4ºESO	CHAPITRE 3 : ÉQUATIONS, INÉQUATIONS et SYSTÈMES

1. ÉQUATIONS

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Équation du second degré encore appelée **équation quadratique**

Ce sont les équations qui, après transformations, se présentent sous la forme suivante

$ax^2+bx+c=0$, dans laquelle **a, b et c** sont des nombres connus et ***x*** l'inconnue.

- **Équations complètes.** Si $b\neq 0$ $et\ c\neq 0$, on dit que l'équation est complète et les solutions sont données par la formule suivante :

  $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Complète	$ax^2+bx+c=0$ $a,b,c\neq 0$	$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Nombre de solutions :

Discriminant $\Delta = b^2-4ac$

Selon le signe du discriminant, l'équation peut avoir une solution double, deux solutions différentes ou aucune solution.

Discriminant	Nombre de solutions
$\Delta>0$	2
$\Delta=0$	1 solution double
$\Delta<0$	Pas de solution

- **Équations incomplètes.** Si b=0 ou c=o, l'équation est appelée incomplète et on peut résoudre sans la formule antérieure.

	Équation	Solutions
Incomplète	$ax^2+bx=0$ $a,b\neq 0$	$x(ax+b)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-\frac{b}{a}\end{cases}$

Incomplète	$ax^2+c=0$ $a,c\neq 0$	$x=+\sqrt{-\frac{c}{a}}\,;\,x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

http://www.cmath.fr/2nde/equations/exercices.php
http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/equationproduit/resoudre1.htm#2

Équations bicarrés.

Ce sont les équations qui après transformations, se ramènent à la forme $ax^4+bx^2+c=0$, dans laquelle a, b et c sont des nombres connus et x l'inconnue. Une équation bicarré est de degré égal à 4 et n'a pas de termes de degré 3 et 1.

Pour résoudre des équations bicarrés on doit faire un change de variable, ont obtient une équation du second degré :

$ax^4+bx^2+c=0$, change $x^2=z$, alors $x^4=z^2$

L'équation serait : $az^2+bz+c=0$

On cherchent les solutions de cet équation et après on défait le change pour chaque valeur positive de z

$x=\pm\sqrt{z}$

Équations avec fractions algébriques

Pour résoudre ce type d'équations il faut qu'il n'y ait plus aucun dénominateur, alors on multiplie les deux membres de l'équation donnée par le PPCM et après on résout l'équation obtenue.

Il est très important **faire la preuve des solutions** obtenues à l'équation première

$$\frac{6}{x+2}+\frac{7}{x+3}=2$$

PPCM

$$(6)(x+3)+(7)(x+2)=2(x+2)(x+3)$$

$$(6x+18)+(7x+14)=(2x^2+10x+12)$$

$$13x+32=2x^2+10x+12$$

$$-2x^2+3x+20=0$$

On résout

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{-4}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{-4}=\frac{-3\pm 13}{-4}=\begin{cases}\frac{10}{-4}=\frac{-5}{2}\\ \frac{-16}{-4}=4\end{cases}$$

Équations avec radicaux

Ce sont des équations où l'inconnue est dans un radical. Pour résoudre ces équations on laisse seule la racine dans un des membres et après on fait la puissance 2 de toute l'équation.

Il est très important **faire la preuve des solutions** obtenues à l'équation première

$$8x - \sqrt{2+2x} = -3$$

1-On laisse seule la racine

2-On fait la puissance 2

$$-\sqrt{2+2x} = -3-8x$$

$$(-\sqrt{2+2x})^2 = (-3-8x)^2$$

3- On résout

$$2+2x = 64x^2+48x+9$$

$$0 = 64x^2+46x+7$$

$$x = \frac{-46\pm\sqrt{2116-(1792)}}{128} = \frac{-46\pm\sqrt{324}}{128} = \frac{-46\pm 18}{128} = \left[\begin{array}{l} \frac{-28}{128} = \frac{-7}{32} \\ \frac{-64}{128} = \frac{-1}{2} \end{array}\right.$$

4- Il faut faire la preuve des solutions à l'équation première

Si $x = \frac{-7}{32} \Rightarrow \frac{-96}{32} = -3$ Alors -7/32,il est solution

Si $x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{-10}{2} \neq -3 \Rightarrow$ Alors, -1/2 il n'est pas solution

Équation exponentielle

Une équation qui comporte un terme où la variable indépendante apparaît comme exposant d'un nombre réel est nommée **équation exponentielle**.

Il est important de garder en tête que $a^x = a^y$ si et seulement si $x = y$. Donc, lorsque nous avons deux expressions qui sont égales et qu'elles ont la même base, alors les exposants sont égaux.

Équation logarithmique

Une équation dans laquelle la variable apparaît uniquement dans une expression logarithmique est appelée à une **équation logarithmique**.

Afin de résoudre une équation logarithmique, il faut être à l'aise avec les diverses propriétés des logarithmes. De plus, il sera très important de toujours indiquer les restrictions relatives aux arguments des divers logarithmes apparaissant dans une équation logarithmique.

Équations du type (ax+b)·(cx+d) ·…=0

Appliquer : le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

$$(ax+b)\cdot(cx+d)=0 \quad \rightarrow \quad ax+b=0 \quad \text{ou} \quad cx+d=0$$

2. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINEAIRES

Un **<u>système de deux équations linéaires</u>** à deux inconnues est un ensemble d'équations

$$ax + by = c$$
$$a'x+b'y=c'$$

a,b,c,a',b',c' sont des réels
x, y sont deux inconnues

Résoudre ce système c'est trouver tous les couples de valeurs (x,y) pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément. C'est donc trouver toutes les solutions communes aux équations.

MÉTHODES PAR LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES

- **Résolution par la méthode de substitution.**

On calcule, dans l'une des équations, une des inconnues en fonction de l'autre, et on porte la valeur trouvée dans l'autre équation

- **Résolution par la méthode de comparaison**

Pour résoudre il faut isoler la même variable des deux équations et égaler les résultats pour trouver l'ensemble solution

- **Résolution par la méthode de combinaisons**

On multiplie les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de sorte qu'en additionnant membre à membre les équations obtenues, l'une des inconnues disparaisse. Une telle méthode est aussi appelée méthode d'addition.

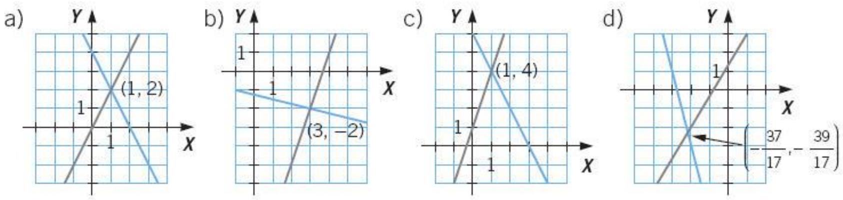
- **Interprétation graphique**

On calcule y en fonction de x dans chacune des équations ; on obtient deux fonctions affines ; dans un repère orthogonal, on construit les droites représentatives de ces fonctions. Le couple de coordonnées du point d'intersection est la solution graphique du système.

Exemples

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 3x - y &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + 4y &= -5 \\ 3x - y &= 11 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} 5x - 3y &= -4 \\ 4x + y &= -11 \end{aligned}\right\}$



3. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINEAIRES

Ces sont des systèmes où il y a une ou plusieurs équations non linéaires (du degré plus grand que 1, avec des fractions algébriques, avec des radicaux…)
Il est très important **faire la preuve des solutions** obtenues au première système.

Exemples

$$\text{a)}\quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y-3} &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 4y + 4x &= -xy \\ y - 3 - x - 3 &= -(x+3)\cdot(y-3) \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow - \left.\begin{aligned} 4x + 4y + xy &= 0 \\ -4x + 4y + xy &= 15 \end{aligned}\right\}$$
$$\overline{\qquad 8x = -15 \qquad}$$

$$8x = -15 \rightarrow x = \frac{-15}{8}$$

$$4x + 4y + xy = 0 \xrightarrow{x = \frac{-15}{8}} \frac{-60}{8} + 4y - \frac{15y}{8} = 0$$

$$\rightarrow -60 + 32y - 15y = 0 \rightarrow y = \frac{60}{17}$$

b) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+y=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{2}{y}-3x=-5\end{array}\right]\left.\begin{array}{l}2+2xy=5x\\ 2-3xy=-5y\end{array}\right]\rightarrow y=\dfrac{5x-2}{2x}$

$$2-3xy=-5y\xrightarrow{y=\frac{5x-2}{2x}}2-\frac{15x+6}{2}=\frac{-25x+10}{2x}$$
$$\rightarrow 10x-15x^2=-25x+10$$

$$15x^2-35x+10=0\rightarrow 3x^2-7x+2=0\rightarrow\begin{cases}x_1=2\longrightarrow y_1=2\\ x_2=\dfrac{1}{3}\rightarrow y_2=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$$

4. INÉQUATIONS

Une inéquation est formée de deux membres séparés par l'un des signes <, >,≤ ,≥. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui la vérifient. Ces valeurs sont les solutions de l'inéquation. Elles forment souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles.

a<b se lit : a plus petit que b ou a inférieur à b
a>b se lit : a plus grand que b ou a supérieur à b
a$\leq b$ se lit : a plus petit ou égal à b ou a inférieur ou égal à b
a$\geq b$ se lit : a plus grand ou égal à b ou a supérieur ou égal à b

- **PROPRIÉTÉS des inéquations**

Pour résoudre une inéquation, on transforme son écriture. On peut :

- Ajouter une même somme algébrique aux deux membres
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement positif en conservant le sens de l'inéquation
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inéquation.

Inéquations à une inconnue

Pour résoudre une inéquation à une inconnue, on transforme son écriture et on laisse l'expression algébrique dans un membre et un zéro dans l'autre. Après on la résout comme une équation et la solution est un intervalle ou une réunion d'intervalles

http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/inequation/inequation01.html#2
http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/inequation/inequation04.html#2
http://www.cmath.fr/2nde/tableauxdesignes/exercice1.php

http://www.cmath.fr/2nde/tableauxdesignes/videos.php

SYSTÈMES D'INÉQUATIONS

C'est un ensemble d'inéquations dont le but est de calculer une solution commune.

Exemples

a) $$\left.\begin{array}{l} 5-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}>\frac{x-5}{6} \\ \frac{x+4}{5}-\frac{x}{6}>\frac{7}{10} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 60-4x-3x>2x-10 \\ 6x+24-5x>21 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x<\frac{70}{9} \\ x>-3 \end{array}\right\}$$

Solution$\left(-3,\frac{70}{9}\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l} 5x-2\le 0 \\ 3x+4>0 \\ \frac{x+9}{2}\ge 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x\le\frac{2}{5} \\ x>\frac{-4}{3} \\ x\ge -3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{-4}{3}<x\le\frac{2}{5}$$

Solution $\left(\frac{-4}{3},\frac{2}{5}\right]$