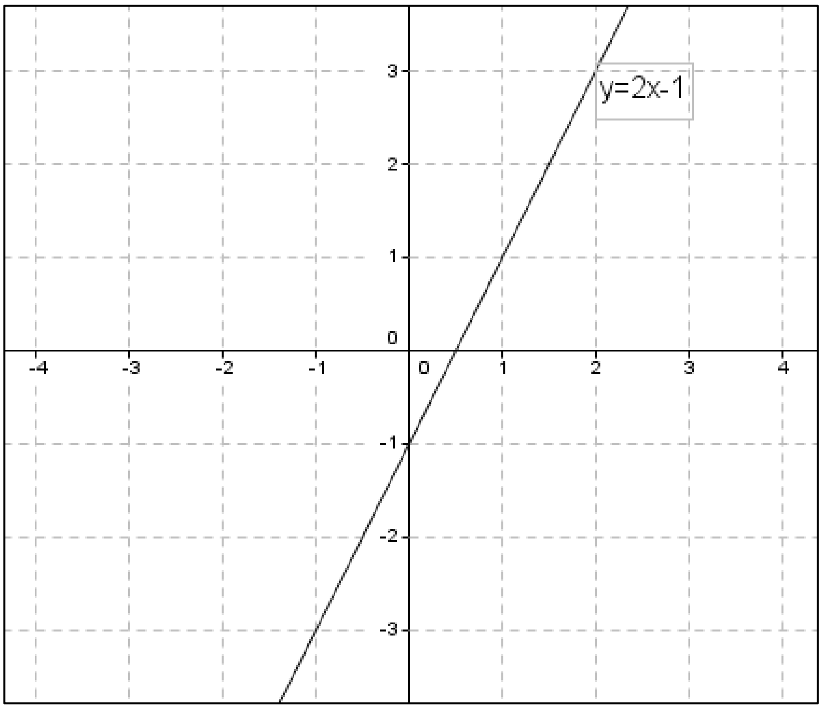
CHAPITRE 8 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

1. ÉQUATIONS LINÉAIRES

Une équation linéaire à deux inconnues est l'ensemble des points (x,y) du plan vérifiant ax+by=c.
a,b,c sont des réels
x, y sont deux inconnues
Une **solution** de l'équation linéaire à deux inconnues est une paire de valeurs (une pour chaque inconnue) qui rendent vraie l'égalité.
Une équation linéaire à deux inconnues a une infinité de solutions.

- **Représentation graphique**

L'équation linéaire à deux inconnues ax+by=c c'est une droite. L'expression ax+by=c ; est l'équation d'une droite.
Les points (m,n) sont des solutions de l'équation ; c'est-à-dire x= m, y=n .
Exemple :



2. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est un ensemble d'équations
ax + by =c
a'x+b'y=c'
Résoudre ce système c'est trouver tous les couples de valeurs (x,y) pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément. C'est donc trouver toutes les solutions communes aux équations.

- **SYSTÈMES ÉQUIVALENTES**

Deux systèmes d'équations sont équivalents s'ils ont la même solution.

3. MÉTHODES POUR LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES

- **Résolution par la méthode de substitution**.
  On calcule, dans l'une des équations, une des inconnues en fonction de l'autre, et on porte la valeur trouvée dans l'autre équation.

Première méthode (substitution)

1. On isole l'une des deux inconnues (x ou y) $\begin{cases} 2x+\boxed{y=}2{,}1 \\ x+3y=3{,}05 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y=2{,}1-2x \\ x+3y=3{,}05 \end{cases}$ On va la remplacer dans l'autre équation
3. $\begin{cases} y=2{,}1-2x \\ x+3\times(2{,}1-2x)=3{,}05 \end{cases}$ On a remplacé y
4. Calcul. On développe. $\begin{cases} y=2{,}1-2x \\ x+6{,}3-6x=3{,}05 \end{cases}$
5. On va pouvoir trouver x. $\begin{cases} y=2{,}1-2x \\ x-6x=3{,}05-6{,}3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y=2{,}1-2x \\ -5x=-3{,}25 \end{cases}$ Equation à une inconnue.
7. $\begin{cases} y=2{,}1-2x \\ x=-3{,}25\div(-5) \end{cases}$ Calcul.
8. On va remplacer x dans la première équation. $\begin{cases} y=2{,}1-2x \\ x=0{,}65 \end{cases}$
9. $\begin{cases} y=2{,}1-2\times0{,}65 \\ x=0{,}65 \end{cases}$ On effectue un dernier calcul.
10. On obtient les deux solutions du système. $\begin{cases} y=0{,}8 \\ x=0{,}65 \end{cases}$

http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/systeme/substitution1.html#3
http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/systeme/substitution2.html#3

- **Résolution par la méthode de comparaison**
  Exprimer y en fonction de x ou x en fonction de y dans la première et la deuxième équation. Comme les deux expressions sont égales et on se ramène à une équation avec une inconnue, on résout. On peut calculer l'autre inconnue avec l'une des deux expressions.

- **Résolution par la méthode de combinaisons**
  On multiplie les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de sorte qu'en additionnant membre à membre les équations obtenues, l'une des inconnues disparaisse. Une telle méthode est aussi appelée méthode d'addition.

Deuxième méthode (combinaisons linéaires)

On se débrouille pour avoir les mêmes coefficients devant x dans les deux équations puis on soustrait les deux équations : il n'y aura plus de x dans l'équation obtenue et on pourra calculer y.

1. $\begin{cases} 2x + y = 2{,}1 \\ x + 3y = 3{,}05 \; \times 2 \end{cases}$ On mutliplie par 2 tous les termes de la 2ème équation

2. $\begin{cases} \boxed{2}x + y = 2{,}1 \\ \boxed{2}x + 6y = 6{,}1 \end{cases}$ On obtient les mêmes coefficients devant x

3. On tire un trait sous le système et on soustrait les deux équations $\begin{cases} 2x + y = 2{,}1 \\ 2x + 6y = 6{,}1 \end{cases}$ $\ominus$
$0x - 5y = -4$

4. $y = \dfrac{-4}{-5} = 0{,}8$ On en déduit la valeur de y.

5. Et enfin celle de x.

$$2x + y = 2{,}1$$
$$2x + 0{,}8 = 2{,}1$$
$$2x = 2{,}1 - 0{,}8$$
$$2x = 1{,}3$$
$$x = 1{,}3 \div 2$$
$$x = 0{,}65$$

- **Interprétation graphique**

On calcule y en fonction de x dans chacune des équations ; on obtient deux fonctions affines ; dans un repère orthogonal, on construit les droites représentatives de ces fonctions. Le couple de coordonnées du point d'intersection est la solution graphique du système.
http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/systeme/approche.html#3

4. RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AVEC SYSTÈMES

Pour résoudre un problème avec un système d'équations, il faut traduire un texte en langage algébrique (un système d'équations du premier degré à deux inconnues …), et après on doit trouver la solution.

http://www.cmath.fr/3eme/systemes/cours.php
http://www.cmath.fr/3eme/systemes/exercices.php
http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/systeme/systeme1.htm
http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/systeme/douche.htm#3
http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/systeme/astucieux.htm#3

PROBLÈMES de SYSTÈMES d'ÉQUATIONS

1. L'addition de deux nombres donne 57, et la différence est égale à 9. Quels sont ces nombres ?

2. Didier et Marine portent un total de 15 €. S'il le donnait 1,5 €, elle aurait le double de ce qu'il aurait. Combien porte chacun des deux ?

3. Une tige de bambou à 4,80 m hauteur est rompue par le vent, et l'extrémité supérieure, qui maintenant vise le sol, reste à une hauteur de 60 cm du sol. À quelle hauteur a été rompue la tige ?

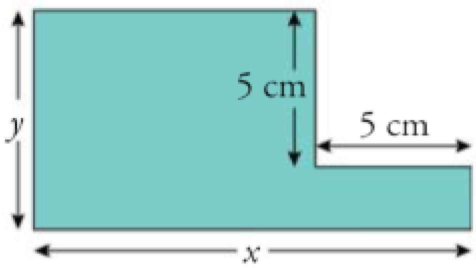
4. Un hôtel plein accueillit un total de 62 clients dans 35 chambres, simples et doubles. Il y a combien de chaque type ?

5. Le marchand de fruits met en vente 80 kg de cerises. Après quelques jours, il a vendu la plupart, mais il considère que le reste n'est pas en conditions acceptables pour la vente, et il les retire. Si pour chaque kg vendu il a gagné 1 €, et pour chaque kg retiré il a perdu 2 €, et le profit final a été 56 €, combien de kg a-t-il vendu et retiré ?

6. Au zoo, entre buffles et autruches il y a 12 têtes et 34 pattes. Il y a combien de chaque animal ?

7. *Le problème classique des âges:* L'âge de Christine est le triple de celle de son frère Richard, mais en dix ans il ne sera que le double. Quelle est l'âge de chacun ?

8. Calcule la longitude des côtés du polygone à droite, si l'on sait que le périmètre mesure 42 cm et l'aire 73 cm^2 :



9. Nous avons de l'huile d'olive vierge, à 3,00 €/L, et de l'huile de tourteau d'olive, à 2,00 €/L. Quelle quantité de chacun doit on utiliser pour obtenir 600 L de mélange à 2,40 €/L ?

10. La distance entre Villagarcía et Ponferrada est de 270 km. À un certain moment, une voiture départ de Villa à Ponferrada à 110 km/h, et un camion de Ponferrada à Villa à 70 km/h en même temps. Quelle distance parcourt chacun jusqu'au moment où ils se trouvent ?