

## CHAPITRE 2 : POLYNÔMES ET FRACTIONS ALGÈBRIQUES

### 1. DIVISION DE POLYNÔMES POLYNÔMES

C'est une expression littérale avec plus d'un **terme**. On doit écrire avec le moins de termes possible.

Le **degré du polynôme**, c'est le plus grand des degrés des termes.

Le terme indépendant, c'est le monôme de degré zéro.

#### La valeur d'un polynôme

La valeur d'un polynôme, c'est le résultat qu'on obtient en remplaçant les lettres ou variables par des nombres déterminés et en faisant après les opérations.

#### Addition, soustraction et multiplication de polynômes

- Pour additionner ou soustraire polynômes, on additionne ou on soustrait les termes semblables.
- Pour multiplier deux polynômes on multiplie chaque monôme d'un polynôme par tous les monômes de l'autre polynôme, puis on réduit les termes semblables.

#### Division de polynômes

Soient  $A(x)$  et  $B(x)$  deux polynômes, avec  $B(x)$  non nul, il existe des polynômes  $Q(x)$  et  $R(x)$ , tels que

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \text{ et } \text{degré de } R(x) < \text{degré } B(x)$$

Un même algorithme s'applique à la division euclidienne de polynômes.

**Exemple** : division de  $x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6$  par  $x^2 + 3x + 1$

**Étape 1** : division de  $x^4 - x^3 + x^2$  par  $x^2 + 3x + 1$  (quotient  $x^2$ , reste  $-4x^3$ )

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 & x^2 + 3x + 1 \\ -x^4 - 3x^3 - x^2 & x^2 \\ \hline & -4x^3 \end{array}$$

**Étape 2** : division de  $-4x^3 - x$  par  $x^2 + 3x + 1$  (quotient  $-4x$ , reste  $12x^2 + 3x$ )

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 & x^2 + 3x + 1 \\ -x^4 - 3x^3 - x^2 & x^2 - 4x \\ \hline & -4x^3 - 4x \\ & +4x^3 + 12x^2 + 4x \\ \hline & +12x^2 \end{array}$$

## CHAPITRE 2 : POLYNÔMES ET FRACTIONS ALGÈBRIQUES

**Étape 3** : division de  $12x^2 - 3x + 8$  par  $x^2 + 3x + 1$  (quotient  $12$ , reste  $-33x - 4$ )

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 & x^2 + 3x + 1 \\
 -x^4 - 3x^3 - x^2 & x^2 - 4x + 12 \\
 \hline
 -4x^3 - 4x & \\
 +4x^3 + 12x^2 + 4x & \\
 \hline
 +12x^2 + 6 & \\
 -12x^2 - 36x - 12 & \\
 \hline
 -36x - 6 & 
 \end{array}$$

**Conclusion** :  $x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 4x + 12) + (-36x - 6)$

### 2. RÉGLE DE RUFFINI

La règle de Ruffini c'est un procédé pour diviser polynômes quand le diviseur est de la façon  $(x-a)$ , où  $a$  est un entier relatif.

	5	-3	2	-7	3	
a-----> 1		5	2	4	-3	
	5	2	4	-3	0	← Reste
Quotient	$5x^3$	$+2x^2$	$+4x$	$-3$		

### THÉOREME DU RESTE

La valeur d'un polynôme  $P(x)$ , pour  $x=a$ , c'est égal au reste de la division

$P(x) : (x-a)$ .

C'est-à-dire,  $P(a)=R$ , où  $R$  est le reste de la division  $P(x) : (x-a)$ .

### RACINES D'UN POLYNÔME

Un nombre  $a$  est racine d'un polynôme  $P(x)$  si on vérifie  $P(a)=0$ .

## CHAPITRE 2 : POLYNÔMES ET FRACTIONS ALGÈBRIQUES

### PUISSANCES D'UN POLYNÔME

La puissance d'un polynôme,  $P(x)^n$ , est une façon d'écrire le produit d'un polynôme  $n$  fois :

$$P(x)^n = \underbrace{P(x) \cdot P(x) \cdot \dots \cdot P(x)}_{n \text{ fois}}$$

Puissance d'un binôme (polynôme avec deux termes)

$$\begin{aligned} (a + b) & \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3a b^2 + b^3 \end{aligned}$$

### 3. FACTORISATION DE POLYNÔMES

Factoriser un polynôme c'est l'écrire comme produit de polynômes avec le plus petit degré possible.

Pour factoriser polynômes on utilise techniques comme : La mise en évidence, les identités remarquables et la règle de Ruffini.

### 4. DIVISEURS D'UN POLYNÔME

Si un polynôme on peut exprimer comme produit de deux polynômes, on dit que ces sont facteurs ou diviseurs du polynôme.

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) \rightarrow Q(x) \text{ et } R(x) \text{ sont facteurs ou diviseurs de } P(x).$$

### 5. FRACTIONS ALGÈBRIQUES

Une fraction algébrique est une expression algébrique de la forme  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , où  $P(x)$  est un polynôme et où  $Q(x)$  est un polynôme non nul.

Deux fractions algébriques sont **équivalentes** si on vérifie :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \rightarrow P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$$

#### 5.1. SIMPLIFIER FRACTIONS ALGÈBRIQUES

Pour simplifier (où réduire) une fraction rationnelle, on procède comme suit:

- On factorise le numérateur et le dénominateur.
- On divise le numérateur et le dénominateur par le facteur commun.

## CHAPITRE 2 : POLYNÔMES ET FRACTIONS ALGÈBRIQUES

### 5.2. OPÉRATIONS AVEC FRACTIONS ALGÈBRIQUES

Pour **additionner** ou **soustraire** fractions algébriques avec le même dénominateur, on additionne ou on soustrait les numérateurs et on laisse le même dénominateur.

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on réduit au même dénominateur en calculant le plus petit commun multiple.

Le **produit** de **fractions algébriques** est une autre fraction algébrique qui a pour numérateur le produit des numérateurs, et pour dénominateur le produit des dénominateurs.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

Pour **diviser** deux fractions algébriques on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$