEAIRES

Ces sont des systèmes où il y a une ou plusieurs équations non linéaires (du degré plus grand que 1, avec des fractions algébriques, avec des radicaux.)

7. RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AVEC SYSTÈMES

Pour résoudre un problème avec un système d'équations, il faut traduire un texte en langage algébrique (un système d'équations du premier degré à deux inconnues …), et après on doit trouver la solution.

Exercices du live ANAYA

1. (7 page 136) Classifier les systèmes suivants selon le nombre de solutions

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases}$

2. (8 page 136) Résoudre les systèmes d'équations suivants

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(3x - 2) = y - 1 \\ 3(x + y) + 2(x - y) = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + \dfrac{y-2}{4} = 1 \\ x - \dfrac{3}{2}y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3} + \dfrac{3+y}{6} = 2 \\ \dfrac{8-3x}{6} - \dfrac{2+y}{9} = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+1}{4} = 1 \\ \dfrac{2x-1}{2} - \dfrac{2y+1}{6} = 1 \end{cases}$

EXERCICE 4A.1 - MARSEILLE 2000.

Une salle de spectacles propose des spectacles pour un tarif A et des spectacles pour un tarif B.

Laura réserve 1 spectacle au tarif A et 3 spectacles au tarif B. Elle paie 480 F.

Michel réserve 2 spectacles au tarif A et 1 spectacle au tarif B. Il paie 410 F.

On cherche à calculer le prix d'un spectacle au tarif A et d'un spectacle au tarif B.

Pour faire ces calculs, ton professeur te propose de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 480 \\ 2x + y = 410 \end{cases}$$

1. Que représentent dans le système les lettres x et y ?

2. Quelle information donnée dans l'énoncé est traduite par l'équation « $x + 3y = 480$ » ?

3. Quelle information donnée dans l'énoncé est traduite par l'équation « $2x + y = 410$ » ?

4. Résoudre le système.

EXERCICE 4A.2 - AMIENS 1998.

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 42x + 80y = 1\,514 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

2. Pour un concert de jazz, les places valent 42 F ou 80 F. Une association a acheté 27 places pour un montant de 1 514 F.
Combien de places de chaque sorte l'association a-t-elle achetées ?

EXERCICE 4A.3 - NANTES 2000.

Un club de kayak doit renouveler son matériel pour la nouvelle saison. Lors d'une première commande, trois kayaks et cinq pagaies sont achetés pour la somme de 8 500 F. On décide de compléter l'équipement du club par une nouvelle commande ; le club achète deux autres kayaks et trois autres pagaies pour la somme de 5 600 F.
Calculer le prix d'un kayak et le prix d'une pagaie.

EXERCICE 4A.4 - ASIE 2000.

Chez le pépiniériste Beauplant, une promotion est réalisée sur un lot d'arbres fruitiers.
Mme Fleur achète 4 poiriers et 6 noisetiers pour 670 F.
Mr Dujardin achète 6 poiriers et 10 noisetiers pour 1 060 F.
On cherche le prix d'un poirier et le prix d'un noisetier.

1. Écrire un système d'équations traduisant les données du problème.

2. Résoudre ce système pour trouver le prix d'un poirier et le prix d'un noisetier.

EXERCICE 4A.5 - MARSEILLE 1999.

1. Résoudre par la méthode de votre choix le système :

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 7x + 5y = 104 \end{cases}$$

2. Une rose coûte 8 F de plus qu'une marguerite. Un bouquet de 7 roses et 5 marguerites coûte 104 F.

Quel est le prix d'une rose ?

Quel est le prix d'une marguerite ?

EXERCICE 4A.6 - PARIS 1999.

Pour équiper une salle de réunion, Mr Dupont achète des chaises et des tabourets.

- Chaque chaise coûte 200 F et chaque tabouret 80 F. Il paie au total 6 600 F.
- Il a acheté 5 chaises de plus que de tabourets.

Quel est le nombre de chaises et tabourets ?hetés par Mr Dupont ?

EXERCICE 4A.7 - CAEN 2000.

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14\,220 \end{cases}$$

2. Dans un parc zoologique, la visite coûte 30 F pour les adultes et 18 F pour les enfants. A la fin de la journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 14 220 F.

Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour là, quel est le nombre d'enfant ? Quel est le nombre d'adultes ?

EXERCICE 4A.8 - CLERMONT-FERRAND 1998

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ 2x + 3y = 25{,}5 \end{cases}$$

2. Pierre vient de commander 3 pains au chocolat et 2 croissants à la boulangerie. Pour cet achat, il a payé 27 francs. Soudain il se ravise et dit au boulanger :

- Excusez-moi, je me suis trompé, c'est le contraire. Pouvez-vous me donner un pain au chocolat de moins et un croissant de plus ?
- Bien sûr, répond le boulanger.

Il fait l'échange et rend 1,50 franc à Pierre.
Trouver, en justifiant la réponse, le prix d'un pain au chocolat et celui d'un croissant.

EXERCICE 4A.9 - LYON 2000.

Trois cahiers et un stylo coûtent 57 F.Cinq cahiers et trois stylos coûtent 107 F. Calculer le prix d'un cahier et le prix d'un stylo.

EXERCICE 4B.1 - MARSEILLE 2002

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

2. Le CDI d'un collège a acheté deux exemplaires d'une même bande dessinée et trois exemplaires du même livre de poche pour la somme de 30 euros.

Une bande dessinée coûte 5 euros de plus qu'un livre de poche.

Quel est le prix en euros d'une bande dessinée ?

Quel est le prix en euros d'un livre de poche ?

EXERCICE 4B.2 - AMERIQUE DU NORD 2002

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y = 24 \\ x - 3y = 16 \end{cases}$$

2. La différence de deux nombres est 24. Quels sont ces deux nombres sachant que si on les augmente l'un et l'autre de 8 on obtient deux nouveaux nombres dont le plus grand est le triple du plus petit ?

EXERCICE 4B.3 - MARSEILLE 2001

1. Résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$$

2. Pour financer une partie de leur voyage de fin d'année, des élèves de troisième vendent des gâteaux qu'ils ont confectionnés eux-mêmes. Un même jour, ils ont vendu 15 tartes, les unes aux myrtilles et les autres aux pommes.

Une tarte aux myrtilles est vendue 4 euros et une tarte aux pommes 2 euros.

La somme encaissée ce jour-là est 42 euros.

Après avoir mis le problème en équation, déterminer combien ils ont vendu de tartes de chaque sorte.

EXERCICE 4B.4 - POLYNESIE 2002

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 800x + 500y = 124\,000 \end{cases}$$

2. Une salle de cinéma propose deux tarifs :
- un tarif adulte à 800 F par personne ;
- un tarif enfant à 500 F par personne.

Dans cette salle, 200 personnes ont assisté à une représentation et la recette totale s'est élevée à 124 000 F. Calculer les nombres d'adultes et le nombre d'étudiants qui ont assisté à cette séance.

(Malgré le passage à l'Euro, la Polynésie continue à utiliser le franc pacifique qui vaut environ 0,0055 F métropolitain).

EXERCICE 4B.5 - AFRIQUE DE L'OUEST 2002

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

2. Un classeur coûte 1 € de plus qu'un cahier. Le prix de deux classeurs et de trois cahiers est 17 €. Quel est le prix d'un classeur et celui d'un cahier ?

EXERCICE 4B.6 - ASIE DU SUD-EST 2001

1. Résoudre le système d'inconnues (x ; y) suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 432 \\ 2x + 3y = 398 \end{cases}$$

2. Un torréfacteur met en vente deux sortes de mélanges de café. Le mélange A est composé de 60% d'Arabica et de 40% de Robusta et coûte 86,40 F le kg. Le mélange B est composé de 40% d'Arabica et de 60% de Robusta et coûte 79,60 F le kg. On appellera x le prix du kg d'Arabica, y le prix du kg de Robusta. Quel est le prix du kg d'Arabica et du kg de Robusta ?

EXERCICE 4B.7 - PARIS 2002

Une fermière vend 3 canards et 4 poulets pour 70,30 €.

Un canard et un poulet valent ensemble 20,70 €.

Déterminer le prix d'un poulet et celui d'un canard.

EXERCICE 4B.8 - PONDICHERY 2002

Une personne dispose de 6 euros ; elle peut dépenser cette somme soit en achetant 10 croissants et un cake, soit en achetant 4 croissants et 2 cakes.

Calculer le prix d'un croissant et celui d'un cake.

EXERCICE 4B.10 - PARIS 2001

Un premier bouquet de fleurs est composé de 3 iris et 4 roses jaunes, il coûte 48 F.

Un second bouquet est composé de 5 iris et 6 roses jaunes, il coûte 75 F. On appelle x le prix en francs d'un iris et y le prix en francs d'une rose jaune.

Ecrire un système d'équations traduisant les données de ce problème, et calculer le prix d'un iris et celui d'une rose jaune.

1. (10 page 137) Résoudre les systèmes d'équations suivants

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ (x-3)^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

2. (11 page 137) Résoudre les systèmes d'équations suivants

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy + x^2 = 24 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ xy = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2xy = 24 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ xy = 24 \end{cases}$

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 7

1. Classifier les systèmes suivants selon le nombre de solutions

a) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$

2. Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1{,}5x + 0{,}25y = -2 \\ 2x - 0{,}5y = -6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

3. Résoudre en appliquant la méthode de combinaisons :

$$\begin{cases} 7x + 2y = 12 \\ 11x - 3y = -61 \end{cases}$$

4. La différence entre les longueurs de base d'un trapèze isocèle est de 4 cm; sa hauteur est de 9 cm et l'aire est de 72 cm^2. Calcule la mesure des bases.

5. Un agriculteur vérifie que dans le second de ses deux réservoirs d'eau pour l'irrigation, il y a 10 litres de plus que dans le premier. Il transfère 18 litres du second au premier et donc celui-ci reste au double que le second. Calcule la quantité d'eau contenue dans chaque dépôt.

6. Ana se promène à 4 km / h. Un quart d'heure plus tard, son fils part courir par le même chemin et le fait à 7 km / h. Combien de temps faudra-t-il pour l'atteindre?

7. J'ai payé 83 € pour un coupe-vent et une paire de chaussures de sport. Le coupe-vent avait une réduction du 20% et les chaussures un 10%, et j'ai donc économisé 17 €. Quels étaient les prix sans réduction?

1. FONCTION

Une **fonction** est une relation entre deux ensembles, établie de telle manière qu'à chaque élément (x) de l'ensemble de départ est associé, au plus, un élément (y) de l'ensemble d'arrivée.

La variable x est appelée **variable indépendante**, et la variable y, **variable dépendante.**

ENSEMBLE DE DÉFINITION ET IMAGE D'UNE FONCTION

- ***L'ensemble de définition*** *de* f est l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe. On le lit en faisant attention aux conventions graphiques : courbe illimitée, extrémité exclue ou non.
  D s'appelle *l'ensemble de définition de f*
- f(x) s'appelle ***l'image de x par f***

  Si k est donné, les solutions dans D de l'équation f(x)=k s'appellent *les antécédents de k par f.*

  DIFFÉRENTES FAÇONS POUR EXPRIMER UNE FONCTION

Énoncé

Le rapport entre les variables d'une fonction peut être exprimé d'une façon verbale.
Ex : « à chaque nombre on associe son carré »

Équation ou expression algébrique

On note par y=f(x) et elle est appelée équation de la fonction.

- l'élément ***y*** est appelé **l'image** de *x*
- l'élément ***x*** est appelé un **antécédent** de *y*

Ex : « $y = x^2$ ou $f(x)= x^2$ »

Tableau de valeurs

Une fonction peut être définie aussi par un tableau de valeurs.

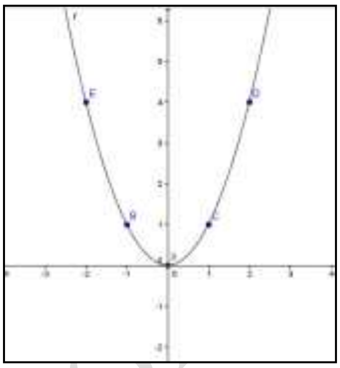
Ex :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=x^2$	4	1	0	1	4

Graphique

Les couples de valeurs se rapportant à une fonction (x,y) sont des données d'un point du plan. La représentation graphique d'une fonction, c'est l'ensemble des points (x, y).
On représente la variable indépendante, x, en abscisses et la variable dépendante, y, en ordonnées.

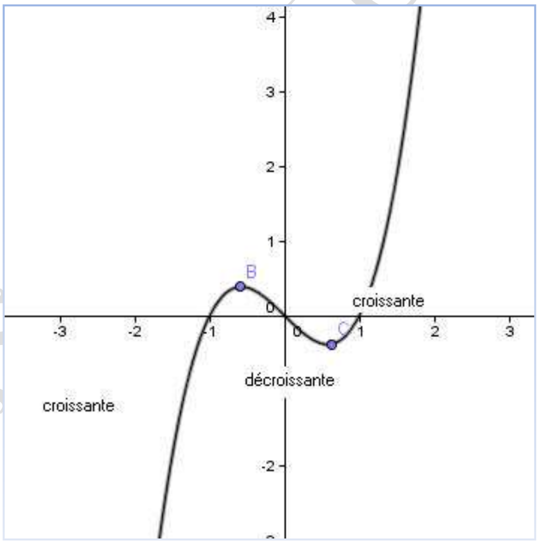
Ex : La graphique de la fonction $y = x^2$



2. CARACTÉRISTIQUES D'UNE FONCTION

SENS DE VARIATION

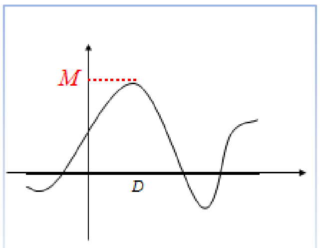
Soit f une fonction définie sur un intervalle I=(a,b)
f est **croissante** sur I lorsque :
Quels que soient a et b dans I, si a<b, alors f(a)<f(b)
f est **décroissante** sur I lorsque :
Quels que soient a et b dans I, si a<b, alors f(a)>f(b)
f est **constante** sur I lorsque :
Quels que soient a et b dans I, si a<b, alors f(a)=f(b)



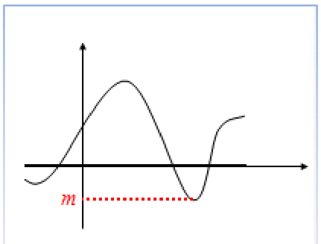
EXTREMUMS D'UNE FOCTION

Soit a appartenant à D

- (a, f(a)) est le **maximum.** Le maximum c'est tout simplement la plus grande valeur atteinte par la fonction.

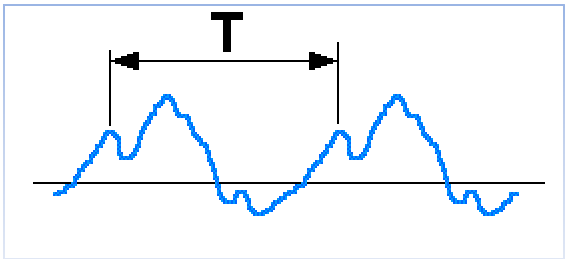


- (a, f(a)) est le **minimum**. Le minimum c'est tout simplement la plus petite valeur atteinte par la fonction.



3. FONCTION PÉRIODIQUE de période T

On dit des fonctions tels que f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=..., pour tous les valeurs de l'ensemble de définition.

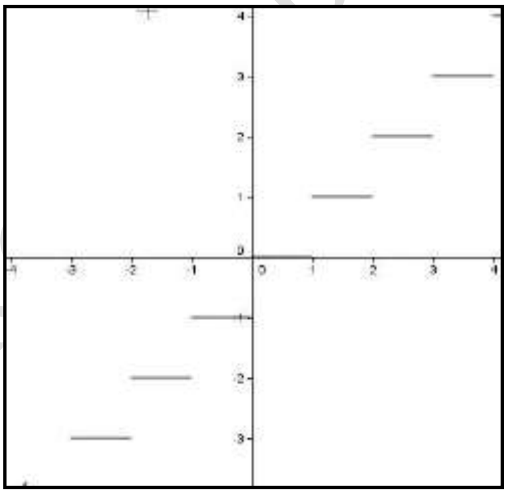


4. CONTINUITÉ- discontinuité

Continue-discontinue

Pour étudier la continuité d'une fonction il suffit de regarder si sa courbe peut se tracer d'un trait continu, « sans lever le crayon ».

Ex : la fonction y = floor(x) est discontinue. Regardez le graphique



5. ÉQUATION OU EXPRESSION ALGÉBRIQUE

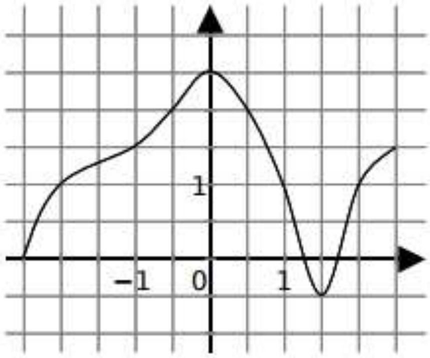
On note par y=f(x) et elle est appelée équation de la fonction.

L'élément ***y*** est appelé **l'image** de *x*

L'élément ***x*** est appelé un **antécédent** de *y*

EXERCICE 1 : **/3,5 points**

Le graphique ci-contre représente une fonction h. Pour chaque question, tu donneras toutes les réponses possibles. S'il n'y a pas de réponse, tu indiqueras : « Impossible ».



a. Image de 1 par h ?

b. Antécédent(s) de 1 par h ?

c. Nombre(s) x tel que $h(x) = -0,5$?

d. Antécédent(s) de 3 par h ?

e. Nombre(s) y tel que $h(-1) = y$?

EXERCICE 2 : **/6,5 points** (0,5 + 1 + 3 + 1 + 1)

a. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{x}$. Donne l'image de 0,5 par f.

b. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x - 6$. Donne l'antécédent de 0 par g.

c. Soit $h : x \longmapsto -3x^2 + 1$. Parmi les affirmations suivantes, indique celles qui sont vraies et corrige celles qui sont fausses :

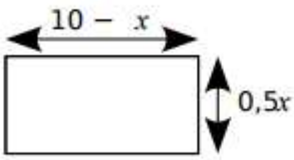
$h(1) = 0$	$h(0) = 1$	$h(-3x^2 + 1) = x$
L'antécédent de (-11) par h est 2	$h(-1)=h(1)$	L'image de (-5) par h est 76

d. Soit $i : x \longmapsto \frac{1}{x-5}$. Cite un nombre qui n'a pas d'image par la fonction i.

e. Soit j une fonction telle que $j(x) = 4x^2$. Cite un nombre qui n'a pas d'antécédent par j.

EXERCICE 3 : **/10 points** (1 + 1 + 3 + 1,5 + 2 + 1,5)

Une pièce rectangulaire a pour dimensions $0,5x$ et $10 - x$, ces dimensions étant exprimées en mètres.



a. Quelle est la valeur maximale de x ? Sa valeur minimale ? Justifie.

b. Prouve que l'aire $A(x)$ de cette pièce vaut $A(x) = -0,5x^2 + 5x$ m².

c. Reproduis et complète le tableau suivant :

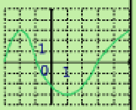
x (m)	0	2	4	6	8	10
Aire $A(x)$ de la pièce (m²)						

d. D'après ce tableau, quelle est l'image de 6 par la fonction A ? Quels sont les antécédents de 8 ?

e. Sur ta copie, représente les valeurs de ce tableau dans un repère, en prenant pour unités : 1 cm pour 1 m sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 1 m² sur l'axe des ordonnées.

f. D'après le graphique, pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ de la pièce est-elle maximale ? Détermine par le calcul l'aire maximale de cette pièce.

Coche les bonnes réponses :

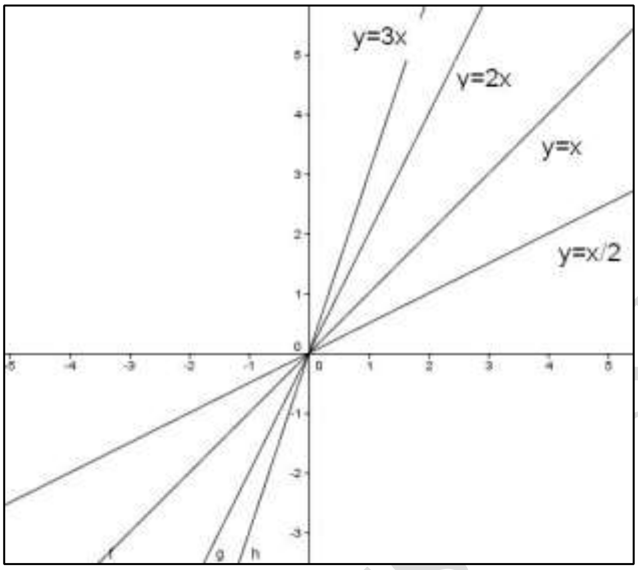
		R1	R2	R3	R4
1	Ce graphique représente une fonction f 	l'image de -2 est 0	3 est l'image de -2	$f(-2) = 3$	$f(3) = -2$
2	Pour la fonction f représentée ci-dessus, un antécédent de -3 est...	0	1	3	-3
3	x : -1, 0, 1, 2, 3 $g(x)$: 2, 1, 6, 5, 2	l'image de 2 par g est -1	$g(2) = 3$	2 a pour image 5 par g	2 est l'image de 5 par la fonction g
4	Par la fonction g ci-dessus, le (les) antécédent(s) de 2 est (sont)...	-1	5	-1 et 5	3
5	$h(x) = 2x^2 - 4$. L'image de 0 par h est...	-4	0	-2	0 n'a pas d'image
6	$m(2) = 4$ donne l'image de 2 par la fonction m telle que...	$m(x) = x - 2$	$m(x) = 3x - 2$	$m(x) = x^2$	$m(x) = \sqrt{x}$
7	$p(x) = \dfrac{x+5}{x^2-4}$ donc...	l'image de -5 par p est 0	0 est l'image de 5 par p	tout nombre a une image par p	2 n'a pas d'image par p
8	Par une fonction...	un nombre peut avoir deux images	tous les nombres ont une image	un nombre peut avoir plusieurs antécédents	tout nombre a au plus une image

1. FONCTION DE PROPORTIONNALITÉ y=mx

Une **fonction de proportionnalité** directe (ou **fonction linéaire**) est définie de la manière suivante $y = mx$, où **m** est un nombre réel quelconque.

- Les fonctions linéaires se représentent dans le plan par une **droite**. Cette droite passe par **l'origine du repère** (0, 0).
- Le nombre **m** s'appelle coefficient directeur ou **pente** de la droite.
- Si m>0, la fonction est **croissante**, et si m<0 la fonction est **décroissante**.

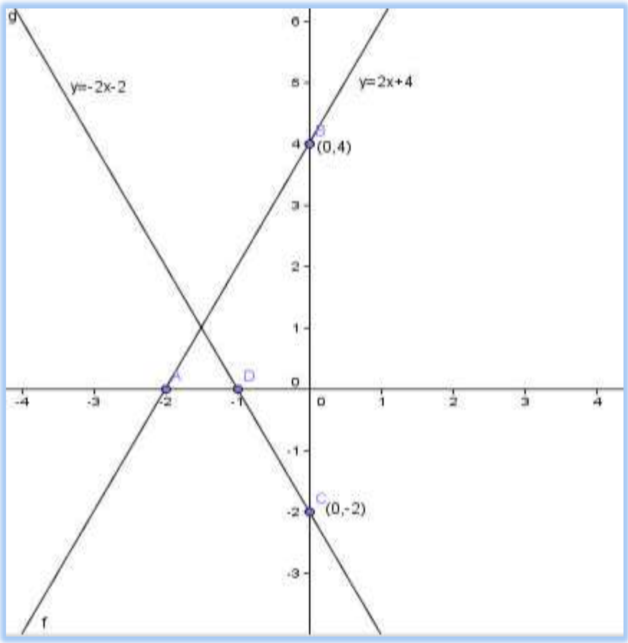
Ex :



2. FONCTION AFFINE y=mx+n

Une **fonction affine** est définie de la manière suivante $y = mx + n$, où m et n sont des nombres réels quelconques.

- Les fonctions affines se représentent dans le plan par une **droite**
- Le nombre m s'appelle coefficient directeur ou **pente** de la droite.
- Le nombre **n est l'ordonnée à l'origine**. La droite coupe l'axe Y dans le point (0, n).



COMMENT TRACER LA COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION LINÉAIRE OU AFFINE.

La courbe d'une fonction affine est une droite : deux points suffisent donc à la tracer. Pour cela on choisit deux valeurs de x au hasard, puis on calcule leurs images. Une fois les deux points obtenus, on les relie (par une droite).

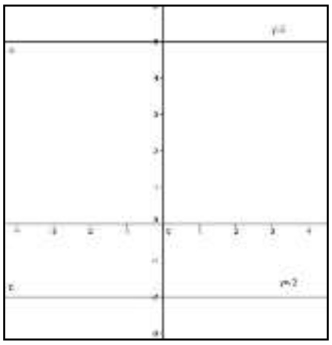
COMMENT OBTENIR UNE ÉQUATION À PARTIR D'UNE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Quand la représentation graphique d'une fonction est une droite :

- Si la droite passe par l'origine du repère (0, 0) est une fonction linéaire, $y = mx$, et sa pente, m, est l'ordonnée de x=1.
- Si la droite ne passe pas par l'origine du repère est une fonction affine, $y = mx + n$, où n est l'ordonnée de x=0 et m est l'ordonnée de x=1 moins n.

DROITES PARALLÈLES À L'AXE DES ABSCISSES

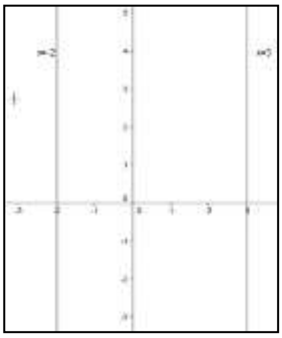
Une droite ***parallèle à l'axe des abscisses*** possède une équation de la forme y=n où n est un nombre qui mesure la hauteur algébrique (positive ou négative) de la droite par rapport à l'axe des abscisses. On dit parfois qu'une telle droite est *horizontale*.
Tous les points d'une telle droite ont la *même ordonnée* : c'est n.



Sur le dessin, les droites ont pour équations respectives y = 5 et y = -2.

DROITES PARALLÈLES À L'AXE DES ORDONNÉES

Une droite ***parallèle à l'axe des ordonnées*** possède une équation de la forme x = k où k est un nombre qui mesure l'écart algébrique de la droite par rapport à l'axe des ordonnées. On dit parfois qu'une telle droite est *verticale*. **Ces droites ne sont pas des fonctions**.
Tous les points d'une telle droite ont la *même abscisse* : c'est k.



DROITES SÉCANTES EST PARALLÈLES

Droites sécantes

- Deux droites sont sécantes si elles se coupent en un point.
- Leurs pentes sont différentes.

Droites parallèles

- Deux droites sont dites **parallèles** si elles ne se coupent pas.
- Leurs pentes sont égales et leurs ordonnées à l'origine sont différentes

3. DROITE OÙ ON CONNAIT UN POINT ET LA PENTE

L'équation d'une droite qui passe par le point (x_0,y_0) et avec pente m est :

$y = y_0 + m\,(x-x_0)$ équation point-pente

4. ÉQUATION D'UNE DROITE QUI PASSE PAR DEUX POINTS

Pour déterminer l'équation d'une droite $y = mx + n$ qui passe par $M(x_1,y_1)$ et $N(x_2,y_2)$:

- On calcule la valeur de la pente :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\textit{différence des ordonnées}}{\textit{différence des abscises}}$$

La pente d'une droite apparaît donc comme le taux d'accroissement des ordonnées par unité d'abscisse

- On calcule la valeur de l'ordonnée à l'origine :

$$n = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2$$

5. APPLICATIONS

Il y a beaucoup de situations réelles où on peut trouver des magnitudes reliées par des fonctions affines ou linéaires.

***Exemple** :*
Le prix de location d'une voiture est de 15 euros, puis de 0,10 euro au kilométrage effectué.

On peut alors compléter le tableau suivant :

Nombre de kilomètres parcourus	*100*	*150*	*200*	*250*
Prix payé €	*25*	*30*	*35*	*40*

Lorsque l'on parcourt x kilomètres, le prix y vaut : y = 0,10 x + 15 (fonction affine)

Exemple :

Un article subit une augmentation de 10%. Sachant que son prix initial était de 65 euros, son prix après augmentation est de :
65 + (10/100) ×65= 65 + 0,1 × 65 = 65 + 6,5 = 71,5
Après augmentation, l'article coûte 71,5 euros.

Généralisation :

Un article subit une augmentation de 10%. Sachant que son prix initial était de x euros, son prix après augmentation est de :

x + (10/100) x = x + 0,1x = 1,1 x

Prix avant augmentation de 10% : x

Prix après augmentation : y = 1,1 x

D'où la fonction linéaire associée : x ⟼ 1,1 x

6. **ÉTUDE CONJOINTE DE DEUX OU PLUS FONCTIONS LINÉAIRES OU AFFINES**.

Il y a des fois où l'on a besoin d'une étude conjointe de deux ou plus fonctions linéaires ou affines.

Exemple :

Pour faire un voyage nous voulons louer une voiture. On demande le prix dans deux entreprises :

- *Le prix de location d'une voiture est de 15 euros, puis de 0,10 euro au kilométrage effectué dans une entreprise de location A.*
- *Le prix de location d'une voiture est de 25 euros, puis de 0,05 euro au kilométrage effectué dans une entreprise de location B.*

Quelle est la meilleure offre?

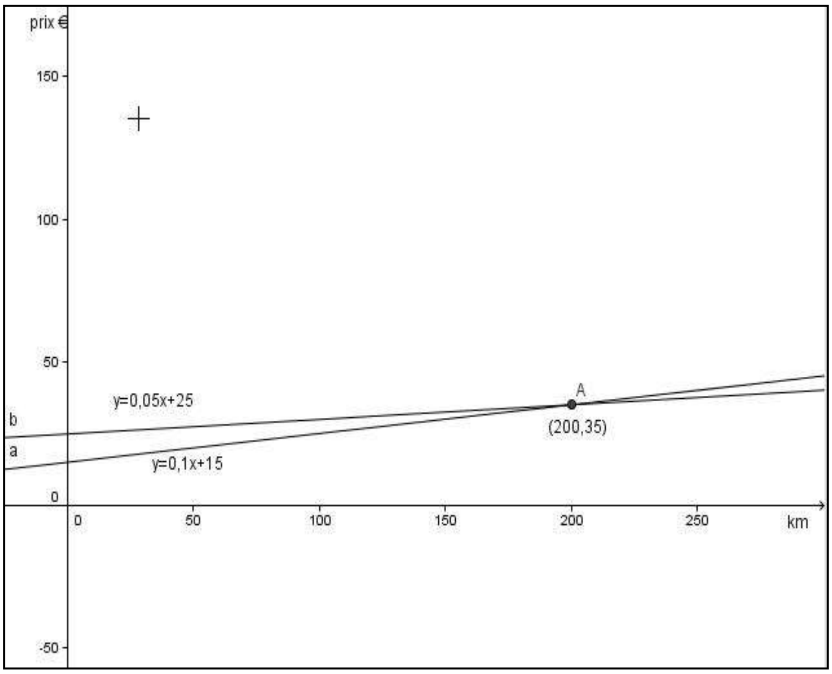
Lorsque l'on parcourt x kilomètres, le prix y vaut :

- *Pour l'entreprise A : y=0,10x+15*
- *Pour l'entreprise B : y=0,05x+25*

On trace les représentations graphiques de ces fonctions affines

Sur le dessin on peut voir que l'entreprise la plus convenable est reliée au nombre de kilomètres parcourus.

Si on parcourt moins de 200 km, la meilleure option serait l'entreprise **A**, et si on parcourt plus de 200 km, la meilleure option serait l'entreprise **B.**



7. PARABOLES ET FONCTIONS QUADRATIQUES

Les fonctions **$y = ax^2 + bx + c$**, avec $a \neq 0$, sont appelées **quadratiques**, la représentation graphique est une **parabole** continue dans tout $\mathbb{R}$

Orientation de la parabole

Si a> 0, la parabole sera ouverte vers le haut

Si a<0, la parabole sera ouverte vers le bas

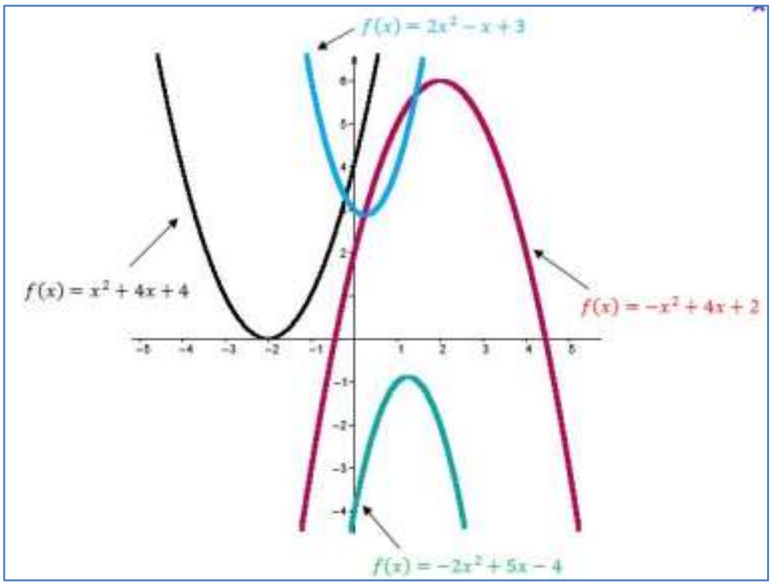
Coordonnée importante

Sommet de la parabole $= \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Représentation graphique

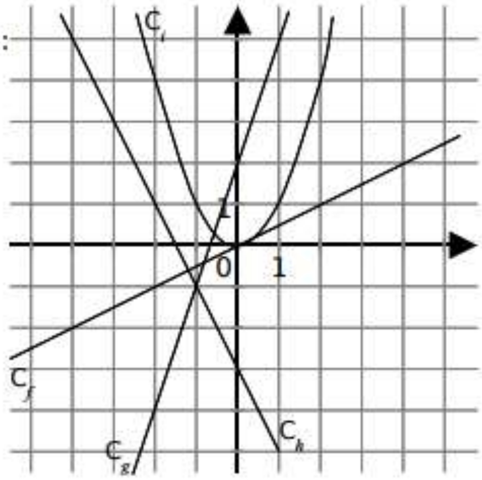
- **On calcule p= $\frac{-b}{2a}$**
- **On calcule le tableau de valeurs proches au sommet**
- **Points d'intersection de la courbe avec les axes du repère**
  - Le point d'abscisse 0 a pour ordonnée f(0), donc la courbe f coupe l'axe des ordonnées au point (0,f(0))
  - Le point d'ordonnée 0 a pour abscisse la solution de l'équation f(k)=0 , donc la courbe f coupe l'axe des abscisses au point (k,0)

    Il faut résoudre l'équation
    $ax^2 + bx + c = 0$
- **Graphique**



EXERCICE 1 : **/5,5 points** (1 + 1 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 1,5)

Dans la figure ci-contre, on a représenté quatre fonctions : f, g, h et i.



a. Cite, en justifiant, la (ou les) fonction(s) affine(s).

b. Cite, en justifiant, la (ou les) fonction(s) linéaire(s).

c. Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?

d. Quel est l'antécédent de 2 par la fonction g ?

e. Quel est le coefficient directeur de la fonction h ?

f. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la fonction h ?

g. Par simple lecture graphique, détermine l'expression de la fonction f et celle de la fonction g.

EXERCICE 2 : **/4,5 points** (1,5 + 1 + 2)

a. Parmi les fonctions suivantes, quelle(s) est (sont) la (les) fonction(s) affine(s) ? La (les) fonction(s) linéaire(s) ? Celle(s) qui n'est (ne sont) ni affine(s), ni linéaire(s) ? :

$h : x \longmapsto \frac{1}{x}$ $\qquad$ $i : x \longmapsto \frac{2}{3}x - 1$ $\qquad$ $j : x \longmapsto 3x - x$ $\qquad$ $k : x \longmapsto (x+5)^2 - x^2$

b. La fonction f est une fonction linéaire telle que $f(2) = 5$. Détermine f.

c. g est une fonction affine telle que $g(3) = 7$ et $g(5) = 1$. Détermine g.

EXERCICE 3 : **/10 points** (2 + 1 + 1 + 2,5 + 1,5 + 2)

Dans la salle de bains de Julie, il y a deux lavabos identiques L_A et L_B.

L_A contient pour l'instant 12 litres d'eau, le robinet est fermé, mais la bonde est entrouverte et laisse couler 0,6 litres d'eau par minute.

L_B est actuellement vide, sa bonde est fermée, mais Julie vient d'ouvrir le robinet et celui-ci déverse 0,9 litre d'eau par minute.

a. Quelle quantité d'eau y aura-t-il dans chacun des lavabos L_A et L_B dans une minute ? Dix minutes ?

b. Dans combien de minutes le lavabo L_A sera-t-il vide ? Justifie.

c. On nomme f_A et f_B les fonctions donnant la quantité d'eau présente dans les lavabos L_A et L_B après x minutes. Détermine f_A et f_B.

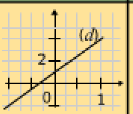
d. Après avoir déterminé les coordonnées de suffisamment de points, construis dans un même repère les représentations graphiques des fonctions f_A et f_B. Tu prendras 1 cm pour une minute sur l'axe des abscisses et 1 cm pour un litre sur l'axe des ordonnées.

e. Par lecture graphique, détermine après combien de minutes les lavabos L_A et L_B contiendront la même quantité d'eau. Détermine puis résous l'équation nécessaire pour retrouver ce résultat par le calcul.

f. Par lecture graphique puis par le calcul, détermine :

- la quantité d'eau contenue dans le lavabo L_A après 14 minutes.
- le nombre de minutes pour que le lavabo L_B contienne 10,8 litres d'eau.

Coche les bonnes réponses :

		R1	R2	R3	R4
1	x | 6 | 9 $f(x)$ | − 4 | − 6 Le coefficient de la fonction linéaire f est…	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{3}$	− 0,6	$\frac{2}{3}$
2	Une réduction de 30 % peut se traduire par la fonction…	$x \longmapsto x + 30$	$x \longmapsto x - 0{,}3$	$x \longmapsto 0{,}7\,x$	$x \longmapsto \frac{30}{100}x$
3	Parmi les fonctions suivantes, les fonctions linéaires sont…	$x \longmapsto 5x^2$	$x \longmapsto 4x + 3$	$x \longmapsto 6x - 4x$	$x \longmapsto \frac{7}{9}x$
4	La fonction linéaire dont la représentation graphique passe par le point A(1 ; 4) a pour coefficient…	0	0,25	1	4
5	f est une fonction linéaire donc…	$f(8) = f(5) + f(3)$	$f(8) = 5 + f(3)$	$f(6) = f(2) \times f(3)$	$f(6) = 2 \times f(3)$
6	− 5 est l'image de − 4 par la fonction affine…	$x \longmapsto -5x - 4$	$x \longmapsto 3x + 7$	$x \longmapsto \frac{5}{4}x$	$x \longmapsto 2x + 3$
7	Le nombre qui a pour image 13 par la fonction $x \longmapsto -2x + 3$ est….	− 23	5	− 5	− 29
8	La droite (d) représente la fonction… 	$x \longmapsto 3x + 1$	$x \longmapsto 3x + 2$	$x \longmapsto 4x$	$x \longmapsto x + 3$
9	f est une fonction telle que $f(4) = 5$ et $f(1) = 3$ avec $f(x) = ax + b$. Donc…	$\frac{f(4) - 5}{f(1) - 3} = a$	$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = a$	$\frac{f(1) - f(4)}{1 - 4} = a$	$a = \frac{2}{3}$

Linéaire ou affine ?

1 Parmi les fonctions f, g, h et m définies ci-dessous, indique celles qui sont linéaires.

a. $f(x) = 2x$
b. $h(x) = 3x - 4$
c. $g(x) = x^2$
d. $m(x) = (5 - 2x) - 5$

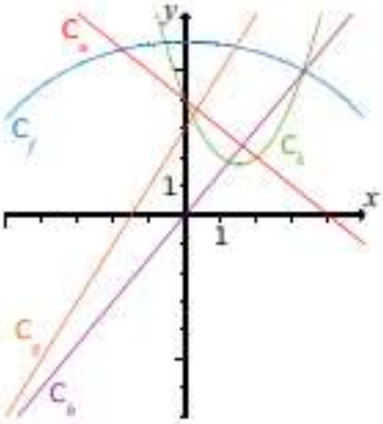
2 Parmi les fonctions n, p, k et d définies ci-dessous, indique celles qui sont affines.

a. $n(x) = 5x$
b. $k(x) = 2x + 7$
c. $p(x) = \dfrac{1}{x}$
d. $d(x) = (4x - 7) - 4x$

3 Parmi les fonctions t, u, w et z définies ci-dessous, indique celles qui sont affines (en précisant celles qui sont linéaires) et celles qui ne sont ni linéaires ni affines.

a. $t(x) = -x$
b. $u(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$
c. $w(x) = (x + 9)^2 - x^2$
d. $z(x) = (3x - 1)^2 - 3x^2$

4 Sur le graphique ci-dessous, des fonctions f, g, h, k et u ont été représentées.



Parmi ces fonctions, indique celles qui sont affines. (Tu préciseras celles qui sont linéaires.)

5 Un rectangle a pour longueur 7 cm et pour largeur x cm.

a. Exprime le périmètre $p(x)$, en cm, et l'aire $a(x)$, en cm², de ce rectangle en fonction de x.

b. Les fonctions p et a sont-elles linéaires ? Sont-elles affines ?

6 Le côté d'un carré mesure x cm.

a. Exprime le périmètre $p(x)$, en cm, et l'aire $a(x)$, en cm², de ce carré en fonction de x.

b. Les fonctions p et a sont-elles linéaires ? Sont-elles affines ?

Images et antécédents

7 La fonction f est définie par $f(x) = 8x$.

a. Détermine $f(2)$; $f(-3)$ et $f(0)$.

b. Quelle est l'image de -5 par la fonction f ? Et celle de $\dfrac{1}{8}$?

c. Détermine les antécédents, par la fonction f, des nombres -16 ; 0 et 28.

8 La fonction g est définie par $g(x) = 5x + 1$.

a. Quelle est l'image de 5 par la fonction g ?

b. Détermine $g(0)$; $g(-2{,}1)$ et $g(7)$.

c. Détermine les antécédents, par la fonction g, des nombres 21 ; -14 et 0.

9 La fonction h est définie par $h : x \longmapsto -6x$.

a. Détermine les images, par la fonction h, des nombres 0 ; -5 et $\dfrac{1}{3}$.

b. Calcule $h(-1)$ et $h(3{,}5)$.

c. Détermine les antécédents, par la fonction h, des nombres 24 ; -42 et $-\dfrac{3}{4}$.

10 k est définie par $k : x \longmapsto 2x - 5$.

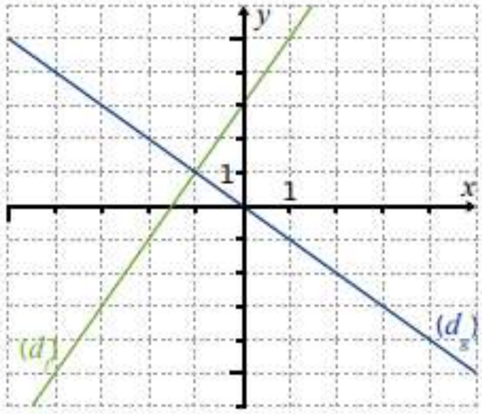
a. Détermine l'image, par la fonction k, de $\dfrac{1}{3}$.

b. Calcule $k(-4)$.

c. Résous l'équation $k(x) = \dfrac{5}{3}$. Que peux-tu dire de la solution de cette équation ?

11 La fonction g est une fonction linéaire telle que $g(3) = 4$.
En utilisant les propriétés d'une telle fonction, calcule les images des nombres 1,5 ; 6 et 7,5.

12 Le graphique ci-dessous représente des fonctions f et g.



Par lecture graphique, détermine pour chaque fonction :

a. les images des nombres 0 ; 1 et – 4.

b. les antécédents des nombres 3 ; – 5 et 5.

15 Représente les fonctions définies ci-dessous dans un même repère orthogonal avec des couleurs différentes.

- $d : x \longmapsto -2x + 1$
- $u : x \longmapsto 3x - 4$
- $h : x \longmapsto -x + 3$
- $t : x \longmapsto 2$
- $k : x \longmapsto 2{,}5x$
- $m : x \longmapsto -2x - 3$

Que peux-tu dire des représentations graphiques des fonctions d et m ?

À ton avis, pourquoi ?

16 Représente les fonctions définies ci-dessous dans un même repère orthogonal avec des couleurs différentes.

a. $f : x \longmapsto \frac{2}{3}x - 5$

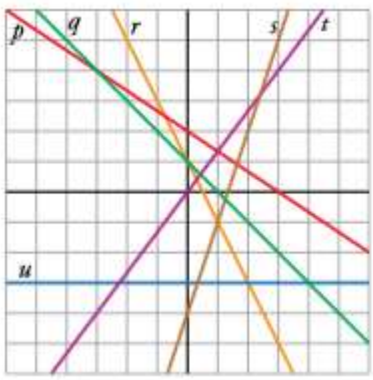
b. $h : x \longmapsto \frac{2}{5}x + 1$

c. $g : x \longmapsto -\frac{5}{6}x + 5$

d. $k : x \longmapsto -\frac{4}{3}x$

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 9

1. Relier, en justifiant, chaque graphique avec l'équation correspondante. **<u>Quelle est la pente ?</u>**



a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = (4/3)x$

d) $y = -2/3x + 2$

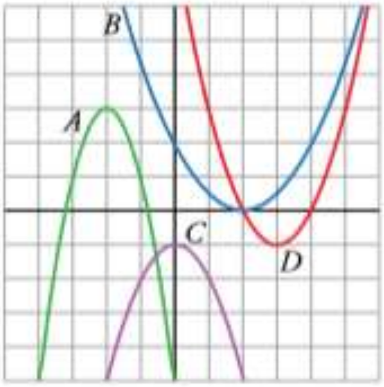
e) $y = -3$

f) $y = -x + 1$

2. Représenter graphiquement les fonctions affines et déterminer l'expression des trois dernières

a) y = 3x + 4
b) 3x + 2y = 5
c) Une droite telle que la pente est 1/4 et passant par (3, 0).
d) Une droite passant par (4, 1) et (–2, 4).
e) Une fonction linéaire passant par (4, –3).

3. Relier, en justifiant, chaque graphique avec l'équation correspondante



$y = -x^2 - 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$y = -2x^2 - 8x - 5$

$y = x^2 - 6x + 8$

4. La température actuelle est de 20 ° C et nous allons faire un voyage en ballon. Nous savons que la température de l'air baisse d'environ 6 ° C par kilomètre d'ascension.
   a) Quelle température y aura-t-il si nous montons 3 km? Combien aurons-nous grimpé si nous sommes à 11 ° C?
   b) Représenter la fonction ***hauteur → température*** et écrire son expression analytique.

5. Donner les représentations graphiques des fonctions carrées :

a) $y = x^2 - 4x + 1$ b) $y = -x^2 + 6x - 7$

c) $y = -2x^2 + 3$ d) $y = (1/3)x^2 + 2x + 1$

6. Trouver l'équation de chacune de ces affirmations et représenter les fonctions correspondantes:
   a) Begoña commence maintenant à courir à 10 km / h. Quelle distance aura-t-elle parcourue en ***t*** heures?
   b) Sonia a quitté la maison il y a deux heures à 6 km / h. Quelle distance aura-t-elle parcourue en ***t*** heures?
   c) Mar vient à 4 km / h de sa maison à la mienne, située à 18 km. À quelle distance sera-elle dans ***t*** heures?

7. Il y a deux heures, Estefanía a quitté son domicile vers chez Victor à vélo à 15 km / h. Victor marche maintenant à 6 km / h à la recherche d'elle. S'ils habitent à 58 km, où se trouveront-ils? Combien de temps Estefanía a fait du vélo?

3ºESO — CHAPITRE 10 : PROBLÈMES MÉTRIQUES DANS LE PLAN

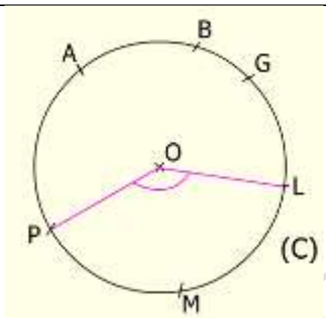
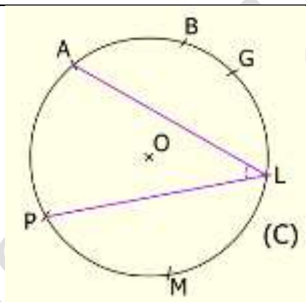
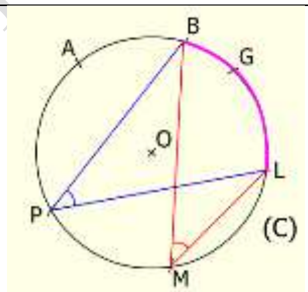
1. RELATIONS ANGULAIRES

Angles et polygones

Dans un triangle, la somme des mesures des angles vaut 180º
La somme des angles d'un polygone à n côtés est égal à : 180° · (n - 2)
Chaque angle est égal à $= \dfrac{180°\cdot (n-2)}{n}$

Angles dans un cercle

Dans un cercle, on appelle :
Angle au centre un angle dont le sommet est le centre du cercle.
Angle inscrit un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux autres points.
Arc de cercle intercepté par un angle l'arc de cercle situé « entre » les deux côtés de l'angle.

ANGLE AU CENTRE	ANGLE INSCRIT	ARC DE CERCLE INTERCEPTÉ
		
Les angles $\widehat{POL}$, $\widehat{MOL}$, $\widehat{GOB}$,… sont des angles au centre.	Les angles $\widehat{ALP}$, $\widehat{BAL}$, $\widehat{GLP}$,… sont des angles inscrits.	L'angle inscrit $\widehat{ALP}$ intercepte l'arc AP tout comme l'angle au centre $\widehat{AOP}$. On dit que les angles $\widehat{ALP}$ et $\widehat{AOP}$ interceptent le même arc de cercle.

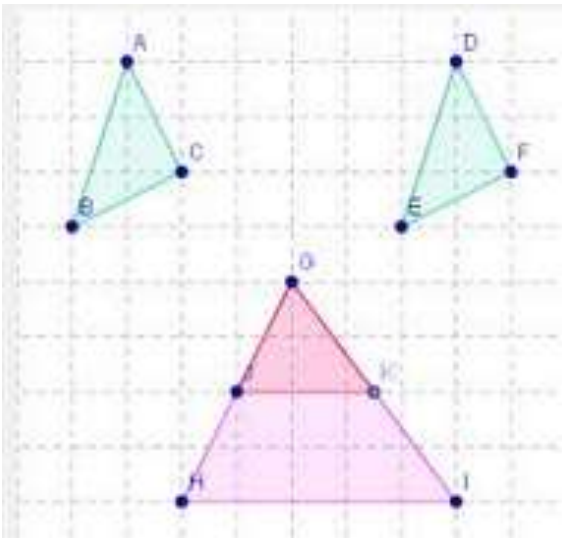
Si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors l'angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre.
Si deux angles inscrits interceptent le même arc de cercle, alors ils ont la même mesure.

2. TRIANGLES SEMBLABLES

On dit que deux **triangles** sont **semblables** s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Parmi les multiples formalisations de cette définition intuitive, les deux plus courantes sont : Deux triangles sont semblables :

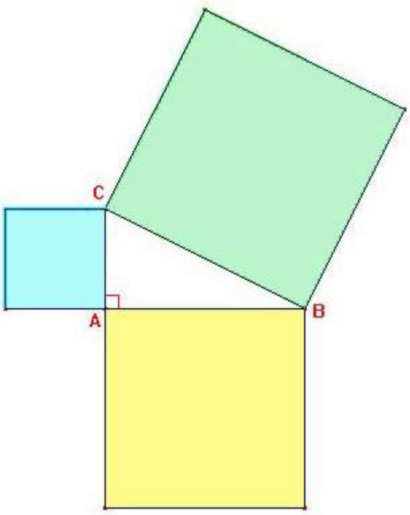
1. Si leurs côtés sont proportionnels $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, ou, ce qui est équivalent
2. S'ils ont les mêmes angles $\widehat{A} = \widehat{B} = \hat{C}$



3. THÉORÈME DE PYTHAGORE

Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse et réciproquement.

$a^2 = b^2 + c^2$ Où **a** est l'hypoténuse et **b** et **c** sont les côtés de l'angle droit.



Si ABC est rectangle en A, alors
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

<u>Réciproque du théorème de Pythagore</u>

La réciproque du théorème de Pythagore est une propriété qui permet de dire si un triangle est rectangle ou non lorsqu'on connaît les longueurs de ses 3 côtés.

Énoncé

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

a ,**b** et **c** sont les côtés d'un triangle et **a** est le côté plus grand

Si $a^2 = b^2 + c^2$, alors ce triangle est rectangle.

Si $a^2 > b^2 + c^2$, alors ce triangle est obtusangle.

Si $a^2 < b^2 + c^2$, alors ce triangle est acutangle.

4. APLICATIONS DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

- CALCULER LA HAUTEUR D'UN TRIANGLE

  On peut déterminer la hauteur d'un triangle isocèle ou équilatéral, si on connaît la longueur des côtés en utilisant le théorème de Pythagore.
  Dans un triangle isocèle et équilatéral, la hauteur coupe la base dans son milieu et divise le triangle initial en deux triangles rectangles égaux.

- CALCULER LA DIAGONALE D'UN RECTANGLE

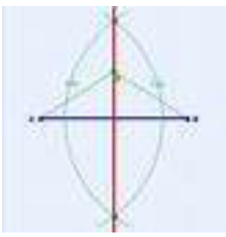
  On peut déterminer la longueur de la diagonale d'un carré ou d'un rectangle, si on connaît la longueur des côtés en utilisant le théorème de Pythagore.

5. LIEUX GÉOMÉTRIQUES

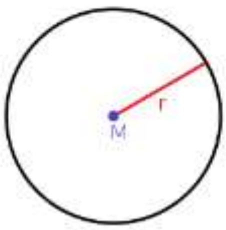
On appelle lieu géométrique l'ensemble des points liés par des propriétés géométriques.

Exemples

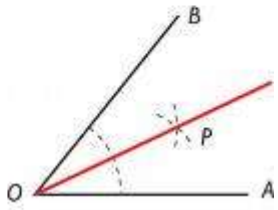
- Dans le plan si on considère deux points distincts A et B, l'ensemble des points M qui sont à la même distance de A que de B (MA=MB) est la médiatrice du segment AB.



- Dans le plan, si on considère un point O du plan et un réel strictement positif r, l'ensemble des points M tels que OM= r est le cercle de centre O et de rayon r.



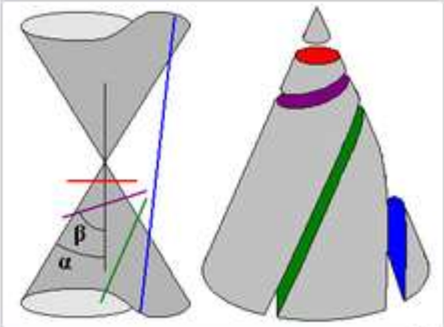
- Dans le plan si on considère deux droites A et B sécantes l'ensemble des points P du plan équidistants des droites A et B est la réunion des deux bissectrices de (A, B)



6. LES CONIQUES COMME LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Une **conique** est une courbe, définie initialement comme l'intersection d'un cône de révolution (supposé prolongé à l'infini de part et d'autre du sommet) avec un plan.

Si cet angle d'inclinaison est inférieur à l'angle d'ouverture (angle formé par l'axe du cône et une génératrice), l'intersection est une hyperbole ;
Si cet angle d'inclinaison est égal à l'angle d'ouverture du cône, l'intersection est une parabole ;
Si cet angle d'inclinaison est supérieur à l'angle d'ouverture du cône, l'intersection est une ellipse ;
Dans le cas maximal où l'angle d'inclinaison du plan de coupe est droit, cette ellipse est même un cercle.



Différentes coniques obtenues comme intersection d'un cône de révolution et d'un plan selon l'inclinaison de celui-ci : cercle (rouge), ellipse (violet), parabole (vert), branche d'hyperbole (bleu).

7. AIRE DE FIGURES PLANES

- AIRE DE TRIANGLES ET QUADRILATÈRES

TRIANGLE	CARRÉ
$A = \dfrac{côté \cdot hauteur\ correspondante}{2}$	A= côté · côté = l^2
RECTANGLE	LOSANGE
A= $côté \cdot hauteur\ correspondante$	$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$
PARALLÉLOGRAMME	TRAPÈZE
A= $côté \cdot hauteur\ correspondante$	A=$\frac{(B+b)\cdot h}{2}$

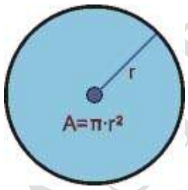
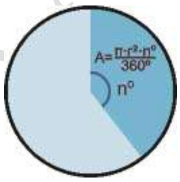
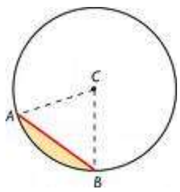
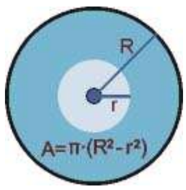
- AIRE D'UN POLYGONE RÉGULIER

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure. Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle. On peut décomposer chaque polygone régulier de **n** côtés en **n** triangles.

Un polygone régulier de n côtés a des angles au centre égaux à $360^{o}/n$.
L'aire d'un polygone régulier est égale à son périmètre multiplié par son apothème et divisé par deux.

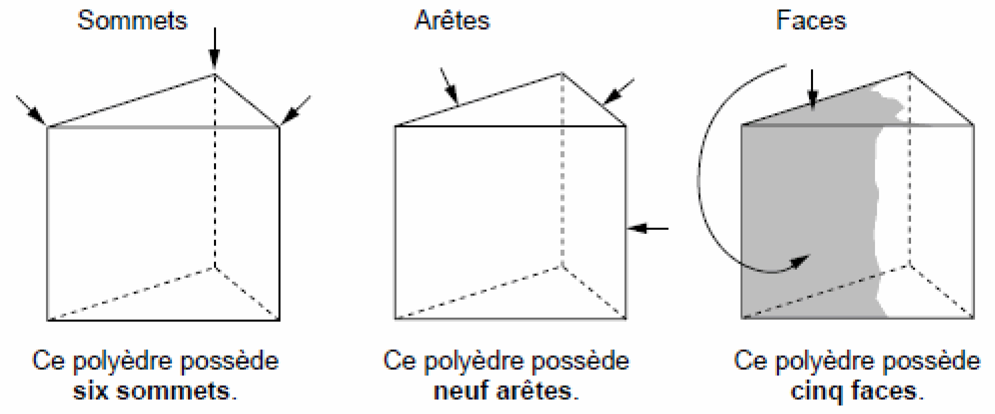
$$A = \frac{Périmètre \cdot apothème}{2}$$

8. AIRE DE FIGURES CIRCULAIRES

FIGURES CIRCULAIRES		FORMULE
DISQUE : Tous les points d'un cercle et ceux de l'intérieur constituent le disque de centre O et de rayon R.		$A = \pi r^2$
SECTEUR DE DISQUE: La partie du disque limitée par deux rayons et un arc.		$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$
SEGMENT CIRCULAIRE : C'est une partie d'un disque limitée par le tracé d'une corde et son arc.		A= $A_{secteur}$-$A_{triangle}$
COURONNE CIRCULAIRE : C'est une partie d'un disque limitée par deux cercles concentriques.		A = $\pi \cdot (R^2 - r^2)$

1. POLYÈDRES

Un **polyèdre** est un solide dont la frontière est formée de plans ou de portions de plan. Les portions de plan qui comprennent ainsi entre elles le polyèdre, sont les faces, chaque face, étant limité par intersections (les arêtes) avec les faces voisines, est un polygone. Les côtés de ce polygone sont les arêtes du polyèdre. Nous appelons "sommet" d'un polyèdre tout sommet d'une quelconque de ses faces.



2. CLASIFIER POLYÈDRES. AIRES

Selon la forme, un polyèdre peut être concave ou convexe.
Un **polyèdre convexe** est tel que chaque point d'un segment de droite qui joint deux points quelconques appartient au polyèdre.
Un polyèdre est dit **polyèdre concave** si une ou plusieurs de ses faces, quand on fait une prolongation, coupe le polyèdre.

Relation d'Euler

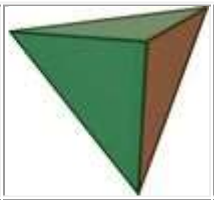
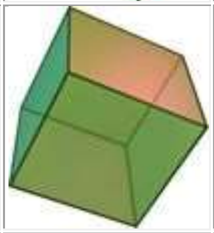
C	**+**	**V**	**=**	**A**	**+**	**2**
Nombre de faces		Nombre de sommets		Nombre d'arêtes		

- POLYÈDRES RÉGULIERS

Un **polyèdre régulier** est constitué de faces toutes identiques et régulières et dans chaque sommet concourent le même nombre de faces.

N'existe que cinq polyèdres réguliers convexes qui sont donc appelés les "les cinq solides platoniciens".

Nom (*m*,*n*)	Image	*V*	*A*	*C*	*C*- *A* + *V*

Tétraèdre (3,3)		4	6	4	2
Hexaèdre ou cube (4,3)		8	12	6	2
Octaèdre (3,4)		6	12	8	2
Dodécaèdre (5,3)		20	30	12	2
Icosaèdre (3,5)		12	30	20	2

Soient *m* le nombre de côtés de chaque face d'un polyèdre régulier, *n* le nombre des arêtes qui se rencontrent en chaque sommet.

- PRISMES

Un **prisme** est un polyèdre constitué par deux faces polygonales superposables situées dans deux plans parallèles (**bases**) et par des parallélogrammes joignant les bases (**faces latérales**). La distance séparant les deux bases est appelée **hauteur** du prisme.

Lorsque les faces latérales sont des rectangles, c'est-à-dire, sont perpendiculaires aux bases, le prisme est appelé **prisme droit**. En cas contraire est appelé **prisme oblique**.

On dit que le **prisme** est **régulier** s'il est droit et les bases sont des polygones réguliers.
Un pavé droit, ou parallélépipède rectangle, est un prisme délimitée par six faces rectangulaires (boîte rectangulaire). Tous les angles sont des angles droits et les faces opposées du cuboïde sont égales. C'est aussi un prisme rectangulaire droit.

Aire d'un prisme

L'aire latérale d'un prisme est égale au produit p × h, où p désigne le périmètre d'une des deux bases et h la hauteur du prisme.

A = Aire latérale + 2 ·Aire de la base

- PYRAMIDE

Une **pyramide** à *n* côtés est un polyèdre formé en reliant une base polygonale de *n* côtés à un point, appelé l'**apex**, par *n* faces triangulaires (*n* ≥ 3).

Pour une pyramide triangulaire chaque face peut servir de base, avec le sommet opposé pour apex. Le tétraèdre régulier est une pyramide triangulaire. Les pyramides carrées et pentagonales peuvent aussi être construites avec toutes les faces régulières.

Lorsque la perpendiculaire abaissée du sommet passe par le centre du polygone de base, la **pyramide** est **droite**. En cas contraire est appelé **pyramide oblique**.

On dit que la pyramide est **régulière** si elle est droite et la base est un polygone régulier.

On appelle apothème d'une pyramide régulier à la hauteur de quelque face latéral.

Aire d'une pyramide

L'aire totale d'une pyramide est égale à la somme de l'aire latérale plus l'aire de la base.

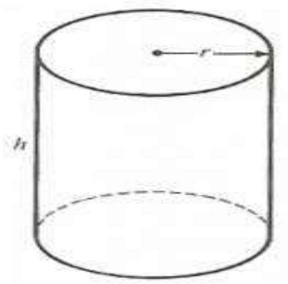
A = Aire latérale + Aire de la base

3. CORPS DE RÉVOLUTIONS. AIRES.

Un **corps de révolution** est un corps géométrique que nous obtenons en faisant tourner une figure plaine autour d'un axe.

- CYLINDRE

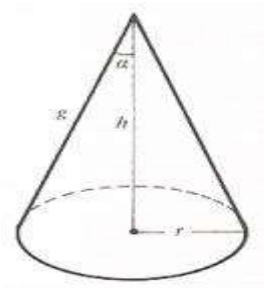
Un **cylindre** est une surface engendrée par un rectangle qui tourne autour d'un des ses côtés. Le développement d'un cylindre dans le plan est composé par un rectangle et deux disques.



$$A = A_{latéral} + 2A_{base} = 2\pi r(h + r)$$

- CÔNE

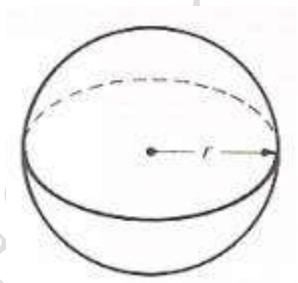
Un **cône** est une surface engendrée par un triangle qui tourne autour d'un de ses côtés perpendiculaires. Le développement d'un cône dans le plan est composé par un disque et un secteur de disque.



$$A = A_{latéral} + A_{base} = \pi r(g + r)$$

- SPHÈRE

La **sphère** est une surface qui est formée par la rotation d'un demi-cercle autour de son grand axe. La sphère n'a pas un développement dans le plan.



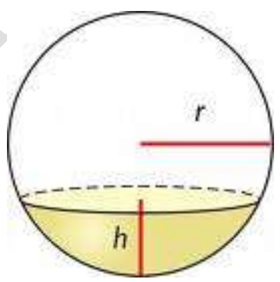
$$A = 4\pi r^2$$

- FIGURES SPHÉRIQUES

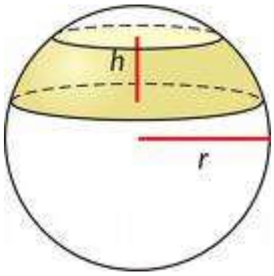
  On obtient des figures sphériques quand on coupe la sphère avec un plan ou plus.

  - Calotte sphérique
    Lorsqu'un plan coupe une sphère la divise en deux calottes sphériques. La section obtenue (intersection du plan et de la sphère) est un cercle.

$$A = 2\pi rh$$

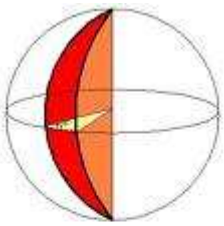


- Zone sphérique
  La portion de sphère obtenue en la coupant par deux plans parallèles. En appelant h la distance entre les deux plans l'aire correspondante (zone sphérique) est $A = 2\pi r h$



- Fuseau sphérique
  La portion de sphère obtenue en la coupant par deux plans sécants qui passent par le centre de la sphère. L'aire correspondante est

$$A = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360°}$$



4. VOLUME DES CORPS GÉOMÉTRIQUES

Le volume d'un corps mesure l'extension dans l'espace qu'il possède dans les trois directions en même temps.

- Principe de Cavalieri

Si deux corps ont la même hauteur, les volumes de deux objets sont égaux si les sections transversales correspondantes sont, dans tous les cas, égales. Deux sections transversales correspondent si elles sont des intersections de l'objet avec des plans équidistants d'un plan de base donné.

- VOLUME DU PRISME ET DU CYLINDRE

Le volume d'un prisme est égal au produit de l'aire de sa base A_{base}, et de sa hauteur h.

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$
$$V_{cylindre} = A_{base} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

- VOLUME D'UN PYRAMIDE ET DU CÔNE

Le volume d'une pyramide et du cône est égal à un tiers du volume d'un prisme ou d'un cylindre, avec la même base et la même hauteur.

$$V_{pyramide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$$

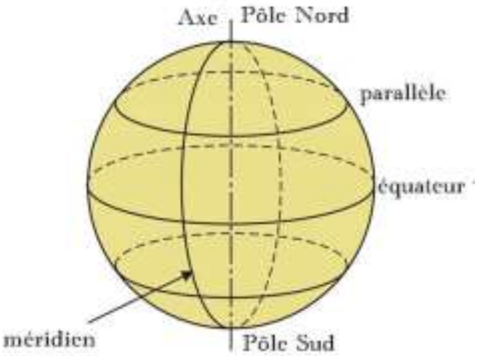
$$V_{cône} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

- VOLUME D'UNE SPHÈRE

$$V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5. LA SPHÈRE TERRESTRE

- ELEMENTS DE LA SPHÈRE TERRESTRE



  - Un **méridien** est un grand cercle imaginaire tracé sur le globe terrestre reliant les pôles géographiques.
  - **L'axe terrestre** est un axe imaginaire de la Terre quand tourne sur soi même. Ses extrêmes sont les pôles Nord et Sud.
  - L'**équateur** est un grand cercle perpendiculaire à l'axe terrestre que divise à la sphère en deux parties égales appelées l'hémisphère nord et l'hémisphère sud.
  - Un **parallèle** est un cercle imaginaire parallèle à l'équateur.

- COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES

Par coordonnées géographiques d'un lieu, on entend la latitude et la longitude .

- La **latitude** est l'angle en degrés entre le parallèle du point et l'équateur, suivi de la lettre N (Nord) ou S (Sud). Est une mesure angulaire s'étendant de 0° à l'équateur à 90° aux pôles.
- La **longitude** est l'angle en degrés entre le Méridien de Greenwich (méridien zéro) et le méridien du point. La longitude est donc une mesure angulaire sur 360° par rapport à un méridien de référence, avec une étendue de -180° à +180°, ou respectivement de 180° ouest à 180° est.

1. VECTEURS

Éléments d'un vecteur

Soit A et B deux points distincts du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur défini par :

- Sa direction : celle de la droite AB
- Son sens : de A vers B
- Sa norme (sa longueur) est $|\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{AB}$ a pour origine A et pour extrémité B

Coordonnées de vecteurs

Soit $A(x_a, y_a)$ et B (x_b, y_b) les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ = $(x_b - x_a, y_b - y_a)$

Calculer la norme de vecteurs

Soit $\vec{v}=(v_1, v_2)$ un vecteur, la norme est

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

2. DÉPLACEMENTS DANS LE PLAN

Une transformation géométrique dans le plan permet d'obtenir un point P' à partir d'un autre point P, au moyen d'une règle précise.

Les déplacements ou isométries sont des transformations géométriques conservant les distances et les angles.

Dans une transformation un point est appelé **double** ou **invariant** si c'est lui-même ce qu'on transforme.

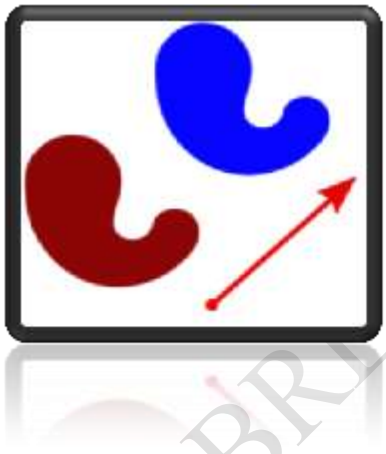
3. TRANSLATIONS

Une **translation** est une transformation qui correspond à l'idée intuitive de « glissement » d'un objet, sans rotation, retournement ni déformation de cet objet.

Une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est un déplacement qui, à tout point P, associe le point P' tel que $\overrightarrow{PP'}$ a la même norme, direction et sens que $\overrightarrow{v}$.

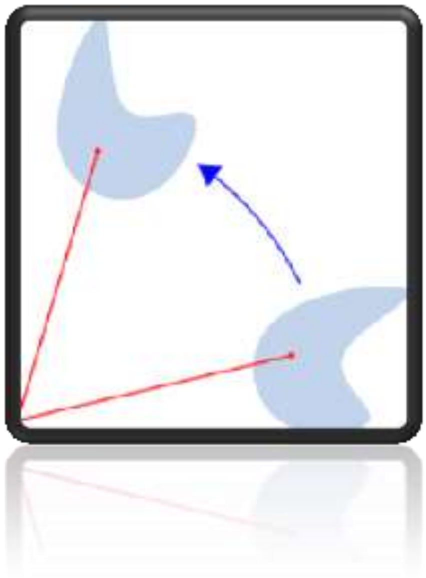
On dit alors que *P'* est le **translaté** de *P*.

Donnés un point A(x,y) et un vecteur $\overrightarrow{v}$=(v_1,v_2), le point P' translaté de P, a des coordonnées P'(x+v_1, y+v_2)



4. ROTATIONS

Une rotation de centre O et d'angle α est la transformation qui laisse O invariant et qui transforme tout point P distinct de O en un point P' tel que OP=OP' et $\widehat{\mathrm{POP'}} = \alpha$. On note G (O ;α)



5. SYMÉTRIES

5.1.Symétrie par rapport à un point

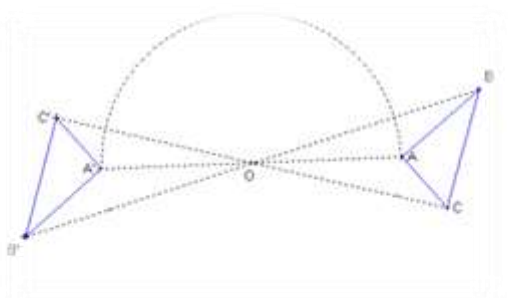
Une symétrie de centre O est la transformation qui, à tout point P, associe le point P' tel que :

- Les points P, O et P' sont sur la même droite.
- Le point O est le milieu de [PP'].

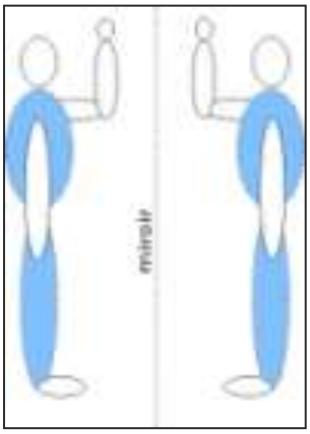
5.2. Symétrie orthogonale par rapport à une droite

On les appelle aussi des **réflexions d'axe *r***. La réflexion d'axe ***r*** est la transformation du plan qui laisse tous les points de ***r*** invariants et qui, à tout point *P* non situé sur *r*, associe le point P' tel que :

- PP' est orthogonale à r.
- Les distances de P à r et de P' à r, sont égales.

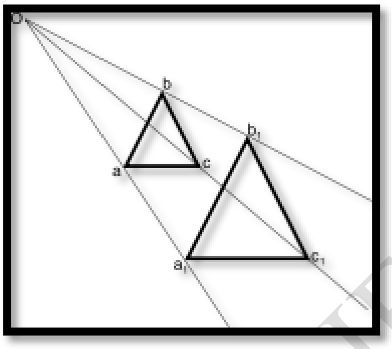


r est la médiatrice de [PP'] et est appelé **axe de symétrie**.



6. HOMOTHÉTIES ET SIMILITUDES

Une **homothétie** de centre O et de rapport k (un scalaire k>0) est une transformation géométrique qui à tout point P associe le point P' de sorte qu'ils préservent l'alignement des points P, O et P', de façon que $\overline{OP'}=k\cdot\overline{OP}$



Deux cas particuliers doivent être mentionnés :

- Si $k = 1$, chaque point étant invariant, l'homothétie est la transformation identique.
- Si $k = -1$, l'homothétie de rapport -1 est la symétrie centrale de centre *O*.

Une **similitude** est une transformation qui, à toute figure, fait correspondre une figure *semblable*, c'est-à-dire de même forme.

Ainsi, par une **similitude**, tout carré a pour image un carré, tout triangle équilatéral, un triangle équilatéral, tout cercle a pour image un cercle, etc.

Le **rapport k d'une similitude** est le coefficient de **proportionnalité entre les longueurs** d'une première figure géométrique, et les longueurs correspondantes dans l'image de la première par la similitude.

3º ESO

CHAPITRE 13 : TABLEAUX ET REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES STATISTIQUES

1. POPULATION ET ÉCHANTILLON

La **statistique** est la science formelle qui comprend la collecte, l'analyse, l'interprétation de données ainsi que la présentation de ces données afin de les rendre lisibles.

- **Population**. Tout ensemble étudié par la statistique est une population.
- **Échantillon.** Désigne un sous ensemble d'individus extraits d'une population initiale.
- **Individus.** Chaque élément de la population ou de l'échantillon.
- **Effectif total.** Nombre d'individus de la population ou de l'échantillon.

2. VARIABLES STATISTIQUES

On étudie certaines caractéristiques des individus : ce sont les caractères ou variables statistiques.

Types	Propriétés		Exemples
Qualitative	Si la variable prend des valeurs non chiffrées, c'est-à-dire qualités.		La profession d'une personne. La couleur du cheveu
Quantitative	Si la variable prend des valeurs chiffrées		Poids Nombre de frères
	Discrète	La variable prendre valeurs isolées dans un intervalle.	Nombre d'amis :2,3 (mais non 2.5)
	Continue	La variable peut prendre toute valeur dans un intervalle.	Les tailles: 1.7,1.71,1.711,…

3. EFFECTIFS ET TABLEAUX

Recueil de données

Une série statistique est un recueil de données relatives à une variable quantitative, ordonnées par ordre croissant des valeurs qu'elle prend.
On peut présenter les données sous la forme d'un tableau avec :

- En première colonne : les valeurs de la variable statistique.

Les modalités d'une variable discrète sont les valeurs que prend cette variable. Dans le cas d'une variable continue, on regroupe les valeurs selon des intervalles disjoints. Chaque intervalle est une classe. Pour les calculs, on utilise le centre de chaque classe.

- En deuxième ligne : l'effectif de la valeur

Effectif et fréquence.
L'**effectif** d'une modalité est le nombre d'individus présentant cette modalité. On note comme f_i. La somme des effectifs est égale à l'effectif total.

La **fréquence** d'une modalité est le rapport entre l'effectif de cette modalité et l'effectif total de la population. On note comme h_i. Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1. La somme de toutes les fréquences est 1.

Effectif cumulé, fréquence cumulé.

L'effectif cumulé d'une modalité d'une série statistique est la somme des effectifs des modalités qui lui sont inférieures (ou égales). On note F_i.

$$F_i = f_1+f_2+.....+f_i$$

La **fréquence cumulée** d'une modalité d'une série statistique est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures (ou égales). On note H_i.

$$H_i = h_1+h_2+.....+h_i$$

Modalité x_i	Effectif f_i	Fréquence h_i	Pourcentage %	Effectif cumulé F_i	Fréquence cumulée H_i
x_1	f_1	h_1	$h_1 \cdot 100$	F_1	H_1
x_2	f_2	h_2	$h_2 \cdot 100$	$F_2=f_1+f_2$	$H_2=h_1+h_2$
…	…	…	…	…	…
x_p	f_p	h_p	$h_p \cdot 100$	$f_1+f_2+…f_p=N$	$h_1+h_2+…h_p=1$

Tableau de fréquences

4. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DE DONNÉES STATISTIQUES

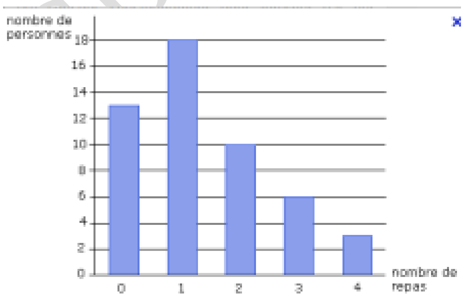
Diagramme en bâtons

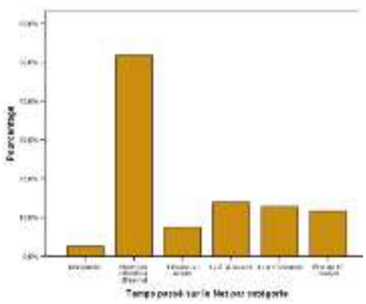
Utilisé pour représenter graphiquement une série statistique dont la **variable** est **discrète**. On peut utiliser aussi, si la variable est **qualitative.**

On représente sur l'axe des abscisses les différentes valeurs du caractère et, sur l'axe des ordonnées, les effectifs.

La hauteur des barres est proportionnelle à l'effectif.

Si on désigne une ligne polygonale en reliant tous les extrêmes des bâtons, on obtient le polygone d'effectifs.

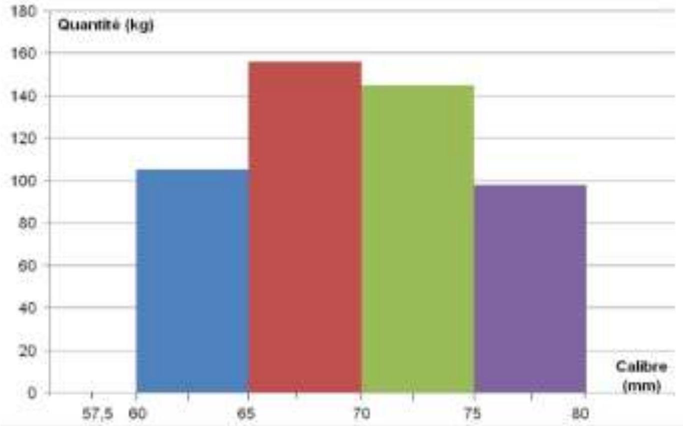


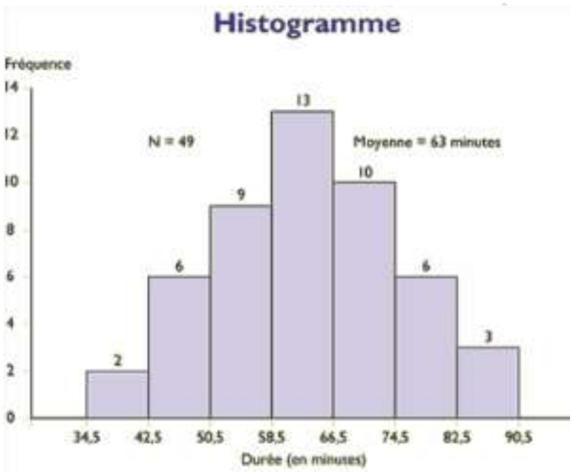


CHAPITRE 13 : TABLEAUX ET REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES STATISTIQUES

Histogramme

Utilisé pour représenter graphiquement une série statistique dont la **variable** est **continue.** L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif.
Sa largeur correspond à l'amplitude de l'intervalle de chaque classe.
On représente en abscisses les différentes classes du caractère.





Polygone des fréquences

Le polygone des fréquences est représenté en joignant les milieux des cotés supérieurs des rectangles dans un histogramme. C'est une ligne brisée dont les extrémités rejoignent l'axe des abscisses.

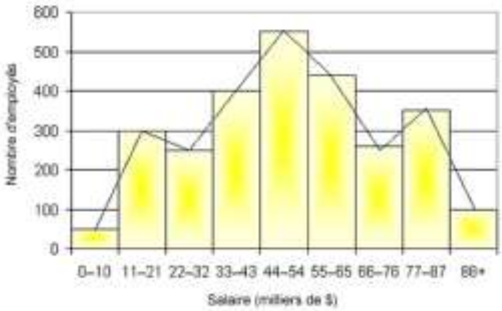
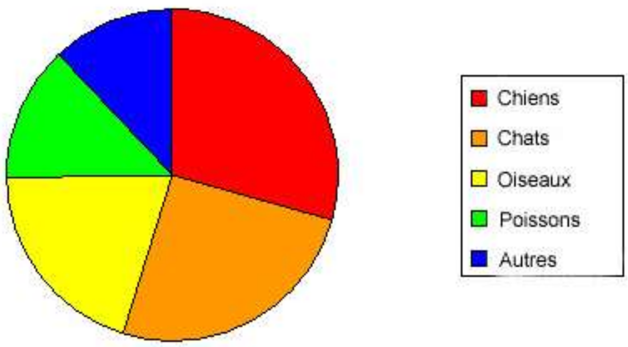


Diagramme circulaire

Utilisé pour représenter graphiquement quelque variable.
Est un disque divisé en secteurs, un pour chaque modalité ou classe.
L'angle d'ouverture de chaque secteur est proportionnel à l'effectif.

Angle du secteur= fréquence $\cdot 360^0$

Figure 4. Animaux de compagnie achetés chez le Monde des animaux



AUTOÉVALUATION CHAPITRE 13

1. Indiquer, pour chaque cas, ce que sont les individus, la population, les variables et leur type:
   a) Nombre de fois par an que chaque patient a utilisé sa carte de santé.
   b) Temps d'attente de chaque patient lors d'une consultation dans un centre de santé.
   c) Type de spécialiste auquel les patients se rendent dans un centre de santé.

2. Pour étudier le "nombre d'amandes dans chaque tablette de chocolat" d'une certaine production, un jour donné est analysée 1 tablette sur 200 produites. Les tablettes analysées, sont-elles population ou échantillon?

3. Le temps, en minutes, passé dans la salle d'attente par les patients d'un médecin un certain jour sont:

28	4	12	35	2	26	45	22	6	23
27	16	18	32	8	47	8	12	34	15
28	37	7	39	15	25	18	17	27	15

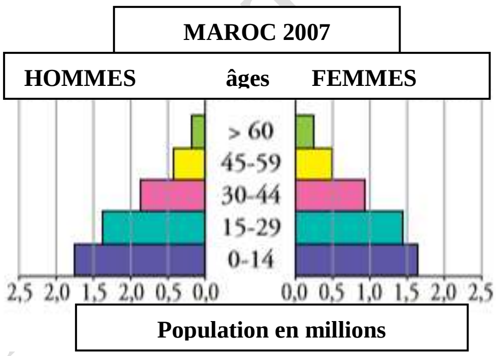
   a) Faire un tableau en les répartissant par intervalles 1 - 9 - 17 - 25 - 33 - 41 - 49.
   b) Représenter la distribution avec un graphique approprié (histogramme ou diagramme en bâtons)

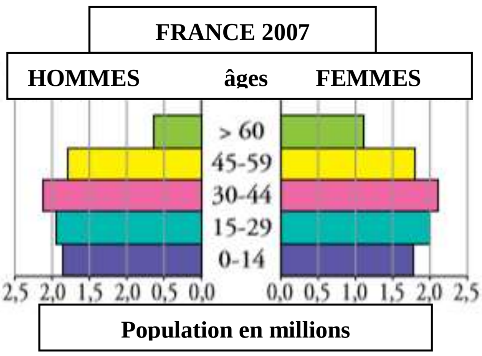
4. Nombre de jours que les étudiants d'un cours ont passé à la bibliothèque de l'école:

3	1	2	4	0	2	1	3	1	0	2	0	3	5	2
0	2	4	1	2	1	2	0	5	3	3	1	2	1	0

   Faire un tableau de fréquences et représenter la distribution avec un graphique approprié (histogramme ou diagramme en bâtons)

5. Observer ces pyramides de population :





   Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant les réponses:
   a) La proportion de personnes âgées en France est beaucoup plus élevée qu’au Maroc.
   b) Il y a plus de personnes âgées que de personnes âgées dans les deux pays.
   c) La proportion d'enfants est plus élevée au Maroc qu'en France.

3º ESO CHAPITRE 14 : PARAMÈTRES STATISTIQUES

1. DEUX TYPES DE CARACTÉRISTIQUES

L'objet des paramètres statistiques est de résumer, à l'aide de quelques valeurs clés, l'information donnée par l'observation d'une variable quantitative.
Nous distinguerons deux types de caractéristiques : celles de la tendance centrale et celles de dispersion.

Caractéristiques de la tendance centrale

- **Moyenne arithmétique $\bar{x}$.** C'est la somme des produits des valeurs du caractère par leur effectif, divisé par l'effectif total.

$$\bar{x} = \frac{\mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{x}_1 + \mathrm{f}_1 \cdot \mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{f}_\mathrm{n} \cdot \mathrm{x}_\mathrm{n}}{N}$$

  Si la variable est continue, x_i est le centre de chacune des classes.

- **Médiane, Me**. La médiane d'une série statistique est la modalité qui partage la population en deux groupes de même effectif : il y a autant d'individus ayant une modalité inférieure à la médiane que d'individus ayant une modalité supérieure à la médiane.

  Dans le cas d'une variable discrète, on ordonne toutes les valeurs de la série par ordre croissant, en répétant les valeurs identiques :

  - Si l'effectif total est impair, la médiane est la valeur centrale.
  - Si l'effectif total est pair, on convient que la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales.

  La médiane correspond donc aussi à une fréquence cumulée de 0,5 ou à un pourcentage cumulé de 50%.

- **Mode, Mo. Classe modale**. Si le caractère est discret, le mode d'une série statistique est la valeur du caractère ayant l'effectif le plus grand. (Il peut y avoir plusieurs modes)
  Si le caractère est continu, la classe modale est l'intervalle de valeurs du caractère correspondant à l'effectif le plus grand. (Il peut y avoir plusieurs classes modales)

Caractéristiques de la dispersion

Les caractéristiques de dispersion ont pour objectif de rendre compte de la diversité des valeurs et de leur répartition entre les valeurs extrêmes.

- **L'étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs du caractère.

  R= máx-min

- **L'écart absolu moyen.** Ce paramètre est la moyenne arithmétique de la valeur absolue des écarts à la moyenne. C'est donc la *distance moyenne à la moyenne*

$$D\ M = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N}$$

- La **variance** est la simple moyenne arithmétique des carrés des écarts à la moyenne arithmétique observée. On note σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

- L'**écart type** mesure la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne. C'est la racine carrée de la variance. On note σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

2. Calcule de $\bar{x}$ et σ avec tableaux de fréquences

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
	$N=\sum f_i$	$\sum f_i \cdot x_i$	$\sum f_i \cdot x_i^2$

3. Coefficient de variation

C'est l'écart type divisé par la moyenne arithmétique.

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

4. **PARAMÈTRES DE POSITION**

Les quartiles sont les valeurs du caractère qui partagent l'effectif total en 4 parties égales.

Le quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 25% des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales.

De même, le quartile Q_2 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 50% des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales (correspondant à la médiane).

Et le quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 75% des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales.

25%	Q_1	25%	Q_2	25%	Q_3	25%

Coche les bonnes réponses :

		R1	R2	R3	R4
1	Les tailles des joueurs du cinq majeur d'une équipe de basket sont, en cm : 189 ; 198 ; 205 ; 207 et 211.	La taille moyenne des joueurs est de 2,05 m ☐	C'est comme si tous les joueurs mesuraient 2,02 m ☐	La taille moyenne des joueurs est, en cm : $\frac{189 + 211}{2}$ ☐	La taille moyenne des joueurs est de 2,02 m ☐
2	Avec quatre notes, la moyenne de Louise en mathématiques est de 12.	Elle a pu avoir trois fois la note 16 ☐	Elle a eu autant de notes au dessus de 12 qu'en dessous ☐	Ses trois premières notes ont pu être 8,5 ; 10 et 11,5 ☐	Elle a pu avoir une moyenne de 11 sur ses trois premières notes et 13 pour la dernière ☐
3	En une semaine : 	Il y a autant d'élèves qui prennent 3 repas que d'élèves qui prennent 5 repas par semaine ☐	1 490 repas sont pris par les élèves en une semaine ☐	En une semaine, un élève prend en moyenne environ 2,8 repas ☐	Un peu plus d'un élève sur 10 ne mange pas à la cantine ☐
4	Voici une partie du relevé de notes (sur 20) de Mourad ainsi que leur coefficient : notes : 14 ; 16 ; 8 ; 15 coef : 2 ; 1 ; 2 ; 3	C'est comme s'il avait eu deux fois la note 14, une fois 16, deux fois 8 et trois fois 15 ☐	Sa moyenne sur ces quatre notes est de 13,25 ☐	Un bonus de 2 points sur sa note de 8 sur 20 augmente sa moyenne de 0,5 point ☐	Pour que sa moyenne augmente de 1 point, il doit avoir au moins 18 au prochain devoir, coefficient 1 ☐
5	Vrai ou faux ?	Une moyenne est comprise entre les valeurs extrêmes d'une série statistique ☐	Si la moitié des valeurs d'une série augmentent de 1 et si celles de l'autre moitié diminuent de 1, la moyenne ne change pas ☐	La moyenne des vitesses moyennes sur les deux parties d'un trajet est égale à la vitesse moyenne sur tout le trajet ☐	x_1 et x_2 sont les valeurs d'une série, n_1 et n_2, les effectifs. Si x_1 augmente de 1, la moyenne augmente de $\frac{n_1}{n_1+n_2}$ ☐

EXERCICE 1 : **/7 points** (1 + 2 + 2 + 1 + 1)

Voici les températures maximales moyennes relevées par mois dans deux villes françaises durant l'année 2003 en °C (sources : Météo France).

	JAN.	FÉV.	MARS	AVRIL	MAI	JUIN	JUIL.	AOUT	SEPT.	OCT.	NOV.	DÉC.
Ville A	29	29	30	30	31	30	30	31	32	32	31	30
Ville B	9	11	18	21	26	35	34		26	19	16	12

a. Sans aucun calcul, quel encadrement peut-on écrire concernant la moyenne des températures maximales relevées dans la ville A en 2003 ?

b. En détaillant tes calculs, donne, au dixième de degré le plus proche, la moyenne des températures maximales relevées dans la ville A durant l'année 2003.

c. Durant l'année 2003, la moyenne des températures maximales dans la ville B a été de 22°C exactement. Quelle a été la température maximale moyenne relevée dans la ville B en Août 2003 ?

d. L'une de ces villes est Carpentras (Vaucluse) et l'autre Le Lamentin (Martinique). Retrouve le nom de la ville A. Justifie brièvement.

e. Dans une troisième ville, les températures maximales les plus basses ont été de 5°C et les plus élevées de 31°C. Peut-on en déduire la moyenne des températures maximales dans cette ville au cours de l'année 2003 ? Si oui, quelle est-elle ? Justifie.

EXERCICE 2 : **/8 points** (1 + 2 + 2 + 2 + 1)

Voici les notes obtenues lors d'un contrôle sur 10 points par une classe de 4ème :

5	3	8	2	8	6	8	3	2	2	7	10	5	1	8	8	6	5	2	4	6	3	2	6	8	10

a. Sur ta copie, reproduis le tableau d'effectifs suivant. A la deuxième ligne, indique dans chaque cas le nombre d'élèves ayant obtenu la note correspondante.

Note :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif :											

b. Représente ces résultats dans un diagramme en barres.

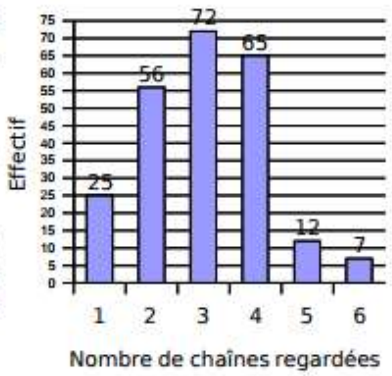
c. En utilisant uniquement le diagramme en barres ou le tableau d'effectifs, détermine en détaillant les calculs quelle a été la moyenne obtenue par l'ensemble de la classe.

d. A 1 % près, quel pourcentage des élèves a obtenu au moins 5 sur 10 lors de ce devoir ?

e. Lors d'un autre devoir, la moyenne obtenue par le groupe des filles a été de 5,6/10 et la moyenne obtenue par le groupe des garçons de 5,3/10. Peut-on en déduire la moyenne obtenue par la classe entière ? Si oui, quelle est-elle ? Justifie.

EXERCICE 3 : **/5 points** (1 + 2 + 2)

On a demandé à un groupe d'utilisateurs de la T.N.T (télé numérique terrestre) combien de chaînes différentes ils regardaient chaque jour. Leurs réponses sont représentées dans le diagramme ci-contre :



a. Quel est l'effectif total de ce groupe ?

b. Quelle est le nombre moyen de chaînes regardées chaque jour par les personnes de ce groupe ? Détaille tes calculs.

c. Plusieurs personnes n'ont pas répondu à cette question. Si on les comptabilisait en considérant qu'ils regardent 0 chaîne, le nombre moyen de chaînes regardées deviendrait 2,86 exactement. Combien de personnes se sont-elles abstenues de répondre ?

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 14

1. Calculer la moyenne, la déviation typique, le C.V., et la médiane de la distribution suivante :

   6 9 1 4 8 2 3 4 4 9

2. Calculer la moyenne, la déviation typique et le C.V. des distributions suivantes :

   a) Nombre de jours que les étudiants d'un cours ont passé à la bibliothèque de l'école

N e de jours	Effectif
0	6
1	7
2	8
3	5
4	2
5	2

   b) Le temps, en minutes, passé dans la salle d'attente par les patients d'un médecin un certain jour

Temps(min)	Effectif
De 1 a 9	4
De 9 a 17	5
De 17 a 25	8
De 25 a 33	7
De 33 a 41	4
De 41 a 49	2

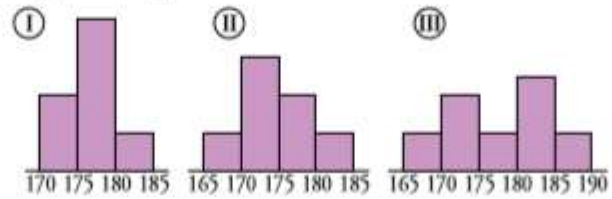
3. Les notes obtenues par les 30 élèves d'une classe de 3ºESO dans un quiz avec 5 questions sont :

   3 3 2 4 5
   3 2 4 4 3
   2 0 3 5 3

   4 1 3 3 2
   1 2 0 5 3
   3 5 2 1 4

   Calculer la médiane et les quartiles

4. Les tailles des composantes de trois équipes d'écoles de basketball, A, B et C, sont répartis comme suit:



   Les paramètres correspondant à chacune des équipes sont:

	A	B	C
$\bar{x}$	177,8	176,8	174,6
σ	6,4	3,2	4,5

   Décider, raisonnablement, quel graphique correspond à chaque équipe

3ºESO CHAPITRE 15 : HASARD ET PROBABILITÉ

1. ÉPREUVES ET ÉVÉNEMENTS

▪ Expériences aléatoires

Une **expérience** est dite **aléatoire** si ses résultats ne sont pas prévisibles avec certitude en fonction des conditions initiales, c'est-à-dire des expériences dans lesquelles, le hasard, intervient.

Lorsque les conditions de l'expérience entraînent un résultat unique, on parle d'expériences **déterministes.**

Toutefois, on parle généralement d'expérience lorsqu'on peut la réaliser à volonté, sinon on parle d'**épreuve.**

On appelle **épreuve** la réalisation d'une expérience aléatoire.

▪ Événements

On appelle **événement** chaque possible résultat d'une épreuve aléatoire. Si l'événement est constitué d'un seul élément, on parle alors de **l'événement élémentaire ou éventualité**. L'ensemble de tous les résultats possibles sera appelé l'**univers des possibles**.

En général, un événement est un sous-ensemble de l'univers.

L'univers Ω ou E est un événement, appelé événement certain.

L'ensemble vide Ø est un événement, appelé événement impossible.

Exemple : Nous disposons 52 cartes et deux jokers sur une table et nous tirons une seule carte. Tirer une carte individuelle dans l'univers des 54 cartes, représente un événement élémentaire. Mais les sous-ensembles (y compris les événements élémentaires) sont simplement appelés des « événements ». Des événements de cet univers peuvent être :

- *« obtenir un roi » ensemble constitué des 4 rois (union de 4 évènements élémentaires),*
- *« obtenir une carte de cœur » (ensemble de 13 cartes)*
- *« obtenir une figure » (ensemble de 12 cartes).*

Événement composé : événement résultant de la réunion ou de l'intersection de plusieurs événements.

2. PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

Lorsque l'univers lié à l'expérience aléatoire comporte un nombre déterminé d'éventualités, on affecte à chaque éventualité une probabilité d'apparition. Il s'agit d'un nombre compris entre 0 et 1. Ces probabilités doivent cependant vérifier une unique contrainte : leur somme doit être égale à 1.
La probabilité d'un événement est alors définie comme la somme des probabilités des éventualités qui composent cet événement.
Soit A un événement ; on note la probabilité de A : P(A)

PROBABILITÉS D'ÉVENTUALITÉS

La **loi des grands nombres** indique que lorsqu'on augmente le nombre de fois qu'on réalise une épreuve, la fréquence d'un événement converge vers sa probabilité.

C'est le concept statistique de probabilité et il permet de calculer les probabilités d'une épreuve où les événements ne sont pas équiprobables.

3. RÈGLE DE LAPLACE

Les éventualités sont équiprobables si elles ont la même probabilité d'être réalisées dans une épreuve.
Si on estime que toutes les éventualités sont équiprobables, chaque éventualité a une probabilité d'apparition de

$$P(\text{éventualité}) = \frac{1}{nombre\ \ d'éléments\ \ dans\ \ E}$$

La probabilité de l'événement A est alors donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

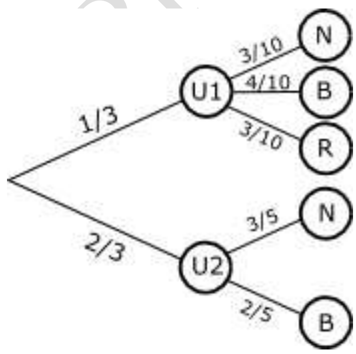
Exemple

On lance un dé.
L'univers est E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. → Cas possibles = 6
Soit l'événement
A =« on obtient au plus 3 en lançant le dé »= {1 ; 2 ; 3} → Cas favorables = 3
Alors $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

PROBABILITÉS SUR ÉVÉNEMENTS COMPOSÉS .Diagramme d'arbre

Un **arbre de probabilité** est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire.

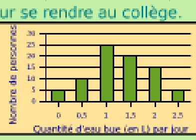
EXEMPLE:
Une urne U_1 *contient 3 boules noires, 4 boules blanches et 3 boules rouges. Une autre urne* U_2 *contient 3 boules noires et 2 boules blanches. La probabilité de choisir la* U_1 *est 1 sur 3, et la probabilité de choisir la* U_2 *est 2 sur 3. Fait un diagramme en arbre et calcule leurs probabilités.*



U_1N
U_1B
U_1R

U_2N
U_2B

Coche les bonnes réponses :

		R1	R2	R3	R4
1	Malik a obtenu 7 ; 12 ; 15 ; 8 et 6 en Mathématiques ce trimestre.	La moyenne et la médiane sont égales	L'étendue est 9	La moyenne de Malik est 10	40 % des notes de Malik sont au-dessus de la moyenne
2	On augmente d'un point toutes les notes de Malik.	Malik aura la moyenne ce trimestre	L'étendue augmente de 1	La moyenne et la médiane sont égales	Le premier quartile augmente de 1
3	Temps (h) 0 0,5 1 1,5 2 Effectif 2 47 56 82 26 Ce tableau présente le temps de transport des élèves par jour pour se rendre au collège.	Le temps médian est 1 h	25 % des élèves ont moins d'une heure de transport	La médiane est supérieure à la moyenne	L'étendue est égale à 24
4		Une médiane de cette série est 1,25	Trois quarts des personnes interrogées boivent moins de 2 L d'eau par jour	L'étendue de cette série est 20	La quantité moyenne d'eau bue par jour est supérieure à 1 L
5	On jette un dé cubique non truqué. La probabilité d'obtenir...	un nombre pair est 0,5	un multiple de 3 est 0,3	7 est 1	6 est $\frac{1}{6}$
6	Stéphane a lancé une pièce de monnaie et a obtenu pile. Au prochain lancer...	on ne peut pas savoir ce qu'il va obtenir	il obtiendra forcément face	il a une chance sur deux d'obtenir face	la probabilité d'obtenir face est supérieure à 0,5
7	Léa et Léo jouent à pile ou face. Léa dit : « Face tu perds, pile je gagne ». Quelle est la probabilité que Léa gagne ?	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{3}$

EXERCICE 1 : **/6 points**

Dans une bibliothèque, on a relevé le nombre de livres prêtés par mois durant l'année 2007.

Mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Nombre de livres prêtés	1 124	1 236	1 146	1 136	1 086	987	840	620	1 027	1 220	1 128	994

a. Calcule le nombre total de livres prêtés en 2007.

b. Calcule le nombre moyen de livres prêtés par mois durant cette année.

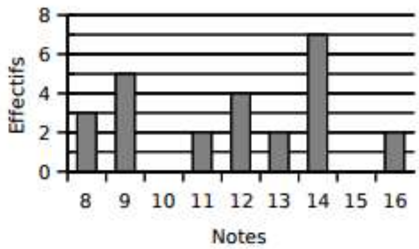
c. Détermine une médiane de cette série statistique.
Donne une interprétation de la valeur obtenue.

d. Détermine les valeurs des premier et troisième quartiles de cette série statistique.
Donne une interprétation des valeurs obtenues.

e. Détermine l'étendue de cette série statistique.

EXERCICE 2 : **/4 points**

Le diagramme en barres donne les résultats obtenus à un contrôle de mathématiques par les élèves d'une classe.



a. Calcule la moyenne de la classe à ce contrôle.

b. Détermine une note médiane.

c. Détermine les valeurs des premier et troisième quartiles de cette série de notes.

EXERCICE 3 : **/2 points**

On lance un dé à six faces équilibré.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?

EXERCICE 4 : **/4 points**

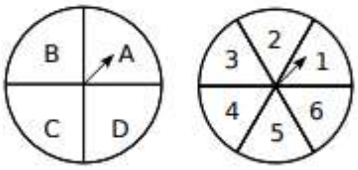
Une urne contient trois boules rouges, quatre boules noires et deux boules jaunes indiscernables au toucher.
On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur ?

EXERCICE 5 : **/4 points**

Dans un jeu, on doit tourner deux roues. La première roue donne une lettre : A, B, C ou D avec la même probabilité. La deuxième roue donne un chiffre entre 1 et 6 avec la même probabilité.
Si, après avoir tourné les roues, les aiguilles se trouvent comme sur le schéma, on note (A, 1) le résultat obtenu.



a. Quelle est la probabilité du résultat (B, 2) ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir C et un chiffre impair ?