

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

En busca de Klingsor

Cierta vez, un reportero preguntó a Einstein:

–¿Existe una fórmula para obtener éxito en la vida?

–Sí, la hay.

–¿Cuál es? –preguntó el reportero, insistente.

–Si A representa al éxito, diría que la fórmula es $A = x + y + z$, en donde x es el trabajo e y la suerte –explicó Einstein.

–¿Y qué sería la z ?

Einstein sonrió antes de responder:

–Mantener la boca cerrada.

Un joven norteamericano, Bacon, estudia Física en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y allí conoce a Einstein, del que recuerda algunas anécdotas como esta. Al finalizar la Segunda Guerra Mundial, se hace espía y viaja a Alemania para encontrar al máximo responsable de las investigaciones atómicas realizadas por los nazis, que se esconde bajo el seudónimo de Klingsor. En sus pesquisas le ayuda un matemático, de nombre Links, que formó parte del equipo de investigación nuclear.

¿Por qué estábamos juntos el teniente Bacon y yo [pensaba Links]?

¿Cuándo nos encontramos por primera vez? ¿Cuál era nuestra misión?

¿Cómo se cruzaron, en fin, nuestras vidas paralelas? Para responder a estos cuestionamientos no me queda más remedio que hablar un poco de mí.

Ubico mi nacimiento en el mapa de mi imaginación como un pequeño punto dibujado en el centro de un plano cartesiano. Hacia arriba, en el eje de las y , está todo lo positivo que me ha ocurrido; en contraposición, hacia abajo descubro mis desventuras, mis retrocesos y mis requiebros. A la derecha, en el eje de las x , encuentro los actos que me definen, aquellos que voluntariamente he convertido en el centro de mi vida –deseos, anhelos, obsesiones–, mientras que, a la izquierda, yacen esas porciones de mi ser que me han modelado contra mi voluntad o mi conciencia, esas partes aparentemente impredecibles o espontáneas que, no puedo negarlo, también me han llevado adonde estoy ahora. ¿Cuál sería el resultado final de un ejercicio como éste? ¿Qué forma aparecería en medio de la hoja? ¿Sería posible trazar las coordenadas que he recorrido a lo largo de mi trayecto? ¿Y obtener, a partir de esa línea, la fórmula que me resuma en cuerpo y alma?

JORGE VOLPI

Juzga la metáfora de Links. ¿Sería posible representar una «vida» mediante una curva en un sistema de coordenadas cartesianas?

No sería posible, ya que los elementos que se describen en el texto no son traducibles a puntos del plano que puedan describir una curva.

ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

001 Dada la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$:

a) ¿Está definida para $x = \frac{\pi}{2}$? b) ¿Y para $x = \frac{3\pi}{2}$?

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \log 1 = 0 \rightarrow$ La función está definida para $x = \frac{\pi}{2}$.

b) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \log\left(\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right) = \log(-1) \rightarrow$ La función no está definida para $x = \frac{3\pi}{2}$, porque no existe el logaritmo de -1 .

002 Expresa las siguientes condiciones en forma de intervalo.

a) $-1 \leq x < 5$ b) $x \geq 7$ c) $x \leq -2$ d) Todos los números reales.

a) $[-1, 5)$ b) $[7, +\infty)$ c) $(-\infty, -2]$ d) $(-\infty, +\infty)$

003 Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.

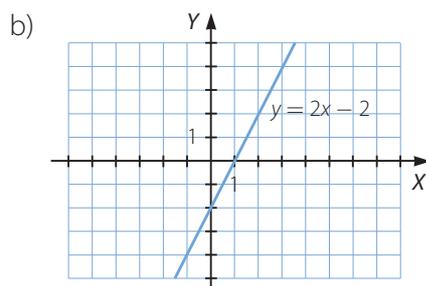
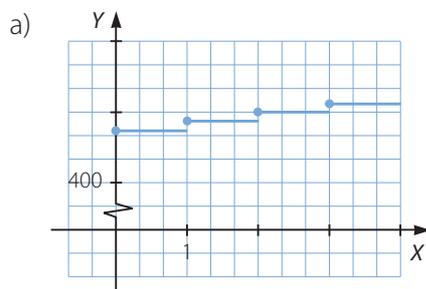
$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-16	-3	0	-1	0

004 Dibuja estas funciones e indica de qué tipo son.

a) Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 480 €, y por cada mueble que vende, cobra 10 € de comisión.

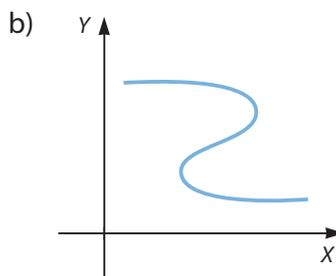
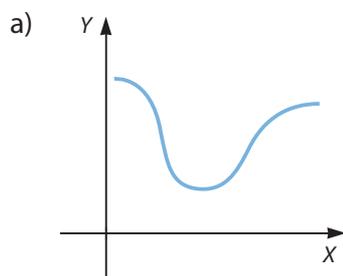
b) A cada número real le hacemos corresponder su doble menos 2.



Funciones

ACTIVIDADES

001 Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.



- a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .
- b) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y .

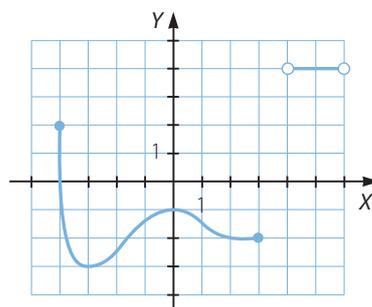
002 Razona, en cada caso, si la relación entre las magnitudes es una función o no.

- a) La distancia entre dos ciudades y el tiempo que se tarda en ir de una a otra.
- b) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilogramos, y el precio por kilogramo.
- c) La altura de los alumnos de un centro escolar y su edad.
 - a) No se trata de una función, ya que según sea la distancia entre dos ciudades, el tiempo que se tarda puede tomar valores distintos, dependiendo de la velocidad a la que se circule.
 - b) Es una función, puesto que para cada cantidad de fruta que se compre hay un precio único según el peso por kilogramo adquirido.
 - c) No se trata de una función, porque distintos alumnos pueden tener la misma altura, aún siendo de edades distintas.

003 Determina el dominio y el recorrido de esta función.

$$\text{Dom } f = [-4, 3] \cup (4, 6)$$

$$\text{Im } f = [-3, 2] \cup \{4\}$$



004 ¿Cuál es el dominio de estas funciones?

a) $f(x) = \sqrt{x+4}$

b) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-16}$

c) $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 9x$

d) $f(x) = \cos x$

a) $\text{Dom } f = [-4, +\infty)$

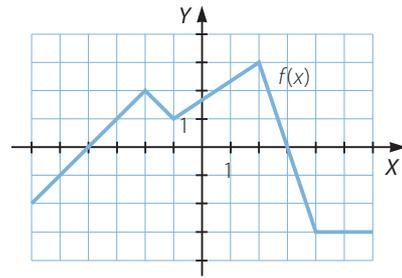
b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

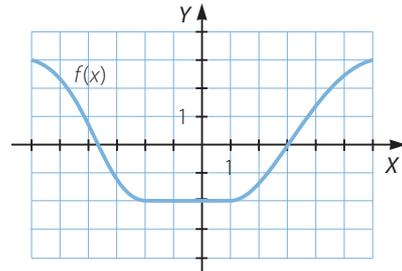
005 ¿En qué intervalos es creciente esta función?
¿Y decreciente? En $x = 2$, ¿es cóncava o convexa?

La función es creciente en $(-6, -2) \cup (-1, 2)$.
La función es decreciente en $(-2, -1) \cup (2, 4)$.
En $x = 2$, la función no es ni cóncava ni convexa.



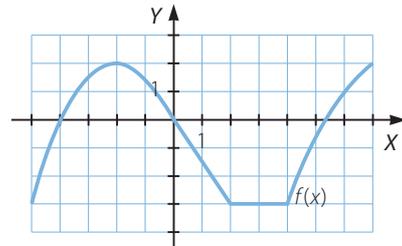
006 Estudia el crecimiento de la función.

La función es decreciente en $(-\infty, -2)$, es constante en $(-2, 1)$ y es creciente en $(1, +\infty)$.



007 ¿En qué puntos de la función hay máximos relativos? ¿Y mínimos relativos? ¿Tiene máximos o mínimos absolutos?

Existe un máximo relativo en el punto $x = -2$.
No tiene mínimos relativos ni absolutos y no hay máximos absolutos.



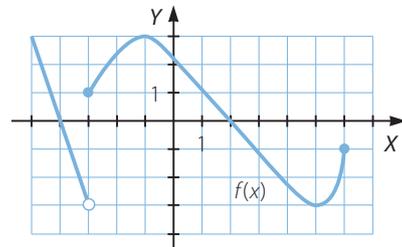
008 Estudia el dominio, el recorrido, el crecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.

$\text{Dom } f = (-\infty, 6]$

$\text{Im } f = [-3, +\infty)$

La función es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 5)$ y es creciente en $(-3, -1) \cup (5, 6)$.

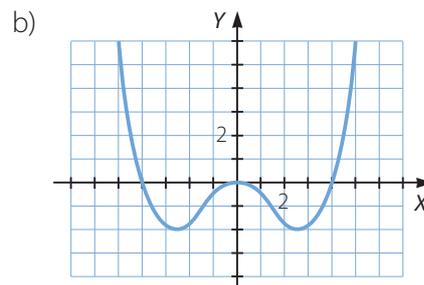
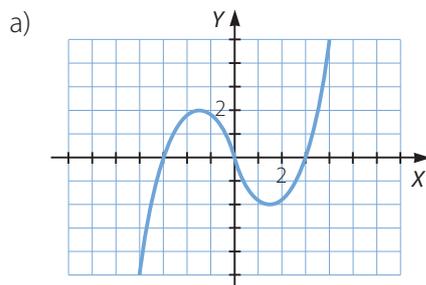
Existe un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo absoluto en $x = 5$.
No hay máximos absolutos.



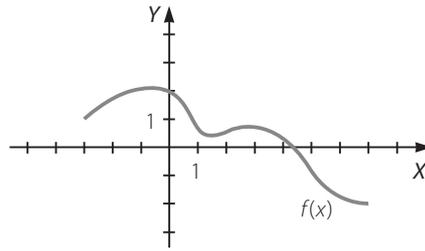
009 Dibuja la gráfica de una función para que sea:

- a) Impar. b) Par.

Respuesta abierta.



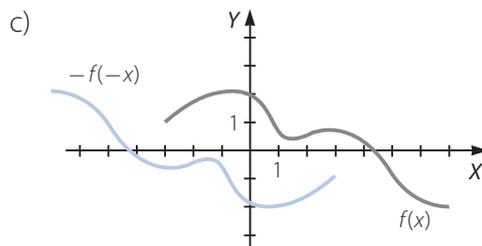
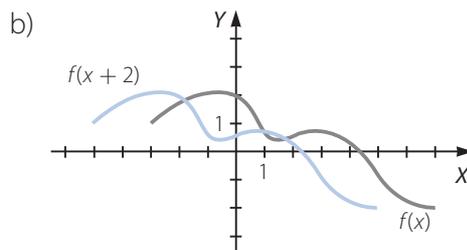
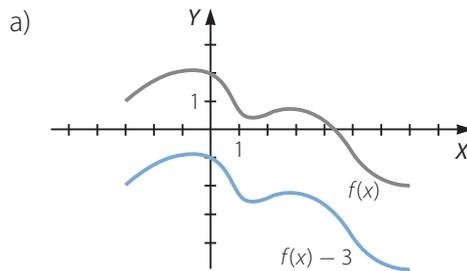
014 A partir de la gráfica de $y = f(x)$, representa estas funciones.



a) $y = f(x) - 3$

b) $y = f(x + 2)$

c) $y = -f(-x)$



015 Determina el valor de las estas funciones en el punto $x = -5$,

si $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \frac{x + 3}{x}$.

a) $(f - g)(x)$

b) $(f \cdot g)(x)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a) $(f - g)(x) = x^2 - 3 - \frac{x + 3}{x}$ $(f - g)(-5) = (-5)^2 - 3 - \frac{-5 + 3}{-5} = \frac{108}{5}$

b) $(f \cdot g)(x) = (x^2 - 3) \cdot \left(\frac{x + 3}{x}\right) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 9}{x}$

$(f \cdot g)(-5) = \frac{(-5)^3 + 3(-5)^2 - 3(-5) - 9}{-5} = \frac{44}{5}$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 3}{\frac{x + 3}{x}} = \frac{x^3 - 3x}{x + 3}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(-5) = \frac{(-5)^3 - 3(-5)}{-5 + 3} = 55$

Funciones

016 Teniendo en cuenta que $f(x) = \sqrt{x^5}$ y $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $(f \cdot g)(-4)$ b) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

a) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^5} \cdot \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

No existe $(f \cdot g)(-4)$, porque $\sqrt{(-4)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^5}}{\frac{x^2 + 3}{x + 1}} = \frac{(x + 1)\sqrt{x^5}}{x^2 + 3}$

No existe $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$, porque $\sqrt{(-1)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

017 Determina el valor de la composición de funciones que se indica en cada apartado, en $x = -4$, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x - 1}{x}$.

a) $(f \circ g)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$
b) $(g \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16}$

b) $(g \circ f)(-4) = g(f(-4)) = g(16) = \frac{15}{16}$

c) $(f \circ f)(-4) = f(f(-4)) = f(16) = 256$

d) $(g \circ g)(-4) = g(g(-4)) = g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{5}$

018 Si $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x - 4$, halla el valor de estas funciones en los puntos que se indican, determinando primero la composición de funciones correspondiente.

a) $(f \circ g)(5)$ b) $(g \circ f)(5)$

Justifica, a partir de los apartados anteriores, si la composición de funciones es conmutativa.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 4) = \sqrt{2(x - 4)^3}$
 $(f \circ g)(5) = \sqrt{2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2x^3}) = \sqrt{2x^3} - 4$
 $(g \circ f)(5) = \sqrt{250} - 4 = 5\sqrt{10} - 4$

$(f \circ g)(5) \neq (g \circ f)(5) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

019 Si $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$:

a) Determina $g \circ f$, $f \circ g$ y $g \circ g$.

b) Halla las funciones inversas de $f(x)$ y de $g(x)$, y comprueba que $f \circ f^{-1}$ y $g^{-1} \circ g$ dan la función identidad.

$$a) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{3x + 2}{3x + 3}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 3 \cdot \frac{x}{x+1} + 2 = \frac{5x + 2}{x+1}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x + 1}$$

$$b) y = 3x + 2 \rightarrow x = \frac{y-2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x-2}{3} + 2 = x$$

$$y = \frac{x}{x+1} \rightarrow xy + y = x \rightarrow x - xy = y \rightarrow x = \frac{y}{1-y} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

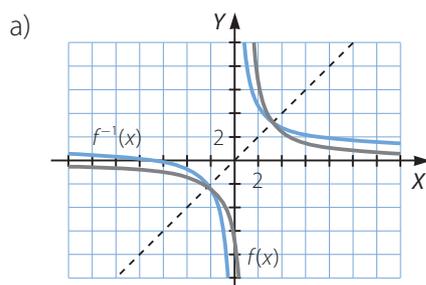
$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x} + 1} = \frac{x}{x+1-x} = x$$

020 Averigua cuál es la función inversa de $f(x) = \frac{7+x}{x}$.

a) Representa las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

b) Comprueba si sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

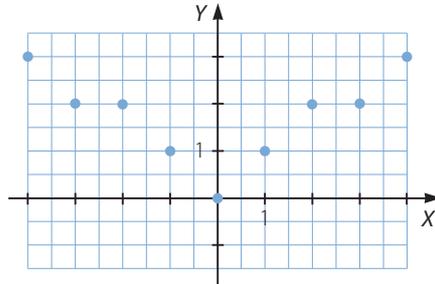
$$y = \frac{7+x}{x} \rightarrow xy = 7+x \rightarrow xy - x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}$$



b) Las funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

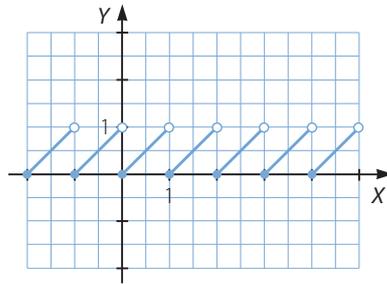
a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	2	1	0	1	2	2	3



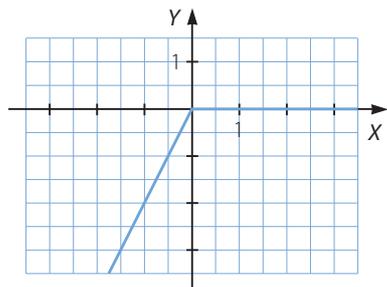
b)

x	-2	-1,6	-1	-0,4	0	0,7	1	1,5	2
$f(x)$	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2



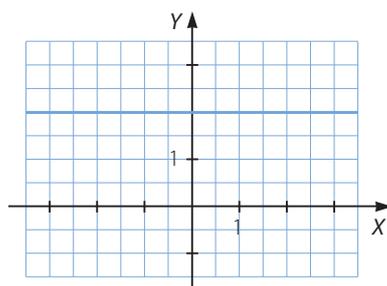
c)

x	-2	-1,6	-1	-0,4	0	0,7	1	1,5	2
$f(x)$	-4	-3,2	-2	-0,8	0	0	0	0	0



d)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	2	2	2	2



Funciones

023

●○○

A lo largo de un día medimos la longitud, en metros, de la sombra que proyecta una farola desde el amanecer hasta que anochece.

Las medidas, tomadas cada dos horas, desde las 6:00 h, se muestran a continuación.

0	25	17	5	2
6	19	32	0	

- a) ¿Crees que las tablas definen una función?
b) En caso afirmativo, identifica sus variables.

- a) La tabla define una función porque a cada hora le corresponde una única longitud de la sombra.
b) La variable independiente x corresponde con la hora del día y la variable dependiente y corresponde con la longitud, en metros, de la sombra.



024

●○○

Comprueba si los siguientes puntos están en los dominios de cada función.

- a) Los puntos $x = 3$, $x = 2$ y $x = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{x+1}$.
b) Los puntos $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$ para la función $f(x) = \ln(x-4)$.
c) Los puntos $x = 2$, $x = -2$ y $x = 0$ para la función $f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$.

- a) $\sqrt{3+1} = 2 \rightarrow x = 3 \in \text{Dom } f$
 $\sqrt{2+1} = \sqrt{3} \rightarrow x = 2 \in \text{Dom } f$
 $\sqrt{-5+1} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R} \rightarrow x = -5 \notin \text{Dom } f$
b) $\ln(3-4) = \ln(-1) \notin \mathbb{R} \rightarrow x = 3 \notin \text{Dom } f$
 $\ln(4-4) = \ln 0 \notin \mathbb{R} \rightarrow x = 4 \notin \text{Dom } f$
 $\ln(5-4) = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 5 \in \text{Dom } f$
c) $\frac{3 \cdot 2 - 6}{2+2} = 0 \rightarrow x = 2 \in \text{Dom } f$
 $\frac{3(-2) - 6}{-2+2} = \frac{-12}{0} \notin \mathbb{R} \rightarrow x = -2 \notin \text{Dom } f$
 $\frac{3 \cdot 0 - 6}{0+2} = -3 \rightarrow x = 0 \in \text{Dom } f$

025

●○○

Estudia si los valores de la ordenada, y , están incluidos en los recorridos de estas funciones.

- a) Las ordenadas $y = 3$, $y = 2$ e $y = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{3x-3}$.
b) Las ordenadas $y = 0$, $y = 30$ e $y = -3$ para la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
c) Las ordenadas $y = 1$, $y = \frac{13}{6}$ e $y = -7$ para la función $f(x) = \frac{2x-5}{x+2}$.
- a) $\sqrt{3x-3} = 3 \rightarrow 3x-3 = 9 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 3 \in \text{Im } f$
 $\sqrt{3x-3} = 2 \rightarrow 3x-3 = 4 \rightarrow x = \frac{7}{3} \rightarrow y = 2 \in \text{Im } f$
 $y = -5 \notin \text{Im } f$, porque la raíz no puede tomar valores negativos.

- b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ o } x = 3 \rightarrow y = 0 \in \text{Im } f$
 $x^2 - 5x + 6 = 30 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow x = 8 \text{ o } x = -3 \rightarrow y = 30 \in \text{Im } f$
 $x^2 - 5x + 6 = -3 \rightarrow x^2 - 5x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -11 < 0$
 \rightarrow La ecuación no tiene soluciones $\rightarrow y = -3 \in \text{Im } f$
- c) $\frac{2x-5}{x+2} = 1 \rightarrow 2x-5 = x+2 \rightarrow x = 7 \rightarrow y = 1 \in \text{Im } f$
 $\frac{2x-5}{x+2} = \frac{13}{6} \rightarrow 12x-30 = 13x+26 \rightarrow x = -56 \rightarrow y = \frac{13}{6} \in \text{Im } f$
 $\frac{2x-5}{x+2} = -7 \rightarrow 2x-5 = -7x-14 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -7 \in \text{Im } f$

026
●●○

Determina el dominio de estas funciones.

- a) $f(x) = \frac{x-3}{7}$ b) $f(x) = \frac{7}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$
- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

027
●●○

Estudia el dominio de las siguientes funciones.

- a) $y = \sqrt{x+3}$ c) $y = \sqrt{x^2-4x+4}$ e) $y = \sqrt{x^2+2x+9}$
b) $y = \sqrt{2x^2+3x-2}$ d) $y = \sqrt{5-2x}$ f) $y = \sqrt{6+x-x^2}$
- a) $\text{Dom } f = [-3, +\infty)$
b) $2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$
 $\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
c) $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$
 $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
d) $\text{Dom } f = \left[-\infty, \frac{5}{2}\right]$
e) $x^2 + 2x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -32 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones.
 $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
f) $6 + x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$
 $\text{Dom } f = [-2, 3]$

028
●●○

Escribe el dominio de las funciones.

- a) $y = \log_4(x-4)$ c) $y = 3^{\ln x}$ e) $y = \ln\left(\frac{10}{4-x}\right)$
b) $y = \cos(1-x)$ d) $y = \text{sen}(x-\pi)$
- a) $\text{Dom } f = (4, +\infty)$ c) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$ e) $\text{Dom } f = (-\infty, 4)$
b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Funciones

029



Analiza el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \log_4(5 + x)$

b) $y = 2^{3x-6}$

c) $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$

d) $y = 2 - \operatorname{tg} x$

e) $y = \frac{3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$

a) $\operatorname{Dom} f = (-5, +\infty)$

b) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

c) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$

d) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

030



Determina el dominio de las funciones.

a) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$

b) $y = \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt{x+3}$

c) $y = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$

a) $\operatorname{Dom} f = [-1, 8]$

b) $\operatorname{Dom} f = [-3, +\infty)$

c) $\operatorname{Dom} f = \emptyset$

031



Estudia el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $y = 5x - 3$

b) $y = 2 + \sqrt{x-1}$

c) $y = \frac{3}{x}$

d) $y = 2 - 4^x$

e) $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}$

f) $y = \frac{2}{x-2}$

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

b) $\operatorname{Dom} f = [1, +\infty)$

$\operatorname{Im} f = [2, +\infty)$

c) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$

d) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im} f = (-\infty, 2)$

e) $\operatorname{Dom} f = [-3, 3]$

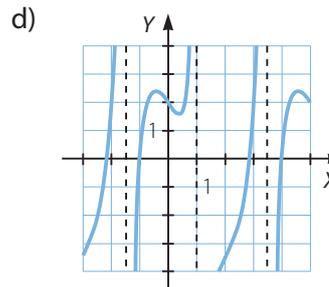
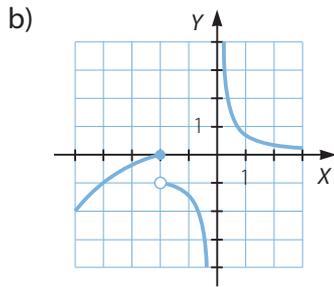
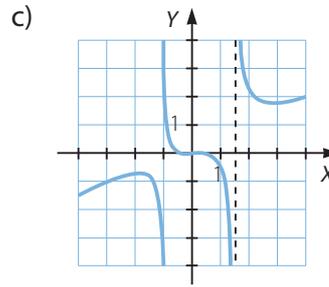
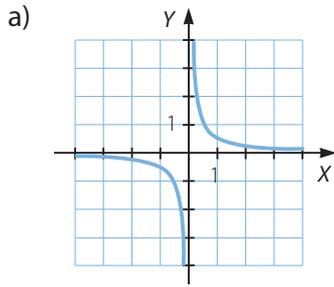
$\operatorname{Im} f = [\sqrt{6}, 2\sqrt{3}]$

f) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$

032

Estudia las características de las siguientes funciones.



a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

No hay periodicidad.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función no es simétrica ni periódica.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente

en $(-2, -1) \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Existe un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Es convexa en $(-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$ y es cóncava en $(-1, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

La función no es simétrica ni periódica.

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1,5; 1; 3,5\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty; -1,5) \cup (-1,5; -0,5) \cup (0,5; 1) \cup (1; 3,5) \cup (3,5; 4,5)$ y es decreciente en $(-0,5; 0,5) \cup (4,5; +\infty)$.

Máximo relativo en $x = -0,5$ y en $x = 4,5$ y mínimo relativo en $x = 0,5$.

Es cóncava en $(-\infty; -1,5) \cup (0, 1) \cup (1; 3,5)$ y es convexa en $(-0,5; 0) \cup (3,5; 5)$.

La función no es simétrica ni periódica.

Funciones

033
●●○

Considera la función que relaciona el tiempo, en días, con la superficie visible de la Luna.

- ¿Es una función periódica?
- En caso afirmativo, indica el período.
 - Al depender la superficie visible de las fases en la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, la función es periódica.
 - El período es de 28 días.

034
●●○

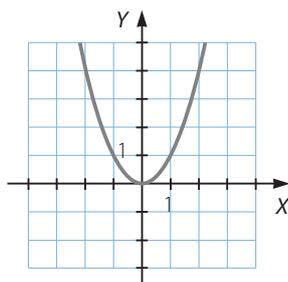
Estudia las simetrías de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow \text{La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.}$$

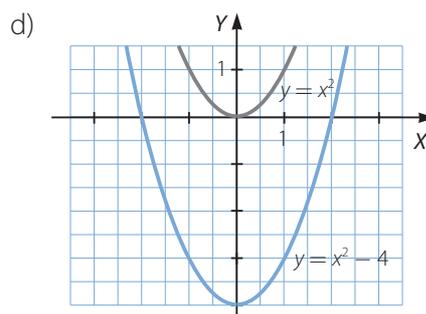
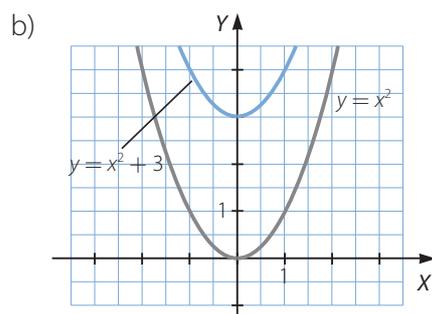
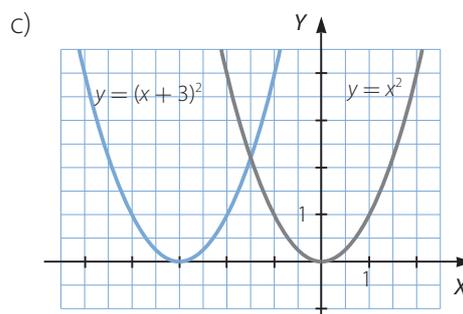
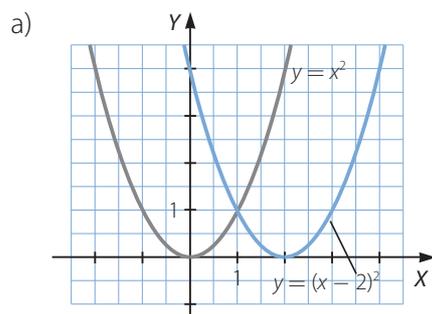
035
●●○

Dada la gráfica de la función $y = x^2$:



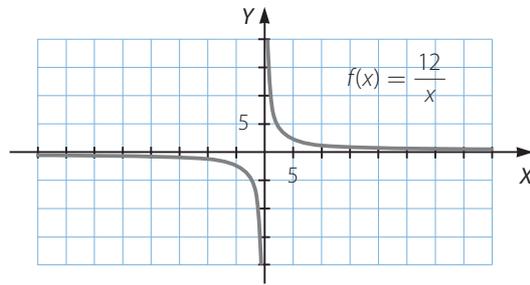
representa estas funciones.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) $y = (x - 2)^2$ | c) $y = (x + 3)^2$ |
| b) $y = x^2 + 3$ | d) $y = x^2 - 4$ |



036
●●○

A partir de la siguiente función:



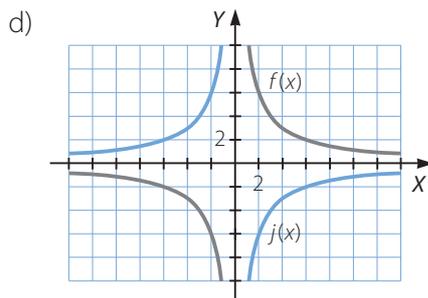
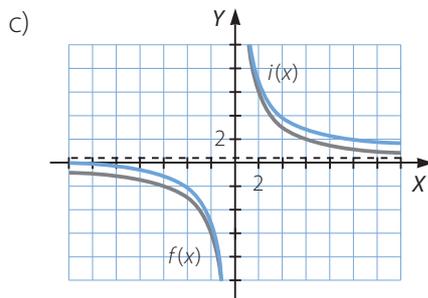
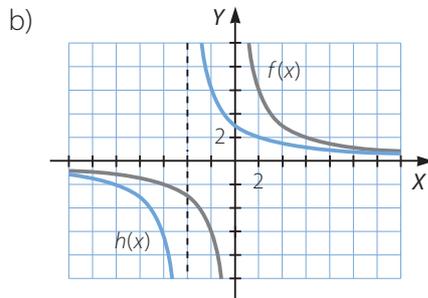
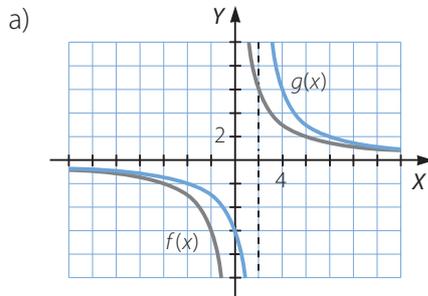
obtén la gráfica de estas funciones.

a) $g(x) = \frac{12}{x-2}$

b) $h(x) = \frac{12}{x+4}$

c) $i(x) = \frac{12}{x} + 1$

d) $j(x) = -\frac{12}{x}$

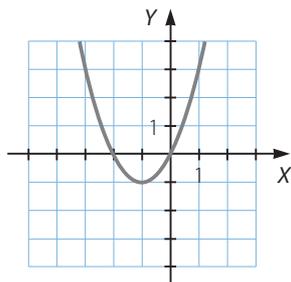


Funciones

037
●●○

Con la gráfica de esta función:

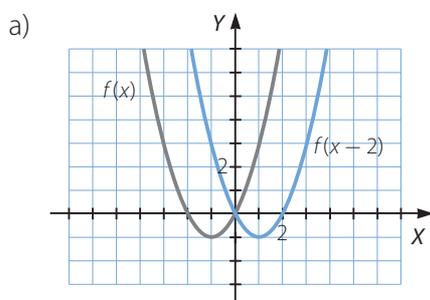
$$f(x) = x^2 - 2x$$



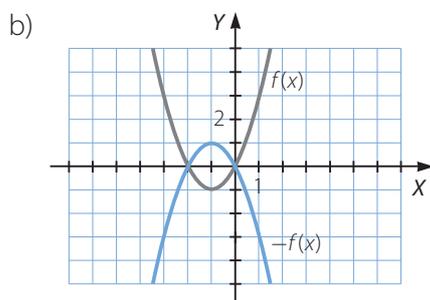
representa gráficamente las siguientes funciones.

- a) $f(x - 2)$ b) $-f(x)$ c) $f(x + 1)$ d) $f(x) + 2$

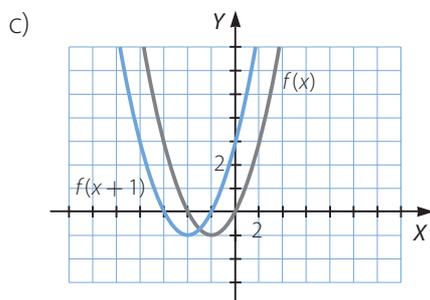
Razona cómo lo haces y calcula su expresión algebraica.



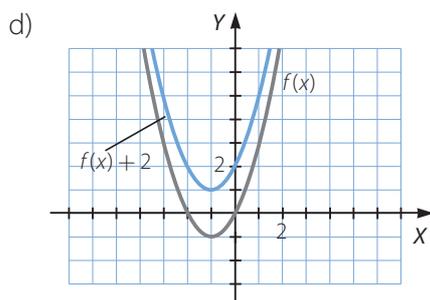
$$f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) = x^2 - 2x$$



$$-f(x) = -x^2 - 2x$$



$$f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$$

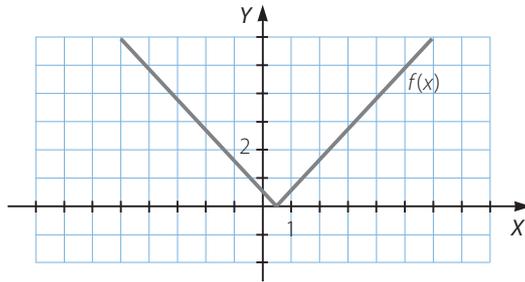


$$f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$$

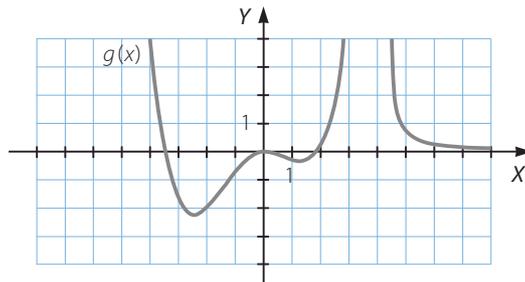
038
●●○

A partir de cada gráfica, dibuja la gráfica de las funciones que se indican.

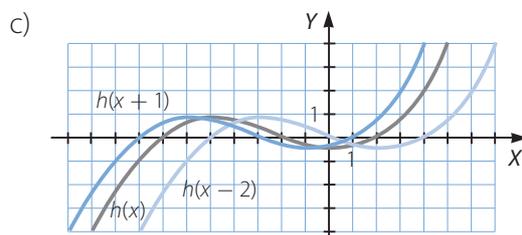
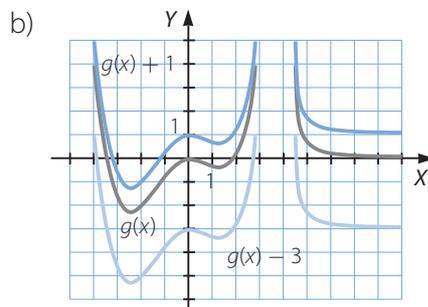
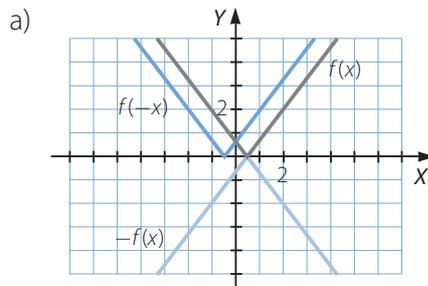
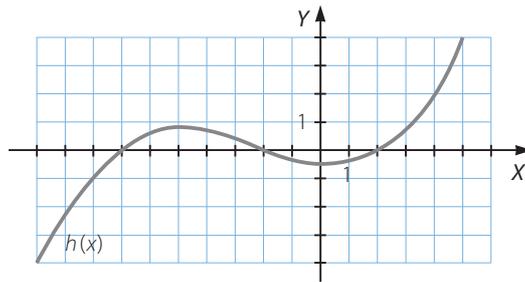
a) $f(-x)$ y $-f(x)$



b) $g(x) + 1$ y $g(x) - 3$



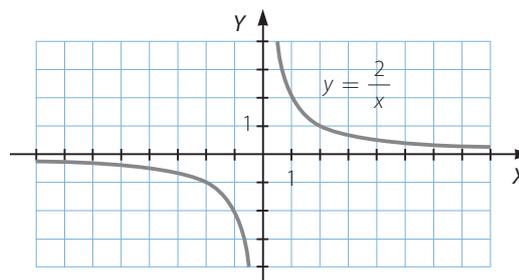
c) $h(x + 1)$ y $h(x - 2)$



Funciones

039
●●○

La gráfica pertenece a la función $y = \frac{2}{x}$.



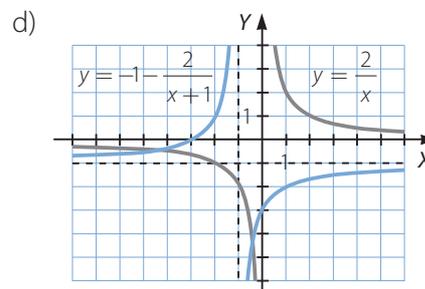
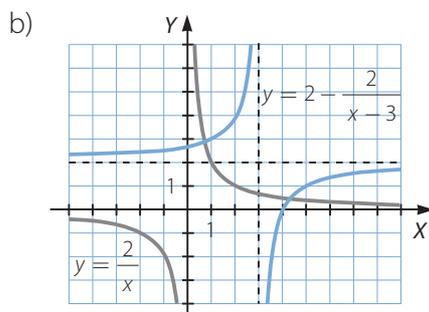
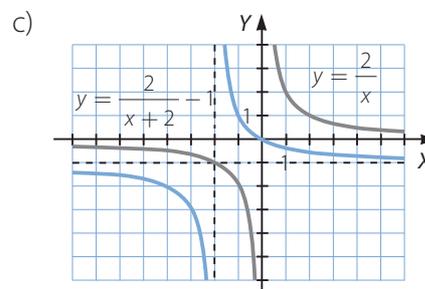
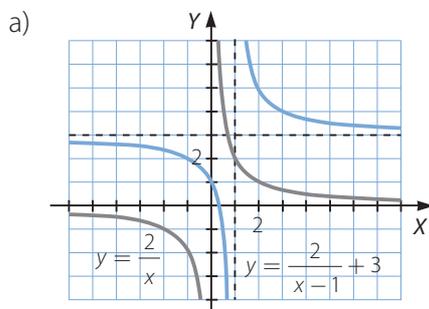
Construye a partir de ella la gráfica de las funciones.

a) $y = \frac{2}{x-1} + 3$

c) $y = \frac{2}{x+2} - 1$

b) $y = 2 - \frac{2}{x-3}$

d) $y = -1 - \frac{2}{x+1}$



040
●●○

Dada la función $f(x) = \frac{8}{x}$, determina la expresión algebraica de estas funciones y represéntalas.

a) $f(x-3)$

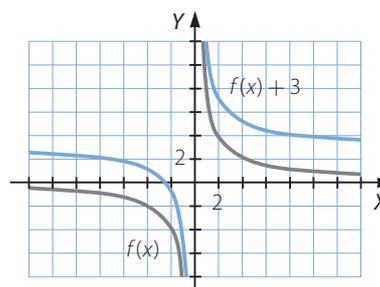
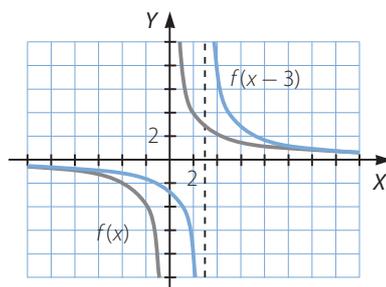
b) $f(x) + 3$

c) $f(-x)$

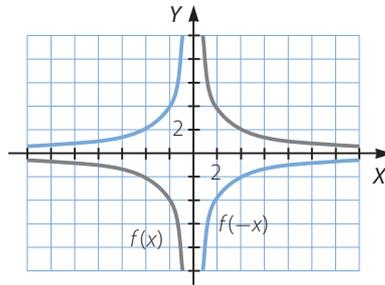
d) $-f(x)$

a) $f(x-3) = \frac{8}{x-3}$

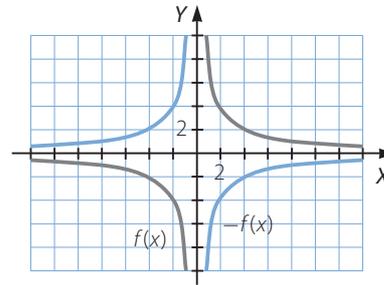
b) $f(x) + 3 = \frac{8}{x} + 3$



c) $f(-x) = -\frac{8}{x}$



d) $-f(x) = -\frac{8}{x}$



041
●○○

Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g(x) = \frac{3}{x^2-1}$$

calcula.

- a) $(f+g)(5)$ c) $(f \cdot g)(0)$ e) $(f \cdot f)(2)$ g) $(g-f)(3)$ i) $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$
 b) $(f-g)(3)$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ f) $(g+f)(5)$ h) $(f+f \cdot g)(0)$ j) $f^2(2)$

a) $(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \frac{3}{x^2-1}$

$(f+g)(5) = \sqrt{7} + \frac{1}{8}$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \frac{3}{x^2-1}$

$(f-g)(3) = \sqrt{5} - \frac{3}{8}$

c) $(f \cdot g)(x) = \frac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$

$(f \cdot g)(0) = -3\sqrt{2}$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(x^2-1)\sqrt{x+2}}{3}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-2) = 0$

e) $(f \cdot f)(x) = x+2$

$(f \cdot f)(2) = 4$

f) $(g+f)(x) = \frac{3}{x^2-1} + \sqrt{x+2}$

$(g+f)(5) = \frac{1}{8} + \sqrt{7}$

g) $(g-f)(x) = \frac{3}{x^2-1} - \sqrt{x+2}$

$(g-f)(3) = \frac{3}{8} - \sqrt{5}$

h) $(f+f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} + \frac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$

$(f \cdot g)(0) = -2\sqrt{2}$

i) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{3}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$ no es real, porque el denominador de una fracción no puede ser igual a 0.

j) $(f^2)(x) = x+2$ $(f^2)(2) = 4$

044
●○○

Dadas las funciones:

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

calcula las composiciones de funciones.

- a) $f \circ g$ d) $g \circ f$
 b) $g \circ h$ e) $h \circ g$
 c) $h \circ f$ f) $f \circ h$

Determina el valor de cada función para $x = 3$.

- a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2^{x^2}$
 $(f \circ g)(3) = 512$
- b) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$
 $(g \circ h)(3) = \frac{1}{9}$
- c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2^x) = \frac{1}{2^x}$
 $(h \circ f)(3) = \frac{1}{8}$
- d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^{2x}$
 $(g \circ f)(3) = 64$
- e) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \frac{1}{x^2}$
 $(h \circ g)(3) = \frac{1}{9}$
- f) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$
 $(f \circ h)(3) = \sqrt[3]{2}$

045
●○○Comprueba con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3x - 2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = \sqrt{3x - 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = 3\sqrt{x+1} - 2$$

 $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

$$\text{Dom}(f \circ g) = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = [-1, +\infty)$$

Funciones

046
●●○

Explica de qué manera hay que componer las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad g(x) = 5x + 1 \quad h(x) = \frac{2}{x+1}$$

para obtener las siguientes funciones.

a) $m(x) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1$ b) $n(x) = 25x + 6$ c) $p(x) = \frac{x+11}{x+1}$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 + 4}) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1 = m(x)$

b) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1 = 25x + 6 = n(x)$

c) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{2}{x+1}\right) = \frac{10}{x+1} + 1 = \frac{x+11}{x+1} = p(x)$

047
●○○

Determina $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ en los pares de funciones para comprobar si son inversas o no.

a) $f(x) = 3x - 1$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 1$

b) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \log_2 x$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$

e) $f(x) = x^2 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

a) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 1 = x + 2$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 1) = \frac{1}{3}(3x - 1) + 1 = x + \frac{2}{3}$$

Las funciones no son inversas.

b) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x}$$

Las funciones no son inversas.

c) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \log_2 2^x = x$$

Las funciones son inversas.

d) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = x$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = x$$

Las funciones son inversas.

e) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-2}) = x - 2 + 2 = x$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2 - 2} = x$$

Las funciones son inversas.

048 ●●● Calcula la función inversa de cada función.

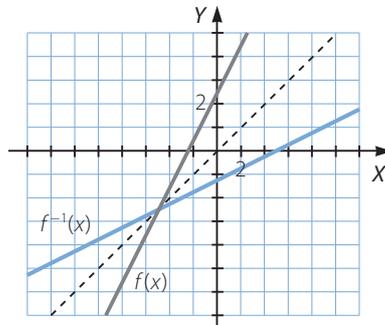
a) $y = 2x + 5$

b) $y = \frac{3-x}{2}$

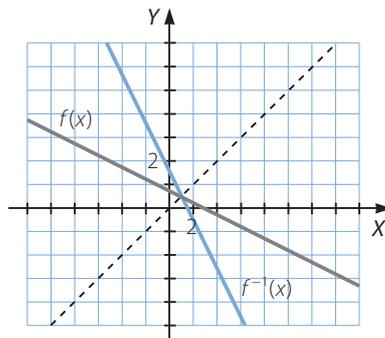
c) $y = \sqrt[3]{2x-3}$

Comprueba que sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

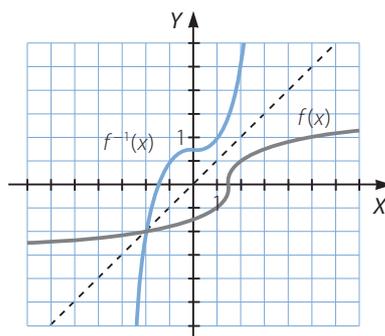
a) $y = 2x + 5 \rightarrow x = \frac{y-5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$



b) $y = \frac{3-x}{2} \rightarrow x = 3-2y \rightarrow f^{-1}(x) = 3-2x$



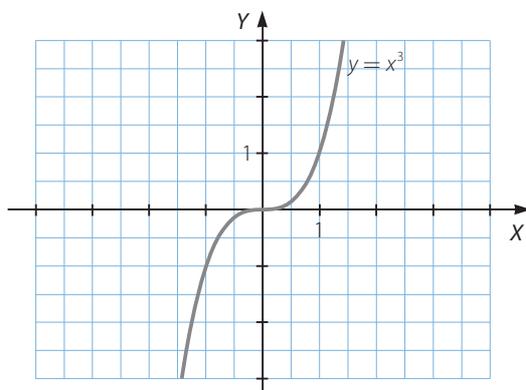
c) $y = \sqrt[3]{2x-3} \rightarrow x = \frac{y^3+3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^3+3}{2}$



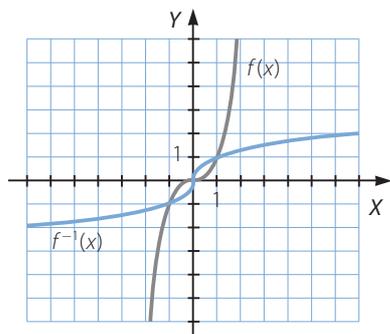
Funciones

049
●○○

Dada la gráfica de la función $y = x^3$:



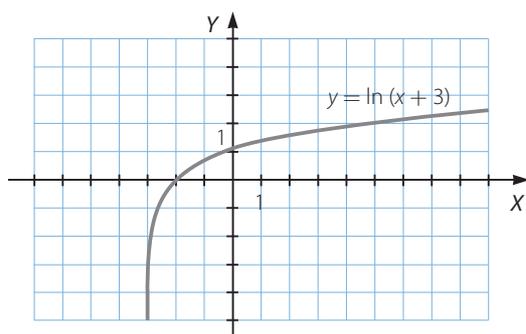
dibuja la gráfica de su función inversa.



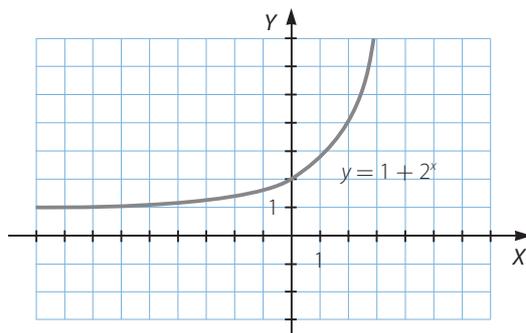
050
●○○

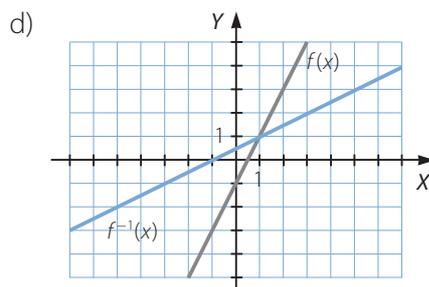
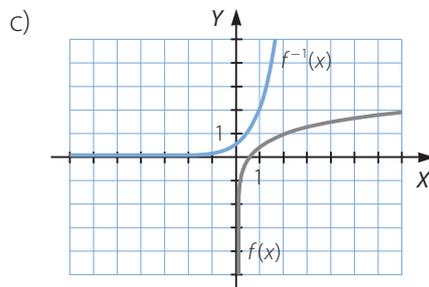
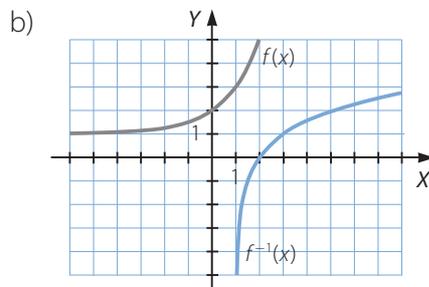
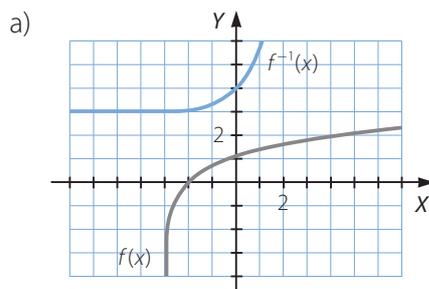
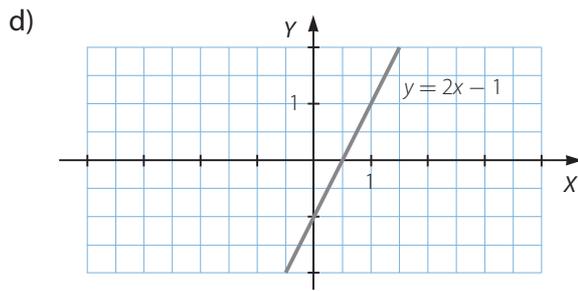
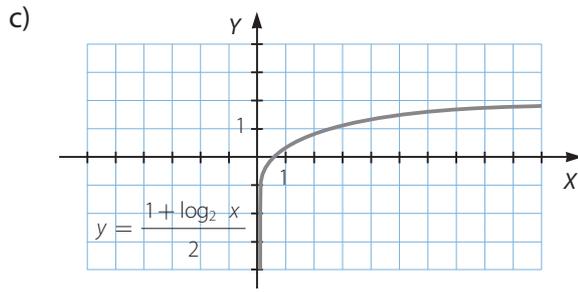
Dibuja las funciones inversas.

a)



b)





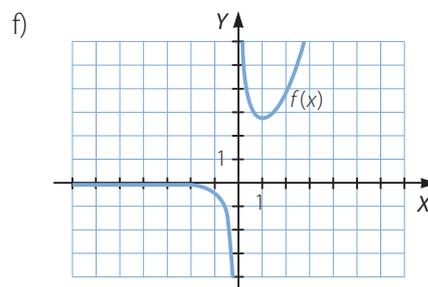
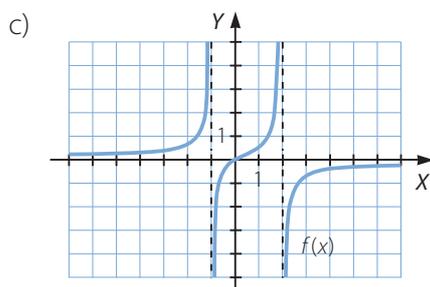
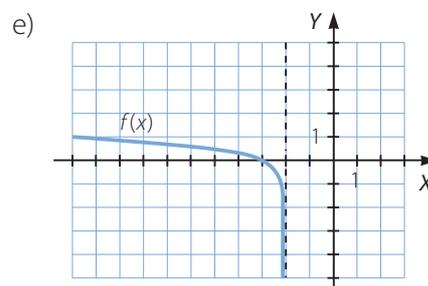
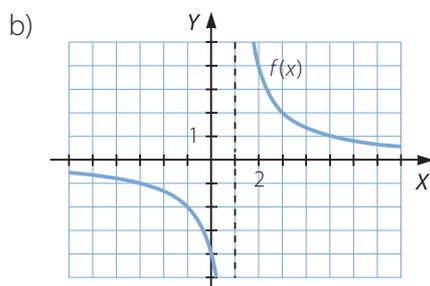
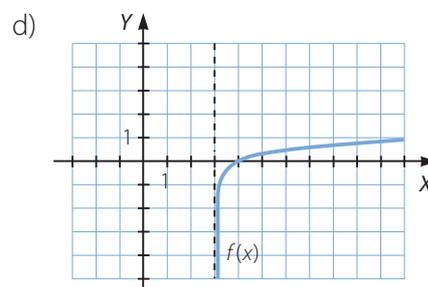
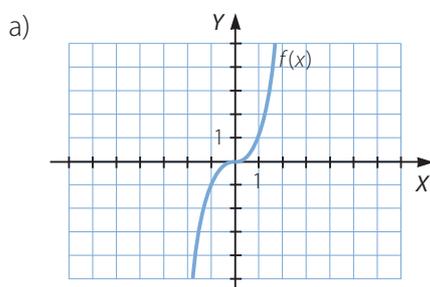
Funciones

051
●○○

Dibuja funciones que cumplan estas propiedades.

- Su dominio y su recorrido son \mathbb{R} .
- Su dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Es creciente y su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.
- Es logarítmica y su dominio es $(3, +\infty)$.
- Es logarítmica y su dominio es $(-\infty, -2)$.
- Es exponencial y su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Respuesta abierta.

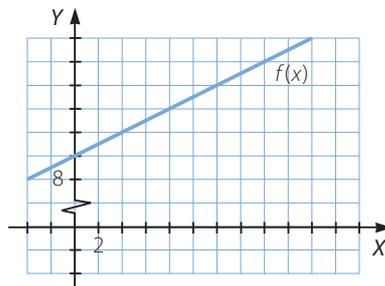


052
●○○

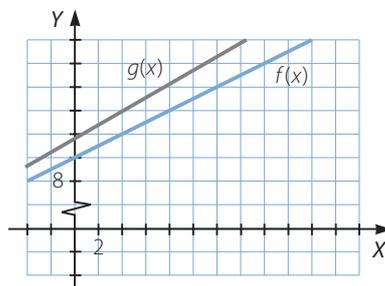
En una vivienda pagan 10 euros de gasto fijo y 0,50 euros por cada kilovatio consumido a la empresa que les suministra electricidad.

- Obtén una expresión de la relación que existe entre el consumo y el precio y represéntala.
- Si a esta cantidad hay que aumentarle el 16% de IVA, ¿cómo será la ecuación? ¿Qué variación sufre la gráfica?

a) $f(x) = 10 + 0,5x$



b) $g(x) = (10 + 0,5x) \cdot 1,16 = 11,6 + 0,58x$



La gráfica es otra recta con mayor pendiente que la primera.

053
●●○

Halla el dominio de las funciones del tipo $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, siendo n un número natural.

Si n es impar: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

Si n es par: $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

054
●●○

El manual de usuario de un vehículo afirma que el ruido producido por el motor sigue aproximadamente la fórmula:

$$r = at^2 + 2,8t + 8$$

donde t es el número de años de antigüedad del vehículo; a es un número fijo, que se denomina coeficiente de atenuación, y r es el nivel de ruido, medido en decibelios.



La semana pasada llevé mi vehículo a pasar la revisión de los cuatro años y en el informe figura que la medición fue de 27 decibelios. ¿Cuál es el coeficiente de atenuación? ¿Cuántos decibelios producirá a los ocho años?

$$27 = a \cdot 4^2 + 2,8 \cdot 4 + 8 \rightarrow 16a = 7,8 \rightarrow a = 0,4875$$

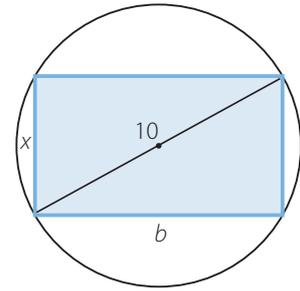
$$\text{A los ocho años producirá: } r = 0,4875 \cdot 8^2 + 2,8 \cdot 8 + 8 = 61,6 \text{ decibelios}$$

Funciones

055
●●○

En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un rectángulo de lado x .

- Expresa el área en función de x . ¿Cuál es su dominio?
- Realiza un tanteo para determinar el máximo valor que puede tomar esa función. ¿Cuánto medirán los lados del rectángulo en ese caso? ¿Qué tanto por ciento de la superficie del círculo ocupa el rectángulo?



a) Por el teorema de Pitágoras: $10^2 = b^2 + x^2 \rightarrow b = \sqrt{100 - x^2}$

El área del rectángulo viene dada por la función: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

- b) Al ser x la medida de un lado, el dominio de la función es: $\text{Dom } f = [0, 10]$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	9,95	19,59	28,62	36,66	43,3	48	49,98	48	39,23	0

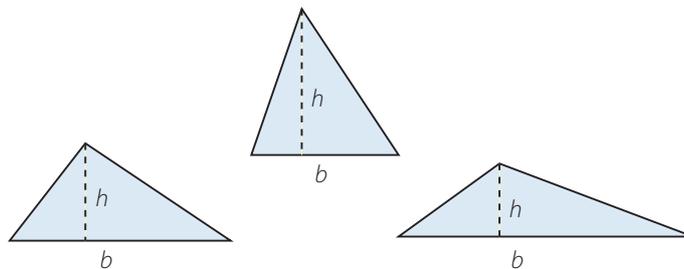
El máximo valor del área es, aproximadamente, $49,98 \text{ cm}^2$. En ese caso, el lado x mide 7 cm. Así, el otro lado mide: $b = \sqrt{51} = 7,14 \text{ cm}$

El área del círculo mide: $A = \pi r^2 = 78,53 \text{ cm}^2$

Como $\frac{49,98}{78,53} = 0,6364$, el área del rectángulo ocupa el 63,64 % de la superficie del círculo.

056
●●○

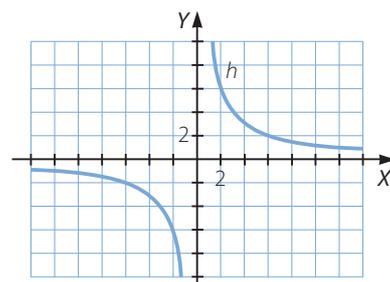
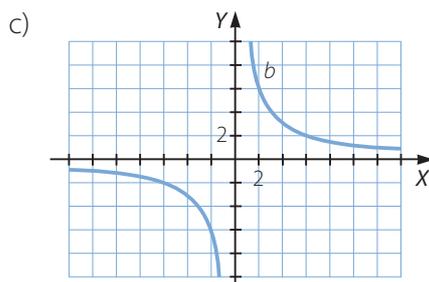
Considera los triángulos cuya superficie mide S .



- Escribe la expresión algebraica que relaciona la base en función de la altura en estos triángulos.
- ¿Cuál es la función que relaciona la altura en función de la base?
- Representa ambas funciones.

a) $b = \frac{2A}{h}$

b) $h = \frac{2A}{b}$



Las dos gráficas son iguales.

PARA FINALIZAR...

057 Sean las funciones $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Comprueba que se cumple que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.

$$\begin{aligned} [g(x)]^2 - [f(x)]^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \\ &= \frac{2+2}{4} = 1 \end{aligned}$$

058 Calcula las funciones inversas de:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$

Si $z = e^x$:

$$2y = z - \frac{1}{z} \rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Por tanto, las funciones inversas son de la forma: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

e $y = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$.

Si $z = e^x$:

$$2y = z + \frac{1}{z} \rightarrow z^2 - 2yz + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Por tanto, las funciones inversas son de la forma: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

e $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$.

059 Si la función definida por $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, con $x \neq -\frac{3}{2}$, verifica que $f[f(x)] = x$, ¿cuánto vale c ?

$$f(f(x)) = f\left(\frac{cx}{2x+3}\right) = \frac{c \cdot \frac{cx}{2x+3}}{2 \cdot \frac{cx}{2x+3} + 3} = \frac{c^2x}{2cx + 6x + 9} = x \rightarrow c^2x = 2cx^2 + 6x^2 + 9x$$

$$\rightarrow c^2x - 2cx^2 - 6x^2 - 9x = 0 \rightarrow c = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4 + 24x^3 + 36x^2}}{2x} =$$

$$= x \pm \sqrt{x^2 + 6x + 9} = x \pm \sqrt{(x+3)^2} = x \pm (x+3)$$

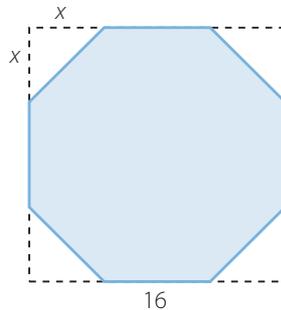
$$\text{Si } c = 2x + 3: f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{2x + 3} = x$$

$$\text{Si } c = -3: f(x) = \frac{-3x}{2x + 3}$$

Funciones

060

En un cuadrado de 16 cm de lado se suprime, de cada esquina, un triángulo rectángulo e isósceles de cateto x . Expresa el área y el perímetro del polígono resultante en función de x . ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?

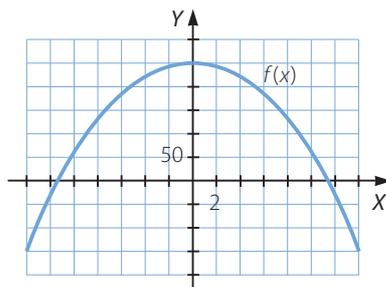


El área de la figura viene dada por la función: $f(x) = 16^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 256 - 2x^2$

La hipotenusa de los triángulos mide: $a^2 = x^2 + x^2 \rightarrow a = \sqrt{2}x$

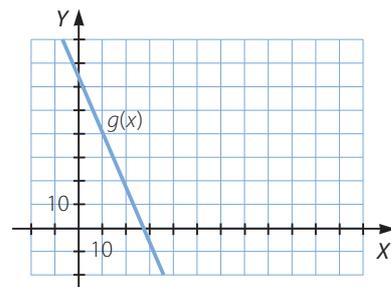
El perímetro de la figura viene dado por la función:

$$g(x) = 4\sqrt{2}x + 4(16 - 2x) = (4\sqrt{2} - 8)x + 64$$



$$\text{Dom } f = [0, 8\sqrt{2}]$$

$$\text{Im } f = [0, 256]$$



$$\text{Dom } g = [0, 8\sqrt{2} + 16]$$

$$\text{Im } g = [0, 64]$$

061

Un grupo de alumnos de 1.º Bachillerato pide presupuesto en dos agencias de viajes para realizar una excursión.

La primera agencia les hace la siguiente propuesta.

- Si el número de alumnos que va a la excursión es 40 o menos, les cobrará 200 € por alumno.
- Si el número de alumnos es superior a 40 le descontará un 10% a cada uno de los alumnos que se inscriba.

La oferta de la segunda agencia es:

- Si completan un autobús, con capacidad para 60 personas, el precio será de 150 € por persona. Si alguno de los autobuses no está completo, se incrementará el precio en un 1% por cada persona que falte para completarlo.

¿Qué agencia les conviene más?

Un descuento del 10% en el precio de 200 € significa un precio de: $200 \cdot 0,9 = 180$ €

Así, la función que representa la propuesta de la primera agencia es:

$$f(x) = \begin{cases} 200x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 180x & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

El incremento de un 1% por cada persona que falte significa que el precio será:

$$150 \cdot \left(1 + \frac{60 - x}{100}\right)x = 150x + 1,5(60x - x^2) = 240x - 1,5x^2$$

La función que representa la propuesta de la segunda agencia es:

$$g(x) = \begin{cases} 240x - 1,5x^2 & \text{si } 0 \leq x < 60 \\ 150x & \text{si } x \geq 60 \end{cases}$$

Los puntos de intersección de ambas funciones son:

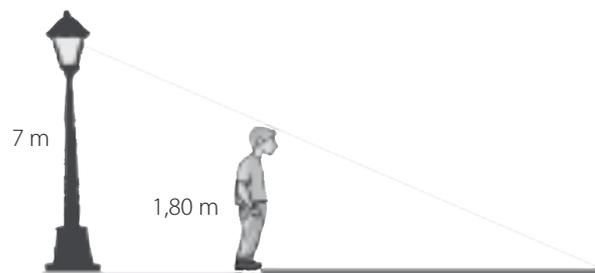
- Si $0 \leq x \leq 40 \rightarrow 200x = 240x - 1,5x^2 \rightarrow 1,5x^2 - 40x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{80}{3} = 26,6 \end{cases}$
- Si $40 < x < 60 \rightarrow 180x = 240x - 1,5x^2 \rightarrow 1,5x^2 - 60x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$
- Si $x \geq 60 \rightarrow 180x = 150x \rightarrow x = 0$

Por tanto, la primera agencia resulta más conveniente si el número de alumnos es menor o igual a 26. A partir de 27 alumnos, es más económica la segunda agencia.

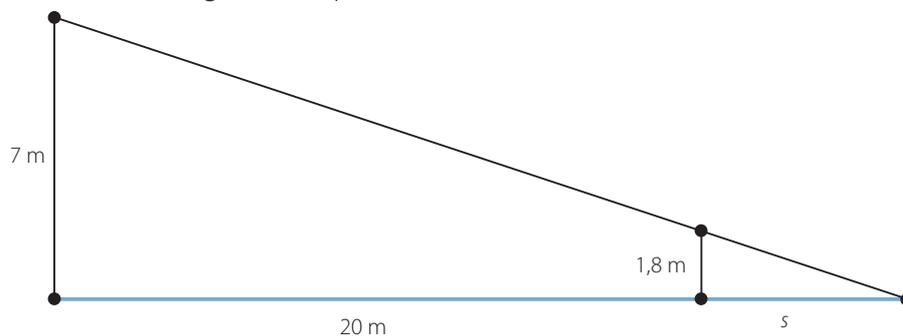
062 Una farola tiene 7 m de altura. En su base hay una persona de 1,80 m de altura que empieza a andar en línea recta, alejándose de la farola a una velocidad de 2 m/s.

Al cabo de 10 segundos, ¿cuál será la longitud de su sombra?

Halla una función que exprese la longitud de la sombra en función del tiempo, t , que se camina.



Al cabo de 10 segundos, la persona ha recorrido 20 m.



Como la farola y la persona forman ángulos rectos con el suelo, sus alturas determinan dos lados paralelos de triángulos que se encuentran en posición de Tales.

$$\frac{7}{1,8} = \frac{20}{s} \rightarrow s = \frac{1,8 \cdot 20}{7} = 5,14 \text{ m}$$

La función que expresa la longitud de la sombra en función del tiempo es:

$$f(t) = \frac{1,8 \cdot 2t}{7} = \frac{3,6t}{7}$$

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El árbol de la ciencia

Al decir Andrés [estudiante de medicina] que la vida, según su profesor Letamendi, es una función indeterminada entre la energía individual y el cosmos, y que esta función no puede ser más que suma, resta, multiplicación y división, y que no pudiendo ser suma, ni resta, ni división, tiene que ser multiplicación, uno de los amigos de Sañudo [estudiante de ingeniería] se echó a reír.

–¿Por qué se ríe usted? –le preguntó Andrés sorprendido.

–Porque en todo eso que dice usted hay una porción de sofismas y de falsedades. Primeramente hay muchas más funciones matemáticas que sumar, restar, multiplicar y dividir.

–¿Cuáles?

–Elevar a potencia, extraer raíces... Después, aunque no hubiera más que cuatro funciones matemáticas primitivas, es absurdo pensar que en el conflicto de estos dos elementos, la energía de la vida y el cosmos, uno de ellos, por lo menos, heterogéneo y complicado, porque no haya suma, ni resta, ni división, ha de haber multiplicación. Además, sería necesario demostrar por qué no puede haber suma, por qué no puede haber resta y por qué no puede haber división. Después habría que demostrar por qué no puede haber dos o tres funciones simultáneas. No basta decirlo.

–Pero eso lo da el razonamiento.

–No, no; perdone usted –replicó el estudiante–. Por ejemplo, entre esa mujer y yo puede haber varias funciones matemáticas: suma, si hacemos los dos una misma cosa ayudándonos; resta, si ella quiere una cosa y yo la contraria y vence uno de los dos contra el otro; multiplicación, si tenemos un hijo, y división si yo la corto en pedazos a ella o ella a mí.

–Eso es una broma –dijo Andrés.

–Claro que es una broma –replicó el estudiante–, una broma por el estilo de las de su profesor; pero que tiende a una verdad, y es que entre la fuerza de la vida y el cosmos hay un infinito de funciones distintas: sumas, restas, multiplicaciones, de todo, y que además es muy posible que existan otras funciones que no tengan expresión matemática.

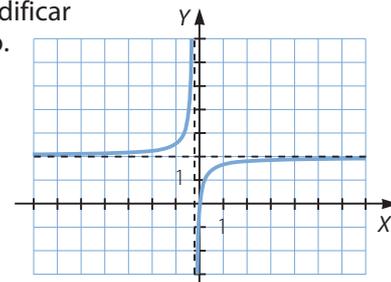
PÍO BAROJA

Existen algunas proteínas de gran tamaño a las que se les pueden unir hormonas para modificar su función en el cuerpo humano.

Este mecanismo está regulado por la fórmula

$$y = \frac{10kx}{1+kx},$$

siendo y la concentración de hormonas unidas, la concentración total de hormonas y k una constante. Representa esta función para $k = 1$.



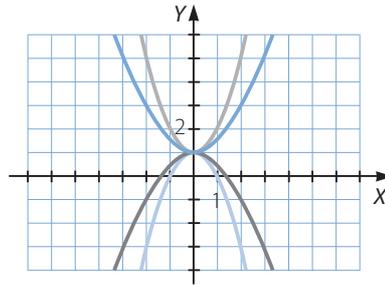
ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

- 001 Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos
- $A(2, 1)$
- y
- $B(-2, 3)$
- .

$$m = -\frac{1}{2}$$

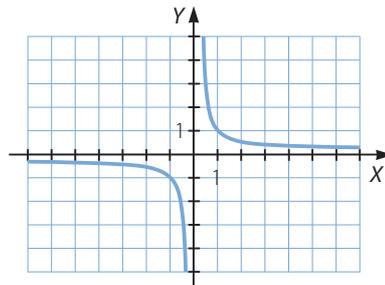
- 002 Dibuja sobre unos ejes de coordenadas algunas parábolas que tengan como vértice el punto
- $(0, 1)$
- .

Respuesta abierta.



- 003 Dibuja, sobre unos ejes de coordenadas, una hipérbola de vértices
- $(1, 1)$
- y
- $(-1, -1)$
- y con asíntotas
- $y = 0$
- y
- $x = 0$
- .

Respuesta abierta.



- 004 Calcula las siguientes razones trigonométricas.

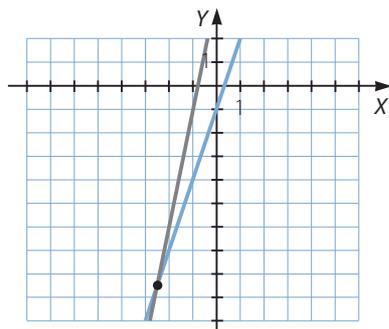
a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ b) $\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3}$ c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ d) $\operatorname{sen} \frac{10\pi}{6}$ e) $\operatorname{cos} \frac{9\pi}{4}$ f) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{2}$

a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ no existe. e) $\operatorname{cos} \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ d) $\operatorname{sen} \frac{10\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{2}$ no existe.

ACTIVIDADES

- 001 Representa, sobre los mismos ejes de coordenadas, las funciones
- $y = 3x - 1$
- e
- $y = 5x + 4$
- . Halla el punto común a las dos gráficas.



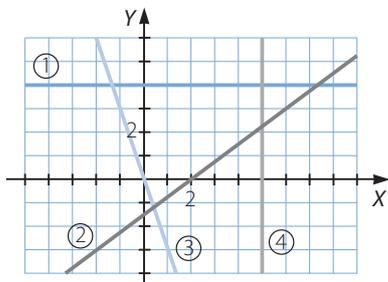
El punto de intersección es:

$$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{17}{2}\right)$$

Funciones elementales

002 Dibuja todos los tipos de rectas que conoces y encuentra aquellos que no corresponden a una función. Escribe sus ecuaciones.

Respuesta abierta.



- ① $y = 4$ es una función constante.
- ② $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ es una función afín.
- ③ $y = -3x$ es una función lineal.
- ④ $x = 4$ no es una función.

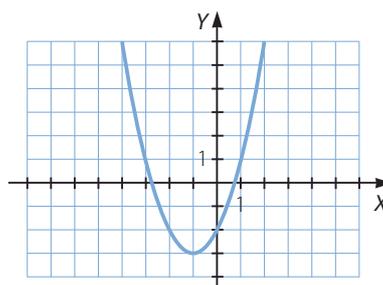
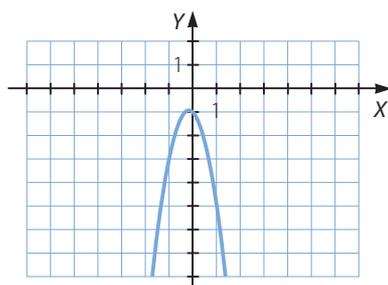
003 Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.

a) $y = -3x^2 - x - 1$

b) $y = x^2 + 2x - 2$

a) $V\left(-\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}\right)$

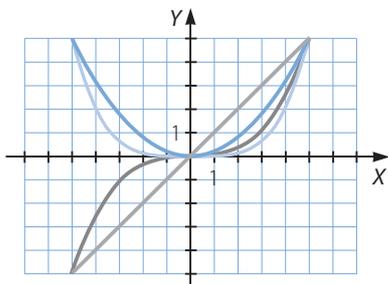
b) $V(-1, -3)$



004 Representa en el intervalo $[-1, 1]$, con una escala que sea lo suficientemente grande, las funciones.

$$f(x) = x \quad f(x) = x^2 \quad f(x) = x^3 \quad f(x) = x^4$$

Describe sus propiedades.



En todas las funciones, el dominio es \mathbb{R} y el punto de corte con los ejes es el origen de coordenadas.

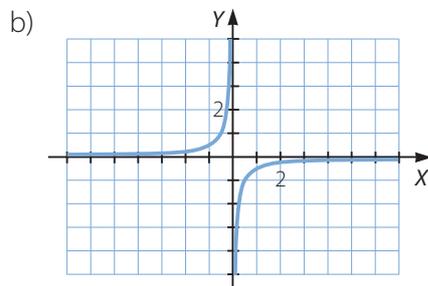
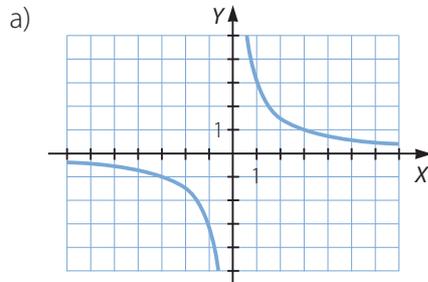
Las funciones de exponente par son decrecientes para los valores negativos de x , son crecientes para los valores positivos, tienen un máximo absoluto en $x = 0$ y son simétricas respecto del eje de ordenadas.

Las funciones de exponente impar son crecientes, no tienen máximos ni mínimos y son simétricas respecto del origen de coordenadas.

005 Representa gráficamente las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{3}{x}$

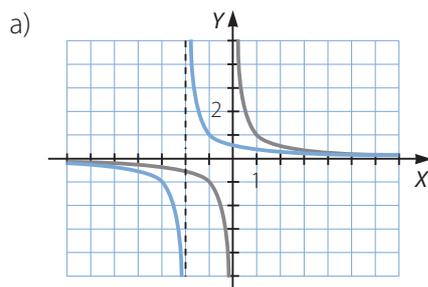
b) $y = -\frac{1}{2x}$



006 Representa estas funciones racionales, y relaciónalas con las funciones de proporcionalidad inversa.

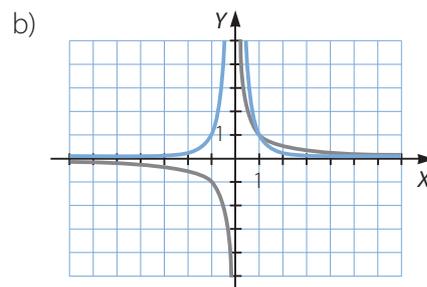
a) $y = \frac{1}{x+2}$

b) $y = \frac{1}{x^2}$



Es una traslación horizontal de la función de proporcionalidad inversa:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x+2) = \frac{1}{x+2}$$



Es el producto por sí misma de la función de proporcionalidad inversa:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{x^2}$$

007 Halla el dominio de las funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } g = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

Funciones elementales

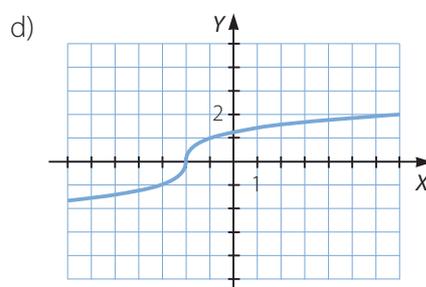
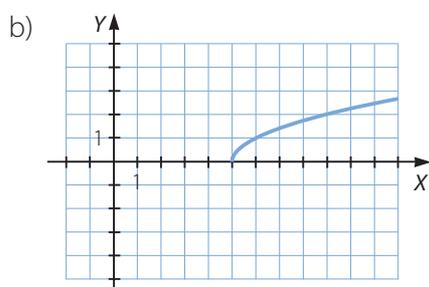
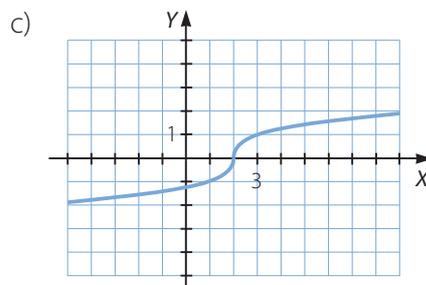
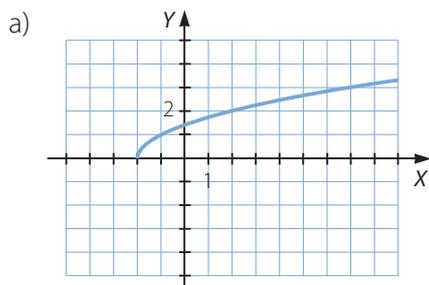
008 Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

d) $i(x) = \sqrt[3]{x + 2}$



009 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = 1,2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $h(x) = 0,8^x$

d) $i(x) = (\sqrt{3})^x$

a) $1,2 > 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

b) $\frac{2}{3} < 1 \rightarrow g(x)$ es decreciente.

c) $0,8 < 1 \rightarrow h(x)$ es decreciente.

d) $\sqrt{3} > 1 \rightarrow i(x)$ es creciente.

010 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = -2^x$

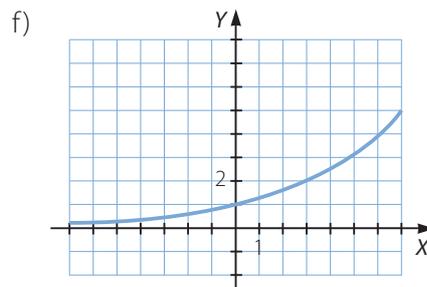
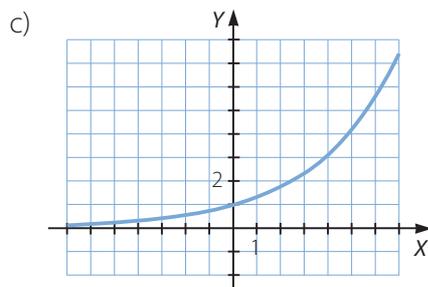
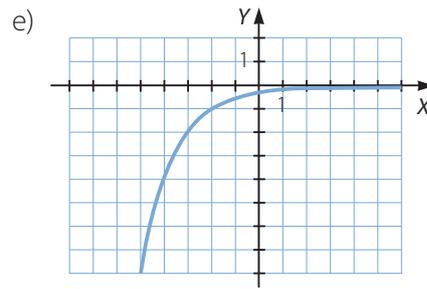
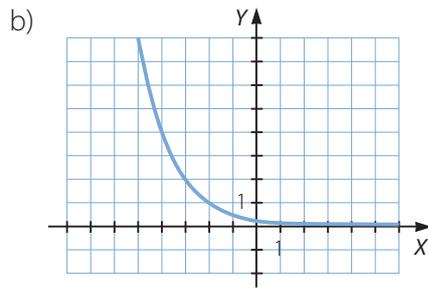
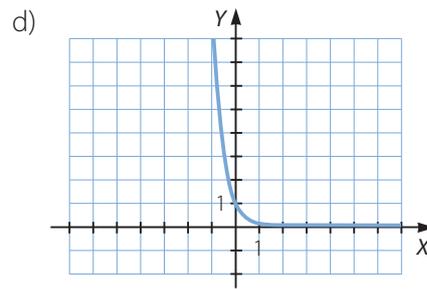
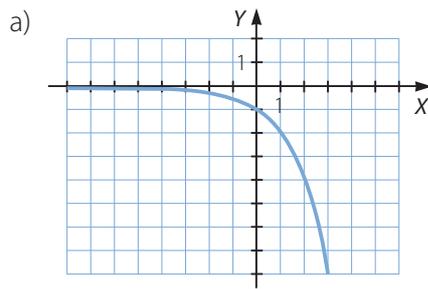
c) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

e) $y = -2^{-x}$

b) $y = 2^{-x}$

d) $y = 0,1^x$

f) $y = 2^{\frac{x}{3}}$



011 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = \log_{1,2} x$

c) $h(x) = \log_7 x$

e) $j(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

b) $g(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$

d) $i(x) = \log_{0,8} x$

f) $k(x) = \log_{8,2} x$

a) $1,2 > 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

b) $\frac{2}{3} < 1 \rightarrow g(x)$ es decreciente.

c) $7 > 1 \rightarrow h(x)$ es creciente.

d) $0,8 < 1 \rightarrow i(x)$ es decreciente.

e) $\sqrt{3} > 1 \rightarrow j(x)$ es creciente.

f) $8,2 > 1 \rightarrow k(x)$ es creciente.

012 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = -\log_2 x$

c) $y = \log_{\frac{4}{3}} x$

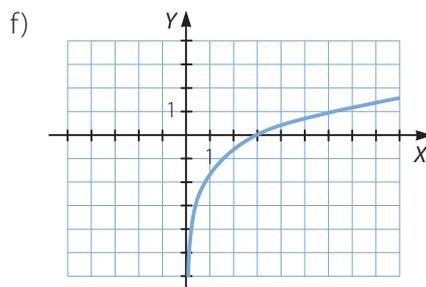
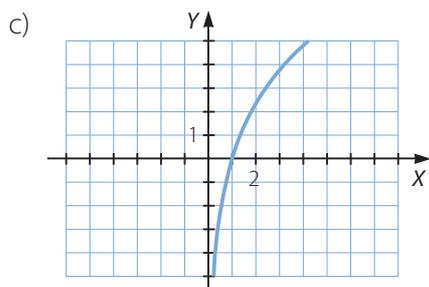
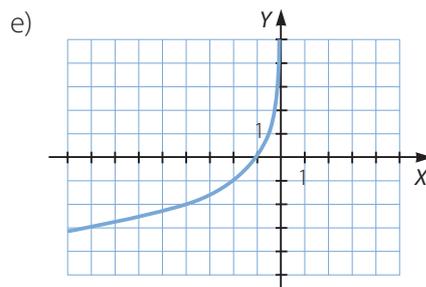
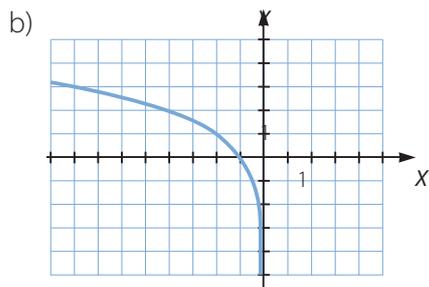
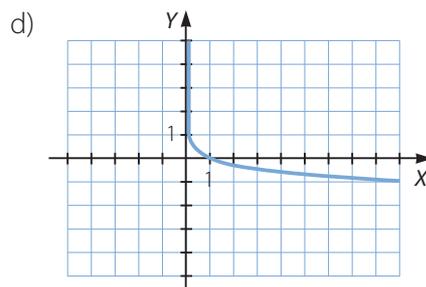
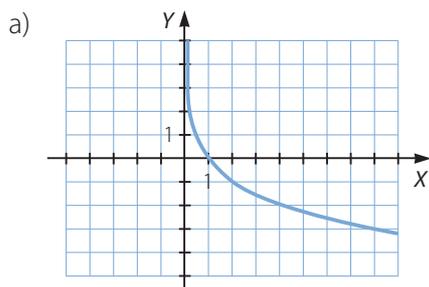
e) $y = -\log_2 (-x)$

b) $y = \log_2 (-x)$

d) $y = \log_{0,1} x$

f) $y = \log_2 \left(\frac{x}{3} \right)$

Funciones elementales



013 Describe las características de estas funciones.

a) $f(x) = \text{sen}(x - 1)$

b) $g(x) = (\text{sen } x) - 1$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-1, 1]$

La función es periódica, de período 2π radianes. No es simétrica.

Presenta máximos en $x = 1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y mínimos en $x = 1 + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\text{Dom } g = \mathbb{R} \quad \text{Im } g = [-2, 0]$

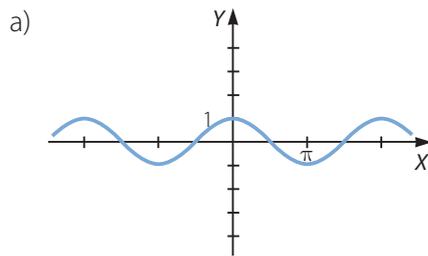
La función es periódica, de período 2π radianes. No es simétrica.

Presenta máximos en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y mínimos en $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

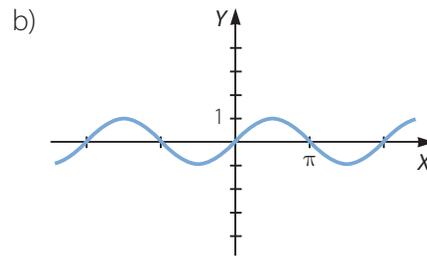
014 Representa las funciones y di qué observas.

a) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$



$$g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

015 Describe las características de estas funciones.

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $g(x) = \operatorname{tg}(x + 1)$

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

La función es periódica, de período π radianes.

Es siempre creciente y simétrica respecto del origen de coordenadas.

b) $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$

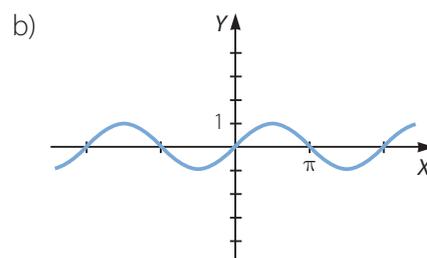
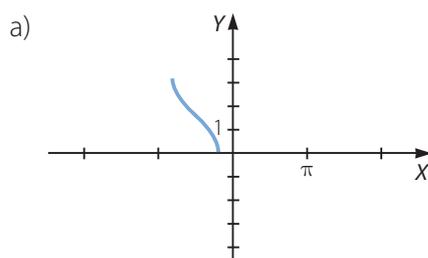
La función es periódica, de período π radianes.

Es siempre creciente y no es simétrica.

016 Representa las funciones inversas.

a) $f(x) = \operatorname{arc} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $g(x) = \operatorname{arc} \sin(x - \pi)$



017 Representa gráficamente esta función definida a trozos.

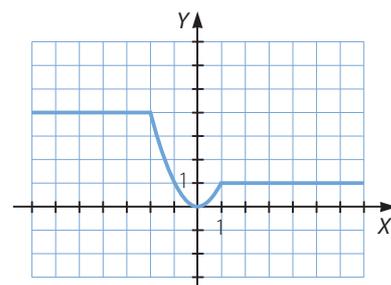
$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Describe sus principales características.

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ $\operatorname{Im} f = [0, 4]$

La función es continua, no es periódica ni simétrica.

Es decreciente en $(-2, 0)$ y es creciente en $(0, 1)$. Tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.



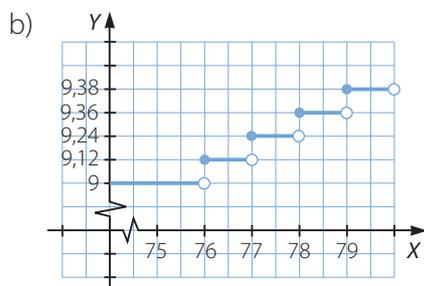
Funciones elementales

018 En un contrato mensual de telefonía móvil se factura a 0,12 € por minuto. Si el consumo no llega a 9 €, entonces se abona esa cantidad.

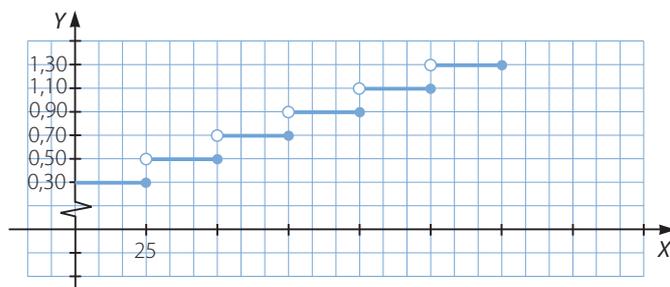
a) Halla la expresión de la función que relaciona el consumo, en minutos, y el importe de la factura mensual, en euros.

b) Representa la función.

$$f(x) = \begin{cases} 9 & \text{si } 0 \leq x < 76 \\ 9,12 & \text{si } 76 \leq x < 77 \\ 9,24 & \text{si } 77 \leq x < 78 \\ 9,36 & \text{si } 78 \leq x < 79 \\ 9,38 & \text{si } 79 \leq x < 80 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



019 El servicio de correos cobra 0,30 € por los primeros 25 g de envío y, a partir de esa cantidad, cobra 0,20 € por cada 25 g (o fracción) de peso extra. Representa la gráfica del coste del envío de cartas hasta 150 g.



020 La función que asocia a cada número su parte decimal es:

$$f(x) = x - [x]$$

Representa la función y analiza sus propiedades.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

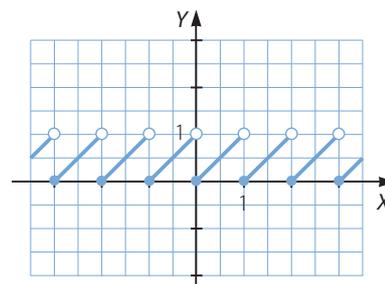
$$\text{Im } f = [0, 1)$$

La función no es continua. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

Es periódica, de período 1. No es simétrica.

Es creciente en $(k, k + 1)$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

No tiene máximos ni mínimos.



021
●○○

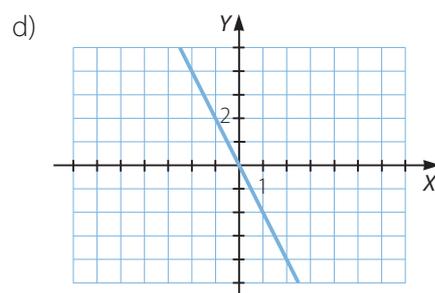
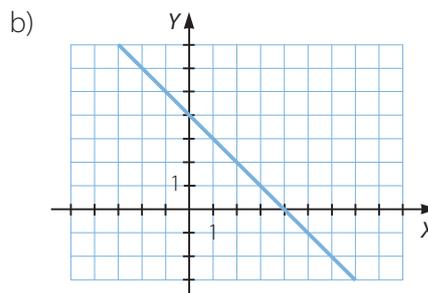
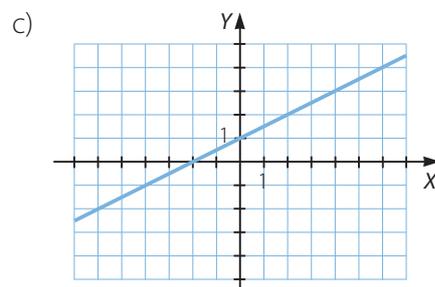
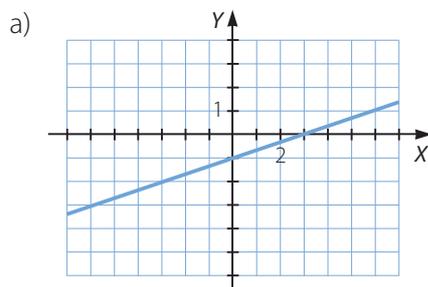
Representa, sin hacer las tablas de valores correspondientes, las funciones lineales y afines.

a) $y = \frac{x - 3}{3}$

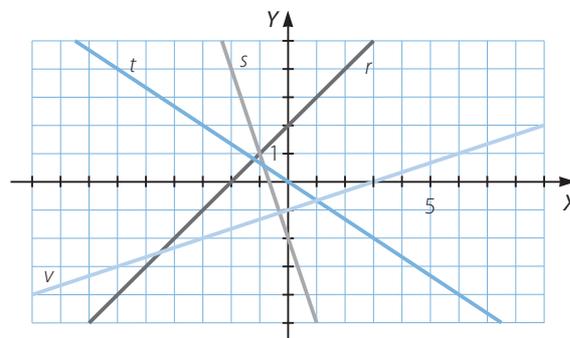
b) $y = -x + 4$

c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

d) $y = -2x$

022
●○○

Escribe la expresión algebraica de las funciones representadas, y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.



$r: y = x + 2$

$m = 1$

$n = 2$

$s: y = -3x - 2$

$m = -3$

$n = -2$

$t: y = -\frac{2}{3}x$

$m = -\frac{2}{3}$

$n = 0$

$u: y = \frac{1}{3}x - 1$

$m = \frac{1}{3}$

$n = -1$

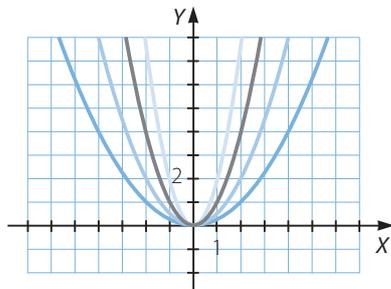
Funciones elementales

023

•○○

Representa las funciones en los mismos ejes de coordenadas, y relaciona la abertura de las ramas de cada parábola con el coeficiente de x^2 .

a) $y = x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$ c) $y = 2x^2$ d) $y = \frac{1}{4}x^2$



La abertura es menor cuando el coeficiente es mayor.

024

•○○

Halla los vértices y los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ b) $g(x) = -2x^2 + x - 1$ c) $h(x) = -x^2 - 2$

a) $V(1, 1)$

No tiene puntos de corte con el eje X. Punto de corte con el eje Y: $(0, 2)$

b) $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$

No tiene puntos de corte con el eje X. Punto de corte con el eje Y: $(0, -1)$

c) $V(0, -2)$

No tiene puntos de corte con el eje X. Punto de corte con el eje Y: $(0, -2)$

025

•○○

Haz la representación gráfica de las siguientes funciones cuadráticas, indicando el vértice y los cortes con los ejes.

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 3x$

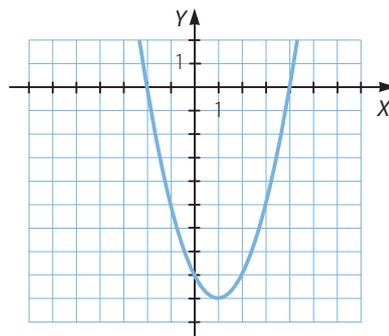
c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = 2x^2 + 3x - 2$

a) $V(1, -9)$

Puntos de corte con el eje X: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

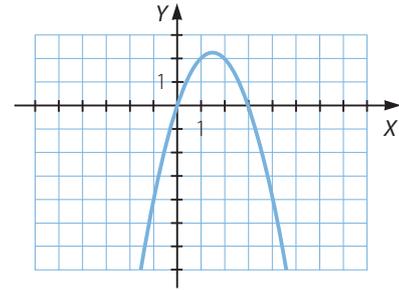
Punto de corte con el eje Y: $(0, -8)$



b) $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos de corte con el eje X: $(0, 0)$ y $(3, 0)$

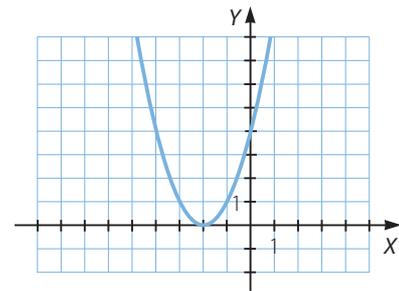
Punto de corte con el eje Y: $(0, 0)$



c) $V(-2, 0)$

Punto de corte con el eje X: $(-2, 0)$

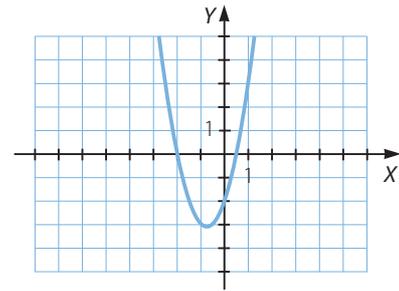
Punto de corte con el eje Y: $(0, 4)$



d) $V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

Puntos de corte con el eje X: $(-2, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -2)$



026
•○○

Representa la función $y = x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de estas funciones polinómicas.

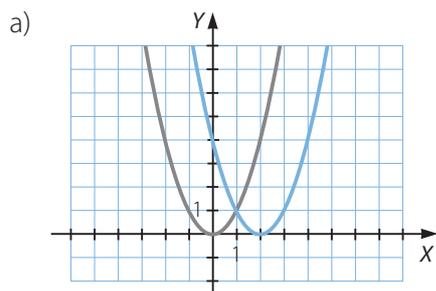
a) $y = (x - 2)^2$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = (x + 3)^2$

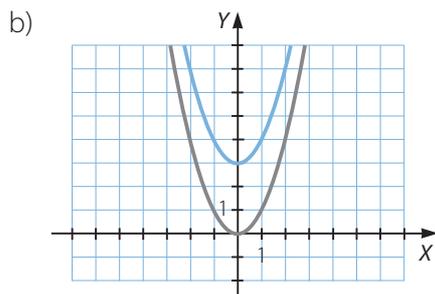
d) $y = x^2 - 4$

¿Qué relación guardan las gráficas de las últimas cuatro funciones con la gráfica de la primera?

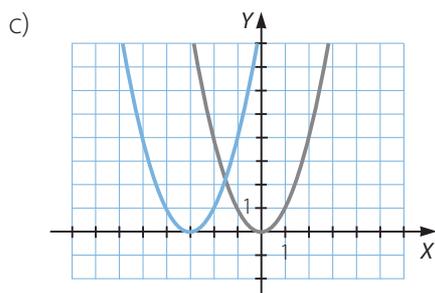


La función se traslada horizontalmente 2 unidades a la derecha.

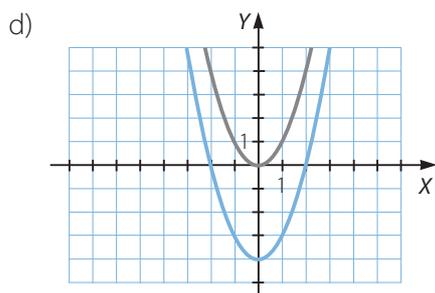
Funciones elementales



La función se traslada verticalmente 3 unidades hacia arriba.



La función se traslada horizontalmente 3 unidades a la izquierda.



La función se traslada verticalmente 4 unidades hacia abajo.

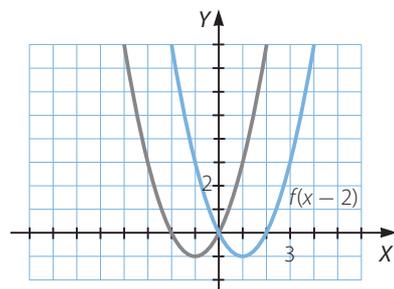
027
●●○

Haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x$. Obtén la expresión algebraica de las siguientes funciones y represéntalas.

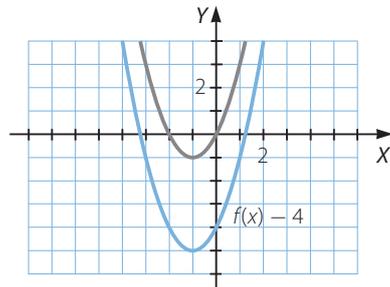
- | | |
|---------------|---------------|
| a) $f(x - 2)$ | c) $f(x + 1)$ |
| b) $f(x) - 4$ | d) $f(x) + 2$ |

¿Hay alguna relación entre estas gráficas?

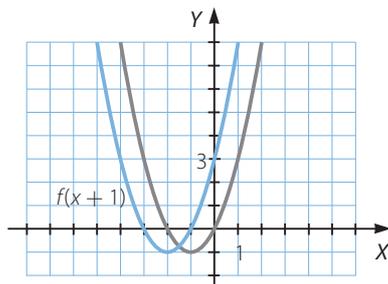
a) $f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) = x^2 - 2x$



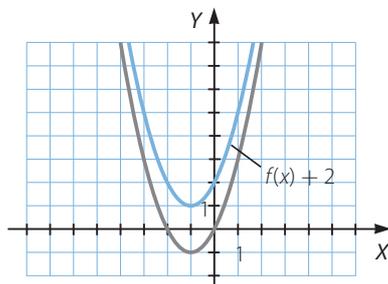
b) $f(x) - 4 = x^2 + 2x - 4$



c) $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$



d) $f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$



028

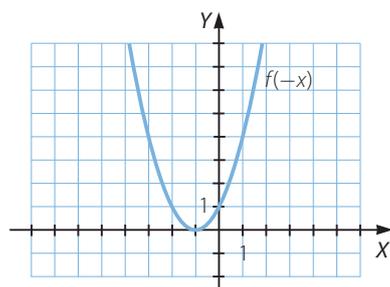
Considera las siguientes funciones.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad g(x) = (x - 1)^2 \quad h(x) = 3x$$

Calcula la expresión algebraica de la función que se indica en cada apartado, y represéntala gráficamente.

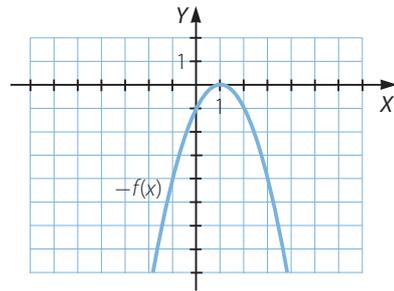
- a) $f(-x)$ c) $g(-x)$ e) $h(-x)$
 b) $-f(x)$ d) $-g(x)$ f) $-h(x)$

a) $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 1 = x^2 + 2x + 1$

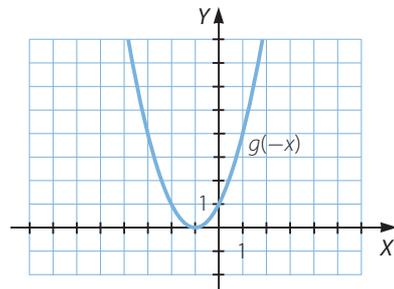


Funciones elementales

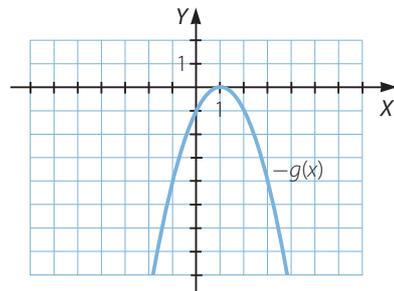
b) $-f(x) = -x^2 + 2x - 1$



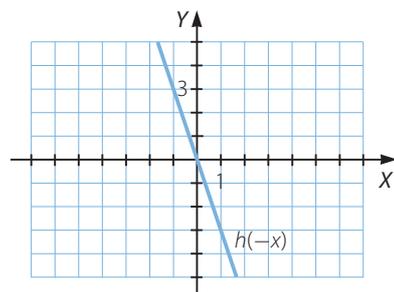
c) $g(-x) = (-x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1$



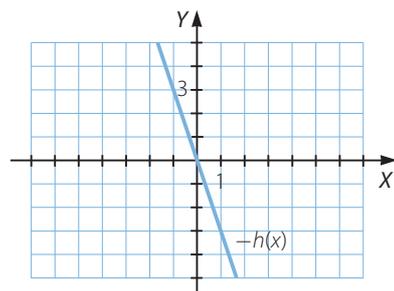
d) $-g(x) = -(x - 1)^2 = -x^2 + 2x - 1$



e) $h(-x) = 3(-x) = -3x$



f) $-h(x) = -3x$



029

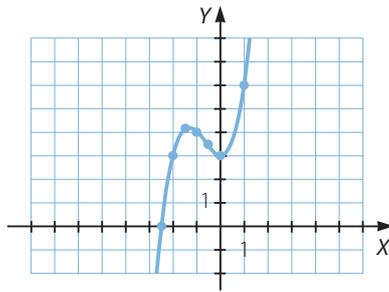
Construye la tabla de valores y dibuja la gráfica de las funciones.

a) $y = x^3 + 2x^2 + 3$

b) $y = -x^3 + 6x + 1$

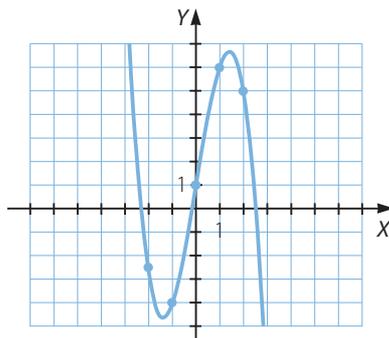
a)

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	2
f(x)	-0,125	3	4,125	4	3,375	3	6	19



b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	-3	-4	1	6	5	-8



030

Halla los puntos donde cortan las siguientes funciones polinómicas al eje X.

a) $y = 3x + 9$

d) $y = 8x^2 + 10x - 3$

b) $y = -2x + 5$

e) $y = 2x^2 + x + 3$

c) $y = 6x^2 + 17x - 3$

a) $x = -3$

d) $x = \frac{1}{4}, x = -\frac{3}{2}$

b) $x = \frac{5}{2}$

e) No tiene puntos de corte.

c) $x = -3, x = \frac{1}{6}$

031

Halla los puntos donde estas funciones cortan al eje X.

a) $y = (x - 1)(x + 2)$

b) $y = (2x - 1)^2$

c) $y = (x - 2)(x + 3)(2x + 1)$

a) $x = 1, x = -2$

b) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = 2, x = -3, x = -\frac{1}{2}$

Funciones elementales

032
●●○

Representa las siguientes funciones polinómicas, indicando los puntos de corte con los ejes.

a) $y = 4x^2 + 4x + 1$

d) $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

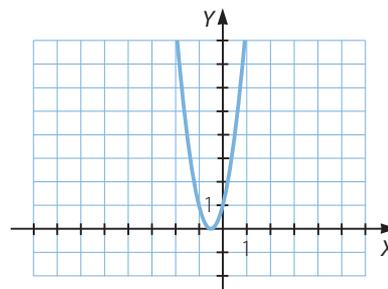
b) $y = x^3 - x^2 - 9x + 9$

e) $y = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

c) $y = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

a) Punto de corte con el eje X: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

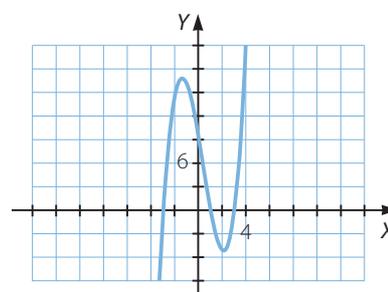
Punto de corte con el eje Y: $(0, 1)$



b) Puntos de corte con el eje X:

$(-3, 0), (1, 0)$ y $(3, 0)$

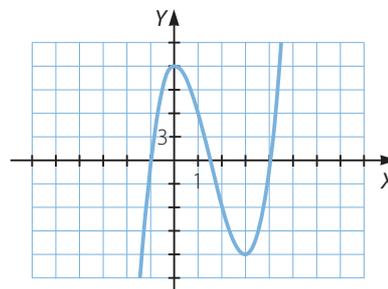
Punto de corte con el eje Y: $(0, 9)$



c) Puntos de corte con el eje X:

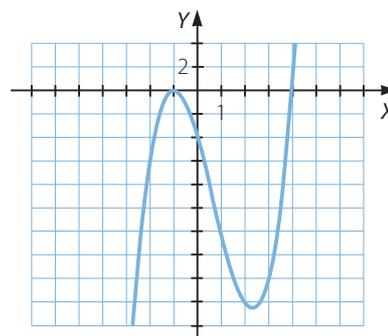
$(-1, 0), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 12)$



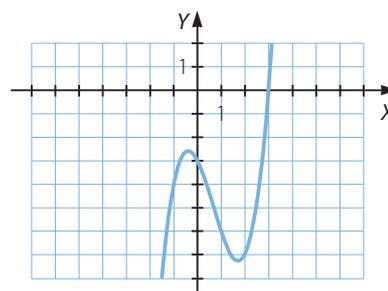
d) Puntos de corte con el eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 4)$



e) Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -3)$



033
●○○

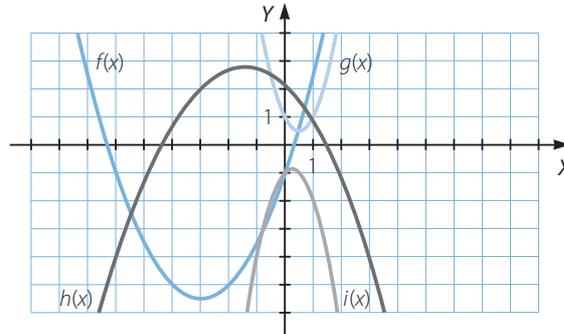
Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $y = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

c) $y = -\frac{x^2}{3} - x + 2$

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$

d) $y = -2x^2 + x + 1$

a) $y = f(x)$, porque si $a = \frac{1}{2} > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = -1$.b) $y = h(x)$, pues si $a = 2 > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = 1$.c) $y = g(x)$, porque si $a = -\frac{1}{3} < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = 2$.d) $y = i(x)$, ya que si $a = -2 < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = -1$.034
●●●Representa funciones de la forma $y = ax^2 - 3x + 2$ con distintos valores de a , y estudia su variación en función del parámetro.

Respuesta abierta.

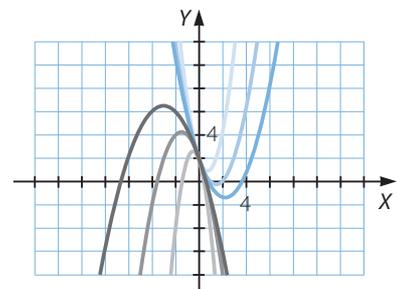
Si $a = 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2$

Si $a = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$

Si $a = -\frac{1}{2} \rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

Si $a = -1 \rightarrow i(x) = -x^2 - 3x + 2$

Si $a = -3 \rightarrow j(x) = -3x^2 - 3x + 2$

La abertura de las parábolas es menor cuanto mayor es el valor absoluto de a .035
●●●Representa funciones de la forma $y = x^2 + bx + 2$ con distintos valores de b , y explica cómo varían en función del parámetro.

Respuesta abierta.

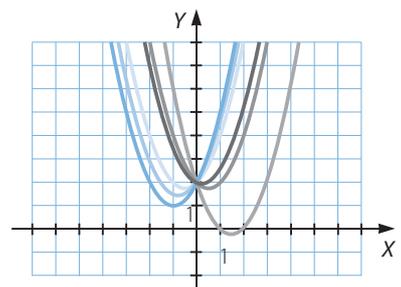
Si $b = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + x + 2$

Si $b = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

Si $b = -\frac{1}{2} \rightarrow h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

Si $b = -1 \rightarrow i(x) = x^2 - x + 2$

Si $b = -3 \rightarrow j(x) = x^2 - 3x + 2$

La abertura de las parábolas es mayor cuanto mayor es el valor absoluto de b .

Funciones elementales

036



Representa funciones de la forma $y = x^2 + 2x + c$ con distintos valores de c , y analiza su variación en función del parámetro.

Respuesta abierta.

$$\text{Si } c = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Si } c = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

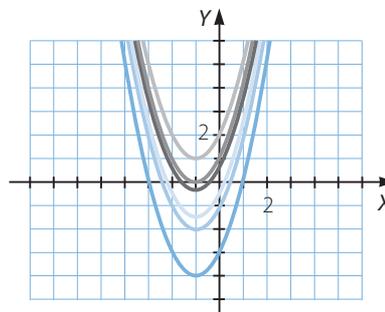
$$\text{Si } c = 2 \rightarrow h(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$\text{Si } c = -\frac{1}{2} \rightarrow i(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } c = -1 \rightarrow j(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$\text{Si } c = -3 \rightarrow k(x) = x^2 + 2x - 3$$

Todas las parábolas tienen la misma abertura. Se trasladan verticalmente, hacia arriba si c es positivo, y hacia abajo si c es negativo.



037



Escribe funciones con las siguientes características.

- Una parábola que corte al eje X en $x = 3$ y $x = 5$.
- Una parábola que corte al eje X en $x = -2$ y $x = 1$.
- Una parábola que corte dos veces al eje X en $x = 2$.
- Una función cúbica que corte al eje X en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.
- Una función cúbica que corte al eje X dos veces en $x = 2$ y una vez en $x = -1$.
- Una función cúbica que corte una vez al eje X en $x = 5$.
- Una función polinómica de cuarto grado que corte al eje X en $x = -1$, $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$.
- Una función de cuarto grado que solo corte dos veces al eje de abscisas, en $x = -2$ y en $x = 5$.

Respuesta abierta.

$$\text{a) } y = (x - 3)(x - 5)$$

$$\text{e) } y = (x - 2)^2(x + 1)$$

$$\text{b) } y = (x + 2)(x - 1)$$

$$\text{f) } y = (x - 5)^3$$

$$\text{c) } y = (x - 2)^2$$

$$\text{g) } y = (x + 1)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$$

$$\text{d) } y = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{h) } y = (x + 2)^2(x - 5)^2$$

038



Explica las diferentes situaciones que pueden producirse al determinar dónde corta al eje X una función polinómica de cuarto grado.

Para determinar los puntos de corte con el eje X se iguala la expresión de la función a cero. Entonces se obtiene una ecuación polinómica de cuarto grado que puede tener como máximo cuatro soluciones. Por tanto, la función puede no cortar el eje, o cortarlo una, dos, tres o cuatro veces, según el número de raíces del polinomio.

039
●●○

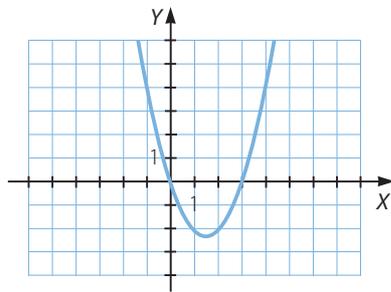
Obtén la expresión algebraica y representa la función cuadrática que pasa por los puntos $A(1, -2)$, $B(2, -2)$ y $C(3, 0)$.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = -2 \\ 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = -2 \\ \rightarrow 3a + b = 0 \\ 2a = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{array}$$

La expresión de la función es: $f(x) = x^2 - 3x$

040
●●●

Halla y representa las funciones polinómicas de grado mínimo que pasan por los siguientes puntos.

a) $A(0, 0)$, $B\left(5, \frac{5}{2}\right)$ y $C(-2, -1)$ d) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(4, 1)$

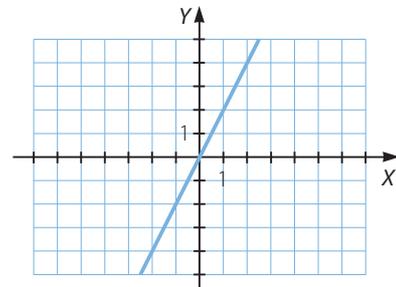
b) $A(-1, 0)$, $B(0, -1)$ y $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e) $A(-2, 3)$, $B\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $C(2, 2)$

c) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 0)$ f) $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$ y $C(4, -3)$

a) Los puntos A , B y C están alineados.

La función que pasa por ellos es:

$$f(x) = 2x$$



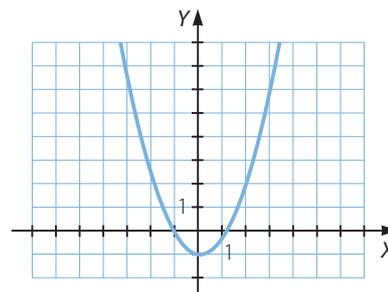
b) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ c = -1 \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a - b = 1 \\ 3a + 2b = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{array}$$

Funciones elementales

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - 1$$

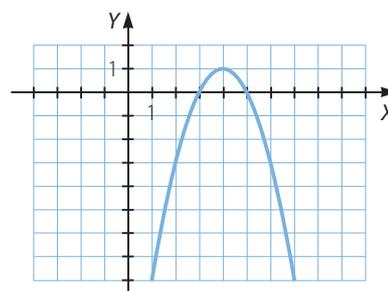


c) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b = 1 \\ 16a + 2b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b = 1 \\ 2a = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -15 \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = -x^2 + 8x - 15$$



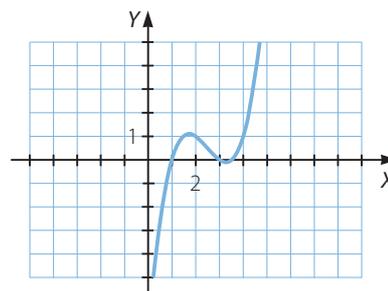
d) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = 1 \\ 13a + 4b + c = 0 \\ 63a + 15b + 3c = 1 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = 1 \\ 6a + b = -1 \\ 21a + 3b = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = 1 \\ 6a + b = -1 \\ 3a = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} \\ b = -5 \\ c = \frac{34}{3} \\ d = -7 \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{34}{3}x - 7$$

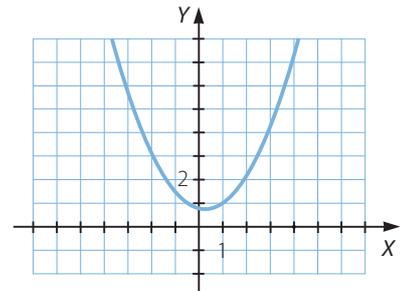


e) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} 4a - 2b + c = 3 \\ \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a - 2b + c = 3 \\ 8a + 12b + 18c = 27 \\ 4b = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 8a + 2c = 5 \\ 8a + 18c = 30 \\ b = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{15}{64} \\ c = \frac{25}{16} \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{15}{64}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{25}{16}$$

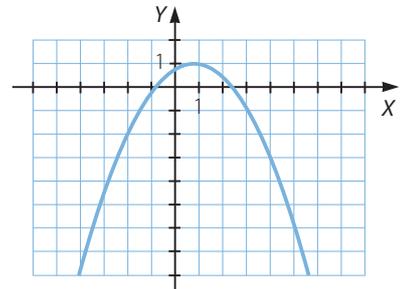


f) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} 4a - 2b + c = -2 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = -3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 3a - 3b = -3 \\ 15a + 3b = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ a - b = -1 \\ 18a = -7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -\frac{7}{18} \\ b = \frac{11}{18} \\ c = \frac{7}{9} \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = -\frac{7}{18}x^2 + \frac{11}{18}x + \frac{7}{9}$$



041
●○○

¿Cuál es el dominio de estas funciones racionales?

a) $f(x) = \frac{7}{(x+7)(x-4)}$

b) $g(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-10}$

a) $\mathbb{R} - \{-7, 4\}$

b) $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$

042
●●○

Dada la función $f(x) = \frac{2}{x}$, determina la expresión algebraica

de las siguientes funciones.

a) $g(x) = f(x-3)$

c) $g(x) = f(x) - 2$

e) $g(x) = f(-x)$

b) $g(x) = f(x+1)$

d) $g(x) = f(x) + 3$

f) $g(x) = -f(x)$

a) $g(x) = \frac{2}{x-3}$

c) $g(x) = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2-2x}{x}$

e) $g(x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x}$

b) $g(x) = \frac{2}{x+1}$

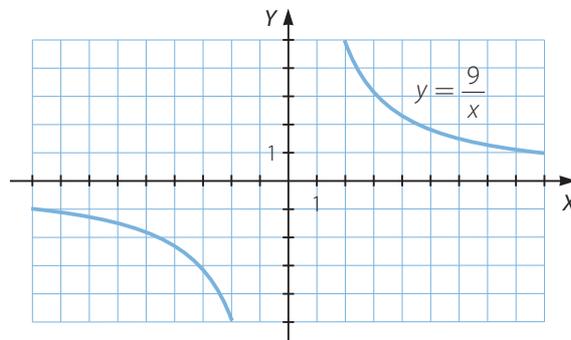
d) $g(x) = \frac{2}{x} + 3 = \frac{2+3x}{x}$

f) $g(x) = -\frac{2}{x}$

Funciones elementales

043
●●○

Observa la gráfica de la función $y = \frac{9}{x}$.



Representa las siguientes funciones.

a) $y = \frac{9}{x-3}$

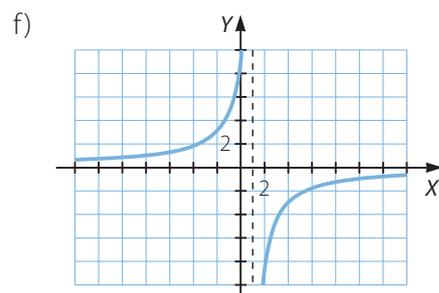
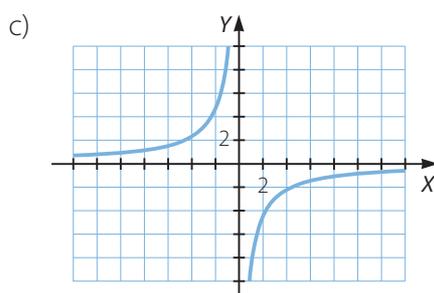
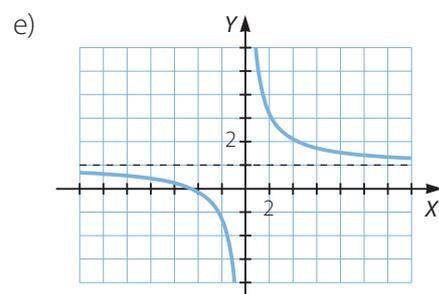
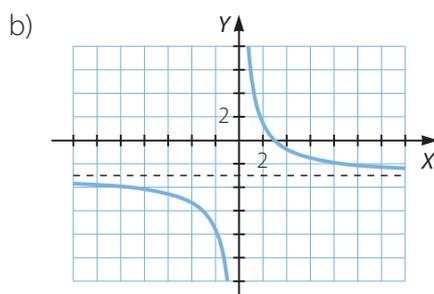
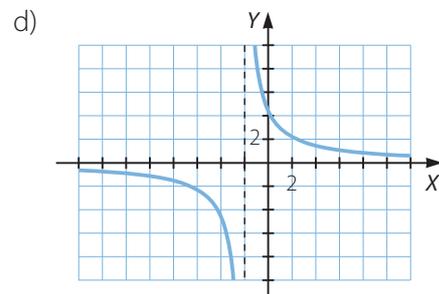
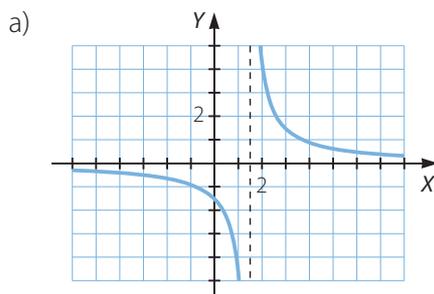
c) $y = -\frac{9}{x}$

e) $y = \frac{9}{x} + 2$

b) $y = \frac{9}{x} - 3$

d) $y = \frac{9}{x+2}$

f) $y = -\frac{9}{x-1}$



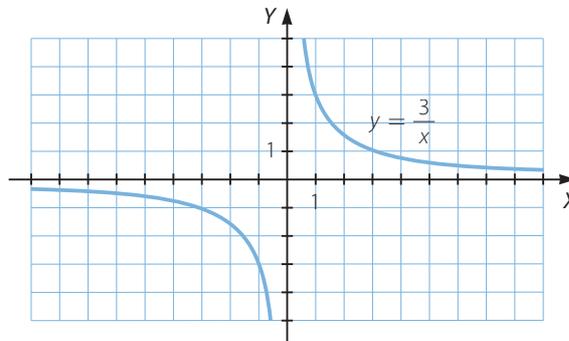
044
●●○

Sin representarlas, escribe la relación que hay entre las gráficas de estas funciones

y la de $y = \frac{12}{x}$.

$$\text{a) } y = \frac{12}{x+4} \quad \text{b) } y = \frac{12}{x} - 2 \quad \text{c) } y = \frac{12}{x} + 1 \quad \text{d) } y = -\frac{12}{x}$$

- a) La función se desplaza horizontalmente 4 unidades a la izquierda.
 b) La función se desplaza verticalmente 2 unidades hacia abajo.
 c) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.
 d) La función es simétrica a la inicial y el eje de simetría es el eje de ordenadas.

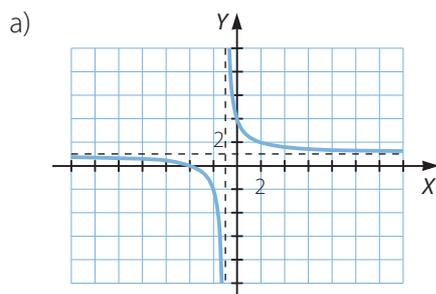
045
●●●La gráfica de la función $y = \frac{3}{x}$ es:Encuentra la relación que tienen estas funciones con la función $y = \frac{3}{x}$ y represéntalas.

$$\text{a) } y = \frac{x+4}{x+1}. \text{ Ten en cuenta que: } y = \frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}.$$

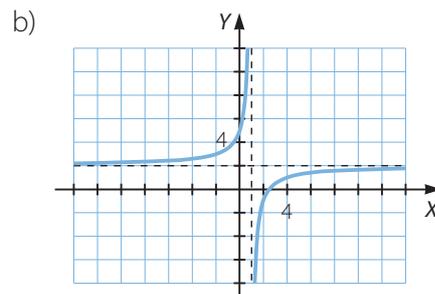
$$\text{b) } y = \frac{2x-5}{x-1}$$

$$\text{c) } y = \frac{-2x+1}{x+1}$$

$$\text{d) } y = \frac{-x-5}{x+2}$$

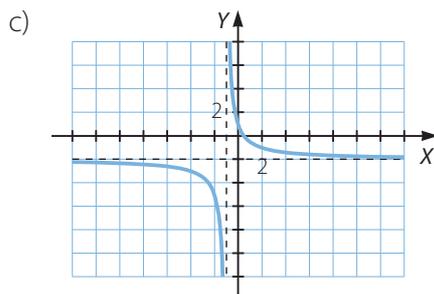


$$y = \frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$$

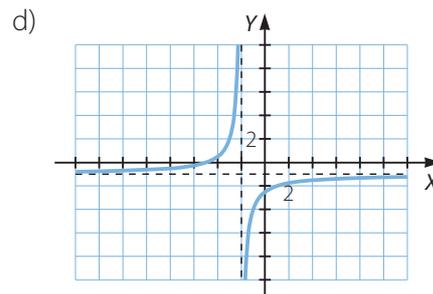


$$y = \frac{2x-5}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1}$$

Funciones elementales



$$y = \frac{-2x + 1}{x + 1} = \frac{3}{x + 1} - 2$$



$$y = \frac{-x - 5}{x + 2} = -1 - \frac{3}{x + 2}$$

046

●○○

Determina el dominio de estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{x} + 7$

c) $h(x) = \sqrt{x + 7}$

b) $g(x) = -\sqrt{x} + 5$

d) $i(x) = -\sqrt{x + 5}$

a) $\text{Dom } f = [0, +\infty)$

c) $\text{Dom } h = [-7, +\infty)$

b) $\text{Dom } g = [0, +\infty)$

d) $\text{Dom } i = [-5, +\infty)$

047

●○○

Halla el dominio de las siguientes funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^4 - 81}$

c) $h(x) = \sqrt[4]{1 - x^3}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

c) $\text{Dom } h = (-\infty, -1]$

048

●●○

¿Cuál es el dominio de estas funciones con radicales?

a) $f(x) = \frac{7x}{2 - \sqrt{x - 5}}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{3x - 1}}{4 - \sqrt{x + 1}}$

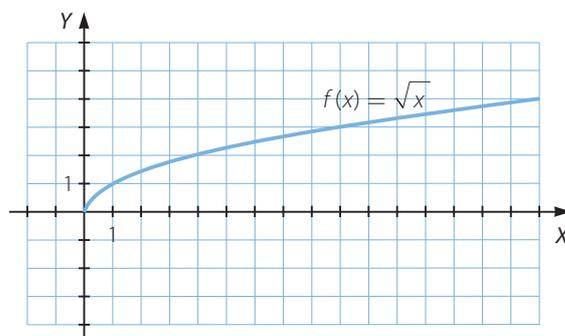
a) $\text{Dom } f = [5, 9) \cup (9, +\infty)$

b) $\text{Dom } g = [-1, 15) \cup (15, +\infty)$

049

●●○

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es:



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 2)$

c) $1 + f(x)$

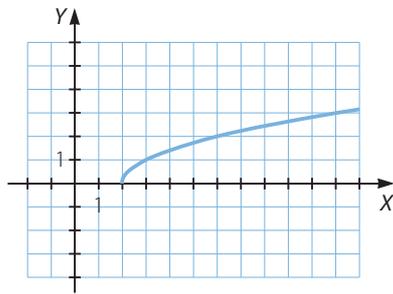
e) $-1 - f(x)$

b) $f(x + 3)$

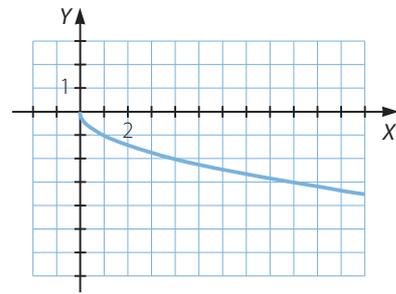
d) $-f(x)$

f) $f(x) - 2$

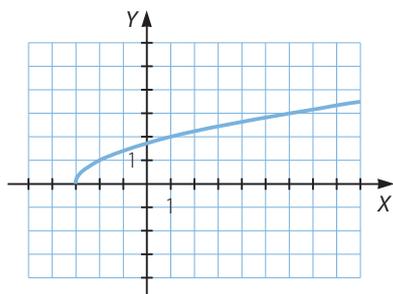
a) $f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$



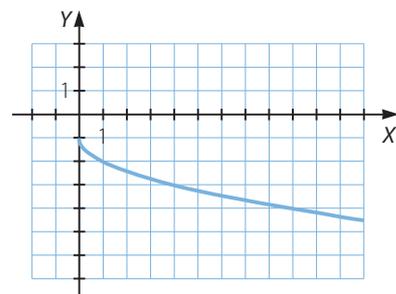
d) $-f(x) = -\sqrt{x}$



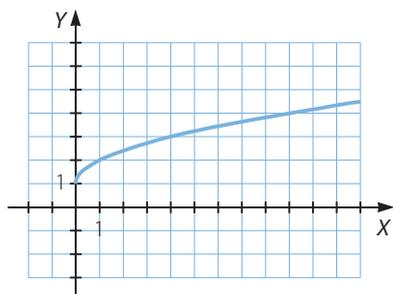
b) $f(x + 3) = \sqrt{x + 3}$



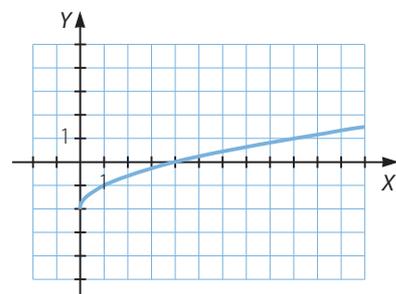
e) $-1 - f(x) = -1 - \sqrt{x}$



c) $1 + f(x) = 1 + \sqrt{x}$



f) $f(x) - 2 = \sqrt{x} - 2$



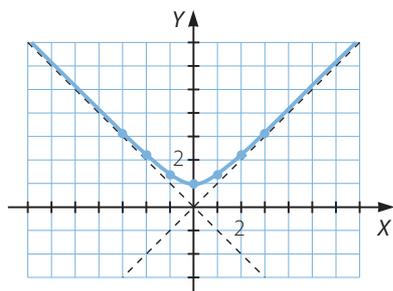
050

Con ayuda de la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Determina su dominio y su recorrido.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2,23	1,41	1	1,41	2,23

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [1, +\infty)$



Funciones elementales

051

••○

A partir de la gráfica de la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones con radicales.

a) $y = 1 + \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = 1 - \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = -2 + \sqrt{x^2 + 1}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

- a) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.
- b) La función se desplaza verticalmente 2 unidades hacia abajo.
- c) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia abajo.
- d) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba y se dibuja abierta hacia abajo con la misma abertura.

052

••○

Calcula el dominio de estas funciones.

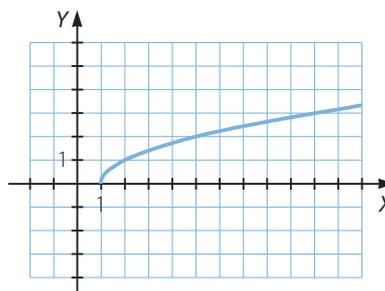
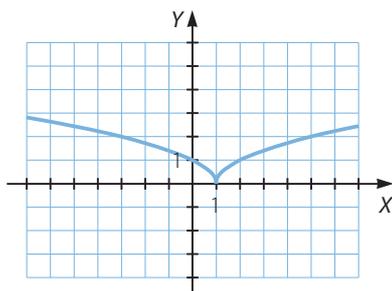
a) $y = \sqrt[4]{(x - 1)^2}$

b) $y = \sqrt{x - 1}$

Utiliza el resultado para probar que las funciones no son iguales y represéntalas gráficamente.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = [1, +\infty)$

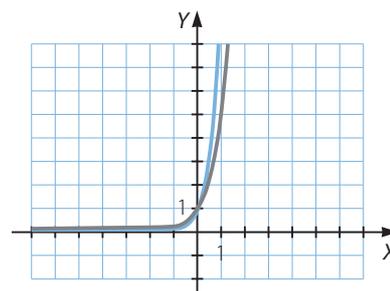


053

••○

Representa la gráfica de las funciones $y = 2^x$ e $y = 3^x$. A partir de ellas, razona cómo será la gráfica de las funciones $y = 5^x$ e $y = 10^x$.

Las gráficas de las funciones $y = 5^x$ e $y = 10^x$ también son crecientes y pasan por el punto $(0, 1)$, pero su crecimiento es más lento si $x < 0$, y es más rápido si $x > 0$, cuanto mayor es el valor de la base.



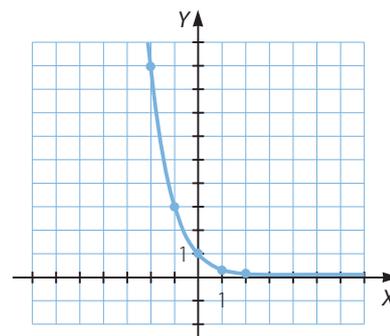
054

••○

Ayúdate de la calculadora y realiza una tabla de valores para representar

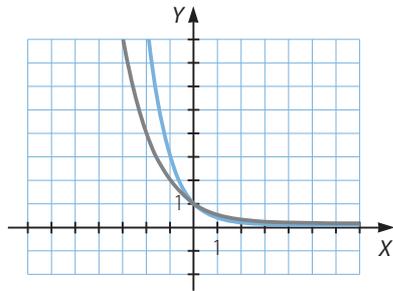
la función exponencial $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	3	1	0,33	0,11



055
●○○

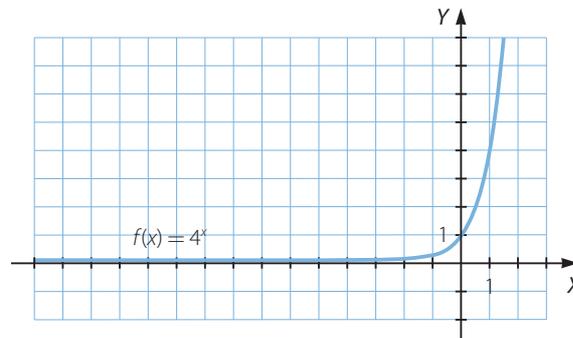
Representa las funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. A partir de las gráficas, ¿cómo serán las gráficas de las funciones $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$?



Las gráficas de las funciones $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ también son decrecientes y pasan por el punto $(0, 1)$, pero su decrecimiento es más lento si $x < 0$, y es más rápido si $x > 0$, cuanto menor es el valor de la base.

056
●○○

Esta es la gráfica de la función exponencial $f(x) = 4^x$.



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 3)$

c) $4 + f(x)$

e) $2 - f(x)$

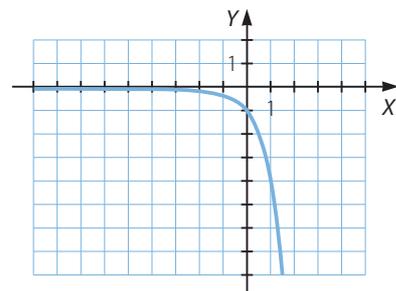
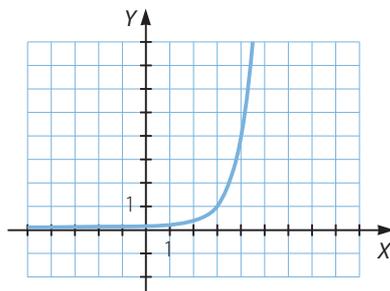
b) $f(x + 1)$

d) $-f(x)$

f) $f(x) - 2$

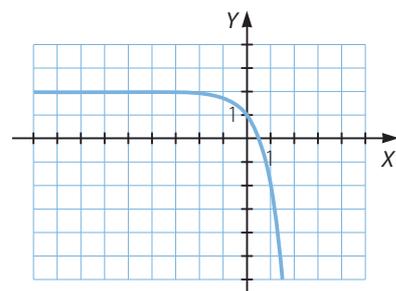
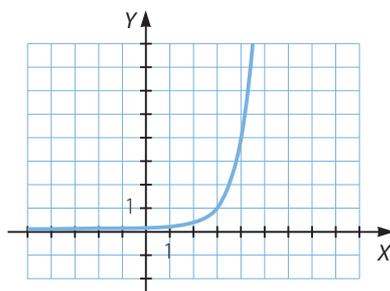
a) $f(x - 3) = 4^{x-3}$

c) $4 + f(x) = 4 + 4^x$



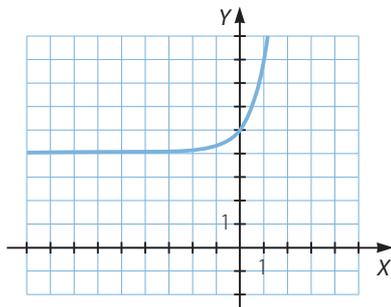
b) $f(x + 1) = 4^{x+1}$

d) $-f(x) = -4^x$

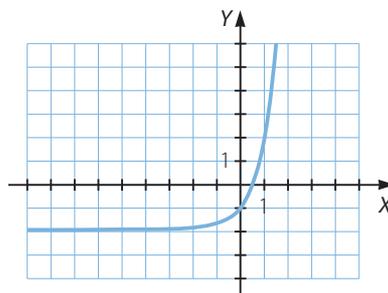


Funciones elementales

e) $2 - f(x) = 2 - 4^x$



f) $f(x) - 2 = 4^x - 2$



057
●○○

A partir de la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$

c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

e) $y = 3^{x+2}$

b) $y = 3^x$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

a) La función se traslada horizontalmente 3 unidades hacia la derecha.

$$b) y = 3^x = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^x = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^{-1}$$

La función es simétrica a ella y el eje de ordenadas es el eje de simetría de ambas.

$$c) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^{-1}$$

La función es simétrica a ella y el eje de ordenadas es el eje de simetría de ambas. Coincide con la anterior.

d) La función se traslada horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda.

$$e) y = 3^{x+2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{x+2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right]^{-1}$$

Primero se traslada horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda y, después, se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de ordenadas.

$$f) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}\right]^{-1}$$

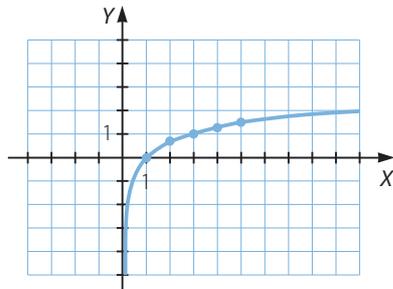
Primero se traslada horizontalmente 2 unidades hacia la derecha y, después, se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de ordenadas.

058

●○○

Con la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función logarítmica $y = \log_3 x$.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0,63	1	1,26	1,46



059

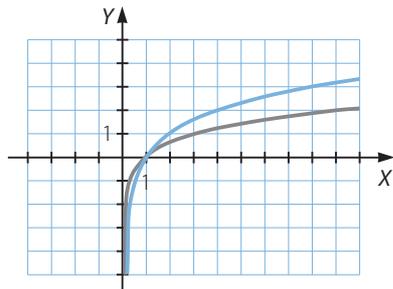
●○○

Representa la gráfica de las funciones.

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_3 x$$

Deduce, a partir de ellas, cómo será la gráfica de las funciones $y = \log_5 x$ e $y = \log x$.



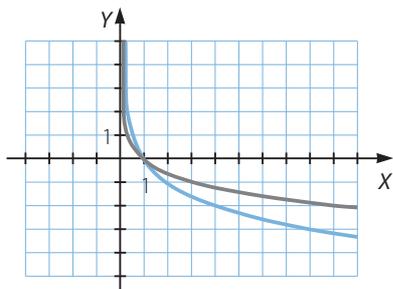
Las gráficas de las funciones $y = \log_5 x$ e $y = \log x$ también son crecientes y pasan por el punto $(1, 0)$, pero su crecimiento es más rápido si $0 < x < 1$, y es más lento si $x > 1$, cuanto mayor es el valor de la base.

060

●○○

Representa las funciones $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

¿Cómo serán las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{10}} x$?

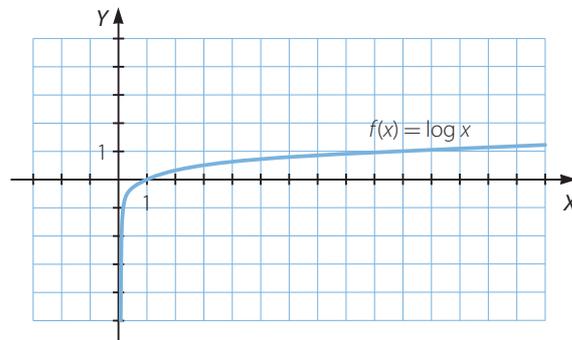


Las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ también son decrecientes y pasan por el punto $(1, 0)$, pero su decrecimiento es más rápido si $0 < x < 1$, y es más lento si $x > 1$, cuanto menor es el valor de la base.

Funciones elementales

061
●●○

Esta es la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log x$.



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 4)$

c) $4 + f(x + 1)$

e) $2 - f(x - 2)$

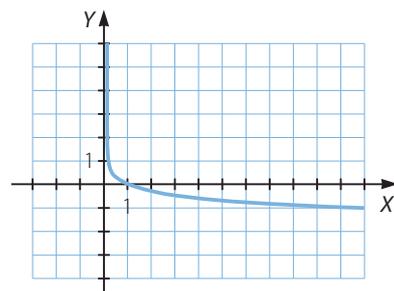
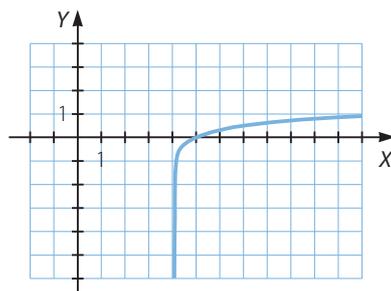
b) $f(x + 3)$

d) $-f(x)$

f) $f(2 - x)$

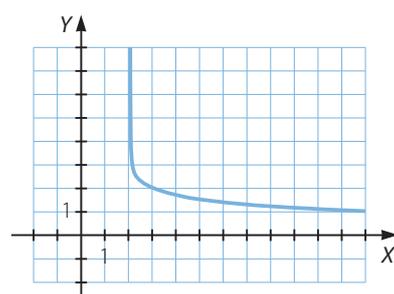
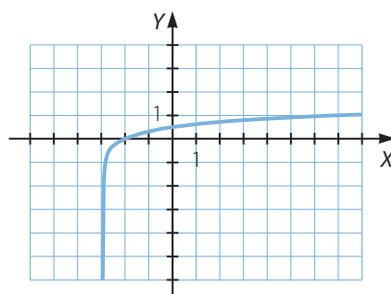
a) $f(x - 4) = \log(x - 4)$

d) $-f(x) = -\log x$



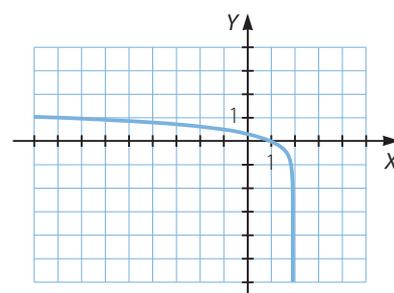
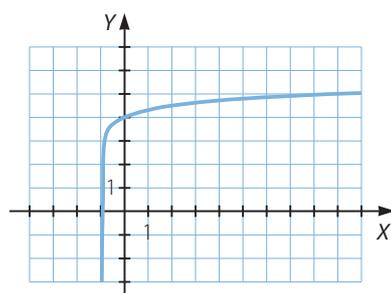
b) $f(x + 3) = \log(x + 3)$

e) $2 - f(x - 2) = 2 - \log(x - 2)$



c) $4 + f(x + 1) = 4 + \log(x + 1)$

f) $f(2 - x) = \log(2 - x)$



062

A partir de la gráfica de la función logarítmica $y = \log_3 x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \log_3 3x$

c) $y = \log_3 \left(\frac{1}{x} \right)$

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{x} \right)$

f) $y = \log_3 \left(\frac{x}{9} \right)$

a) $y = \log_3 3x = 1 + \log_3 x$

La función se traslada verticalmente 1 unidad hacia arriba.

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{3^{-1}} x$

La función es simétrica a ella y el eje de abscisas es el eje de simetría de ambas.

c) La función es simétrica a ella y el eje de abscisas es el eje de simetría de ambas. Coincide con la anterior.

d) $y = \log_3 \left(\frac{3}{x} \right) = 1 - \log_3 x$

Primero se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de abscisas y, después, se traslada verticalmente 1 unidad hacia arriba.

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x = \log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} x = -1 + \log_{3^{-1}} x$

Primero se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de abscisas y, después, se traslada verticalmente 1 unidad hacia abajo.

f) $y = \log_3 \left(\frac{x}{9} \right) = \log_3 x - 2$

La función se traslada verticalmente 2 unidades hacia abajo.

063

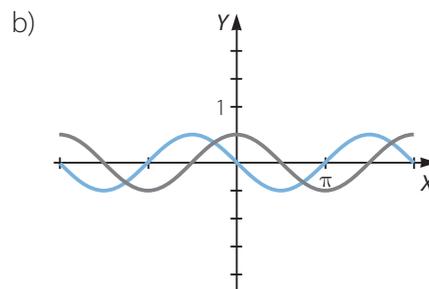
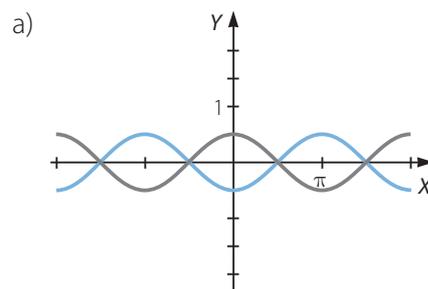
Dibuja la gráfica de $y = \cos x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = -\cos x$

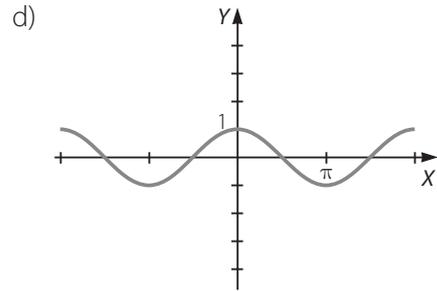
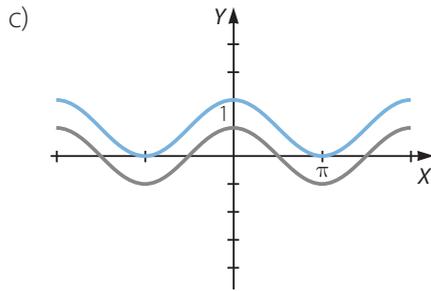
c) $y = 1 + \cos x$

b) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

d) $y = \cos(-x)$



Funciones elementales



064
●●○

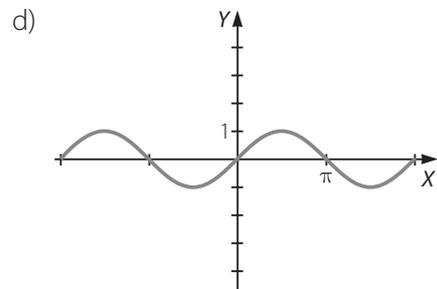
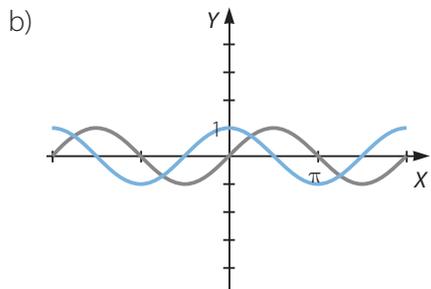
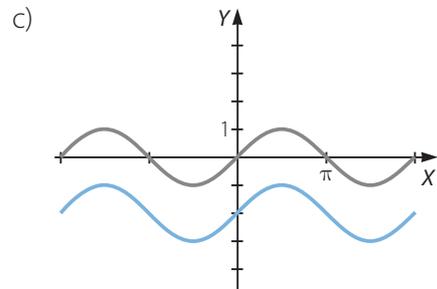
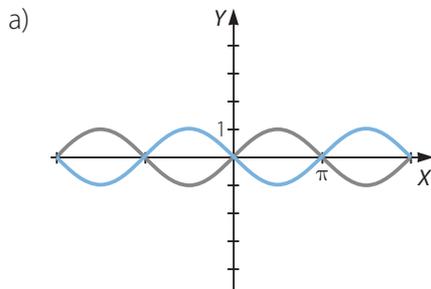
Dibuja la gráfica de $y = \text{sen } x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de estas funciones.

a) $y = -\text{sen } x$

c) $y = -2 + \text{sen } x$

b) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $y = -\text{sen}(-x)$



065
●●○

Realiza una gráfica y estudia las características de estas funciones.

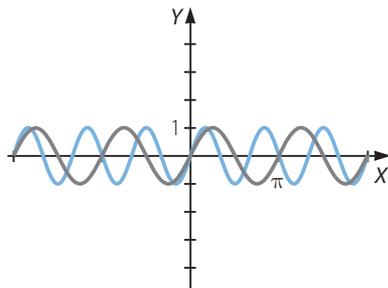
$y = \text{sen } 2x$

$y = \text{sen } 3x$

A partir de lo anterior explica cómo serán las gráficas de las funciones:

a) $y = \text{sen } 4x$

b) $y = \text{sen } 6x$



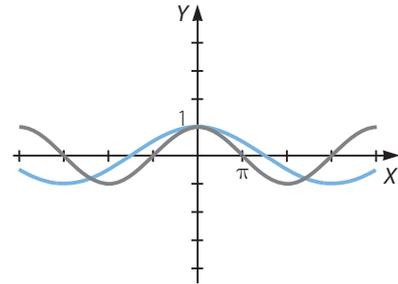
Las gráficas de las funciones $y = \text{sen } 4x$ e $y = \text{sen } 6x$ tienen el mismo dominio y recorrido y son periódicas, pero el período es mayor cuanto mayor es el valor por el que se multiplica la variable independiente x .

066
●●○

Representa y estudia las características de estas funciones.

$$y = \cos \frac{x}{2} \qquad y = \cos \frac{x}{3}$$

Explica, a partir del estudio anterior, cómo serán las gráficas de las siguientes funciones.



a) $y = \cos \frac{x}{5}$ b) $y = \cos \frac{x}{6}$

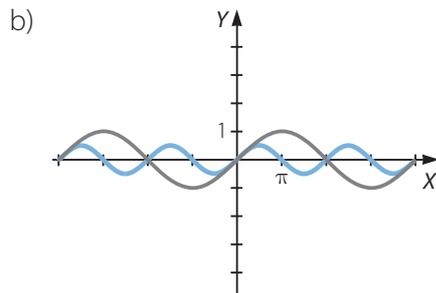
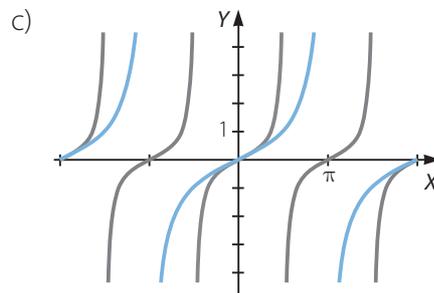
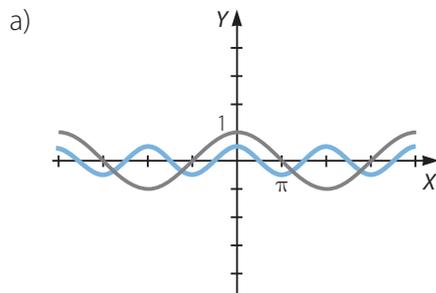
- a) La gráfica de la función $y = \cos \frac{x}{5}$ tiene el mismo dominio y recorrido y es periódica, pero el período es 10π .
- b) La gráfica de la función $y = \cos \frac{x}{6}$ tiene el mismo dominio y recorrido y es periódica, pero el período es 6π .

067
●●○

Ayudándote de su gráfica, comprueba que estos pares de funciones no son iguales.

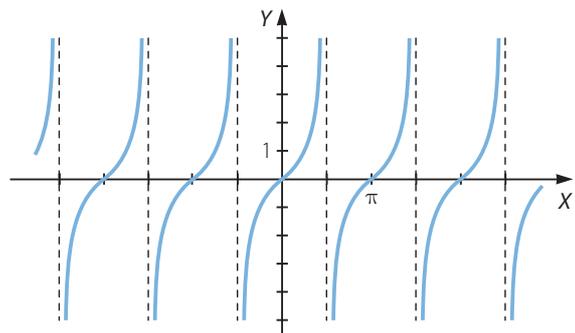
a) $y = \cos \left(\frac{x}{2} \right)$ $y = \frac{\cos x}{2}$ c) $y = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$ $y = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

b) $y = \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)$ $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$



068
●●○

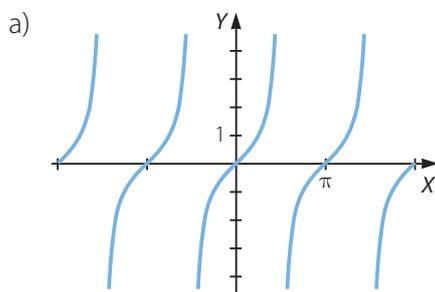
Esta es la gráfica de la función trigonométrica $y = \operatorname{tg} x$.



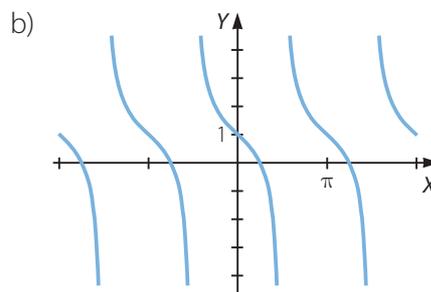
Funciones elementales

Utiliza la gráfica anterior para construir las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$

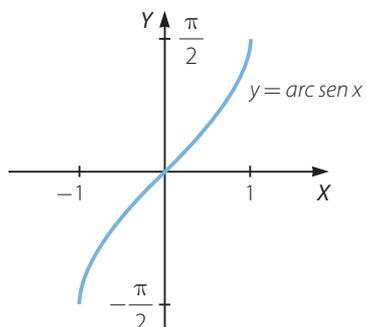


b) $y = 1 - \operatorname{tg} x$



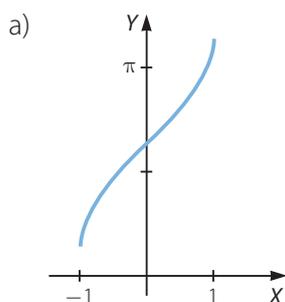
069
●●○

A continuación puedes ver la gráfica de la función $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$.

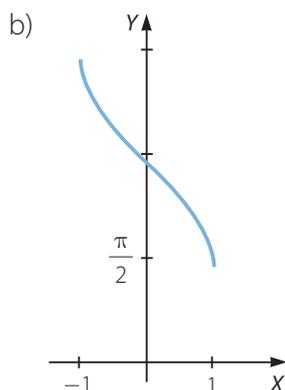


Realiza las gráficas de las funciones.

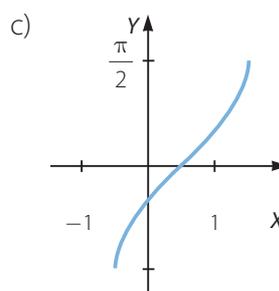
a) $y = 2 + \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$



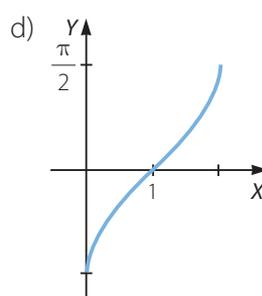
b) $y = 3 - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$



c) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(x - \frac{1}{2} \right)$



d) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x - 1)$

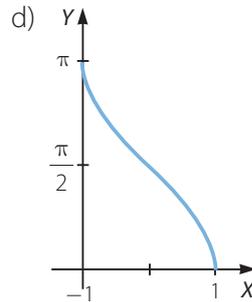
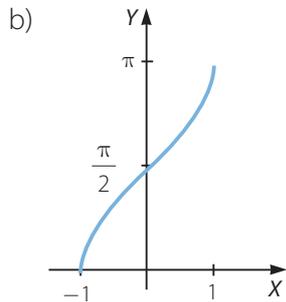
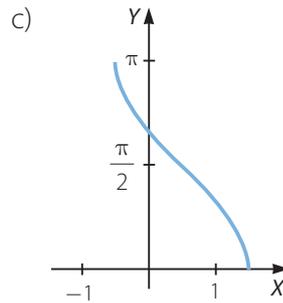
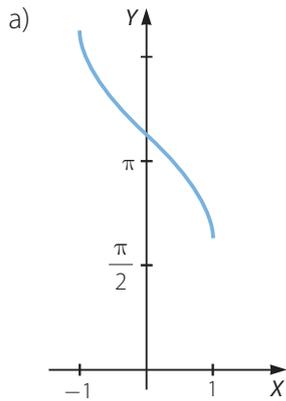
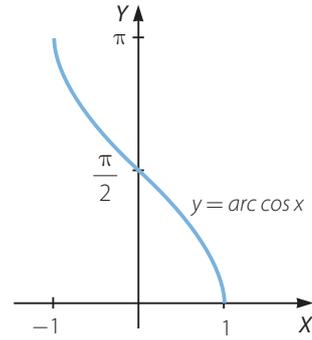


070
●●○

Esta es la gráfica de la función $y = \arccos x$.

Realiza las gráficas de las funciones.

- a) $y = 2 + \arccos x$
- b) $y = 3 - \arccos x$
- c) $y = \arccos \left(x - \frac{1}{2} \right)$
- d) $y = \arccos (x - 1)$



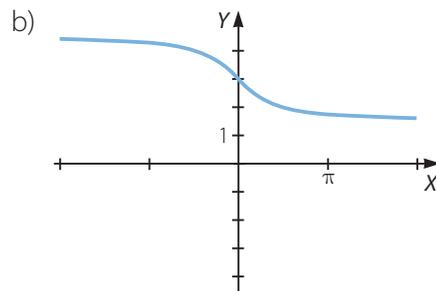
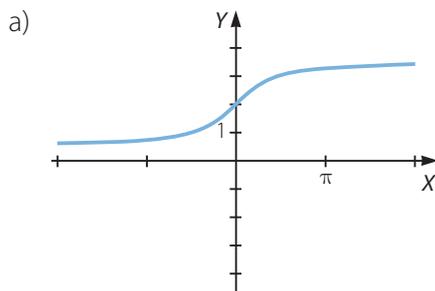
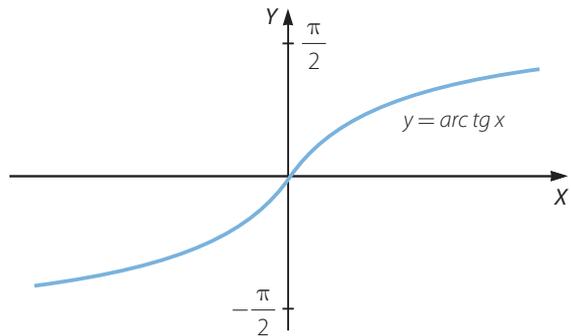
071
●●○

Observa la gráfica de la función

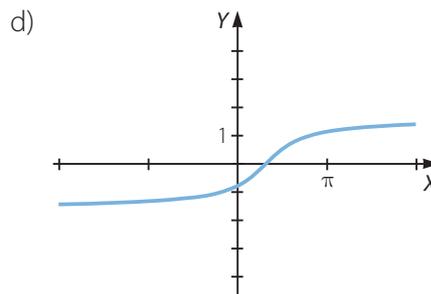
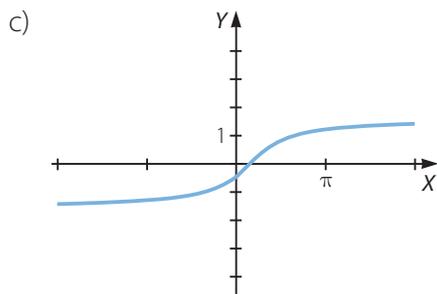
$y = \arctan x$.

Realiza las gráficas de las funciones.

- a) $y = 2 + \arctan x$
- b) $y = 3 - \arctan x$
- c) $y = \arctan \left(x - \frac{1}{2} \right)$
- d) $y = \arctan (x - 1)$

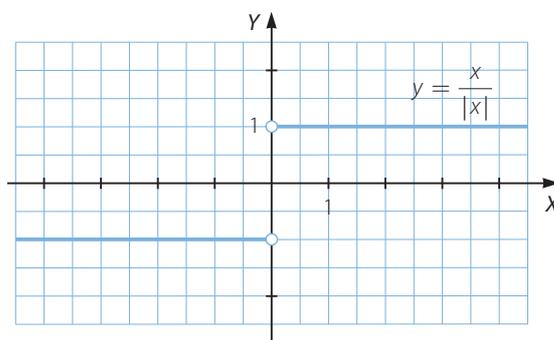


Funciones elementales



072

La función cuya expresión algebraica es $y = \frac{x}{|x|}$ se llama *función signo de x*.



Encuentra su expresión algebraica como una función definida a trozos.

- a) ¿Cuánto vale si $x = 3$? b) ¿Y si $x = -5$? c) ¿Y si $x = -3,4$?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- a) $f(3) = 1$ b) $f(-5) = -1$ c) $f(-3,4) = -1$

073

Representa y describe las características de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ -x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{6}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

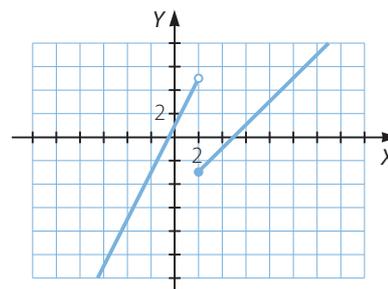
- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

No es continua en $x = 2$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.



$$b) \text{ Dom } g = \mathbb{R} \quad \text{Im } g = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$$

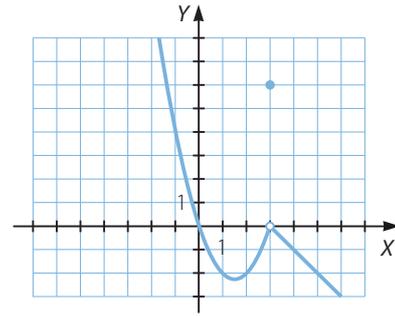
La función es creciente en $\left(\frac{3}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$

y es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

Tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{3}{2}$.

No es continua en $x = 3$, y este es un punto de discontinuidad evitable.

No tiene asíntotas. No es simétrica ni periódica.



$$c) \text{ Dom } h = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{Im } h = (-\infty, 0) \cup [6, +\infty)$$

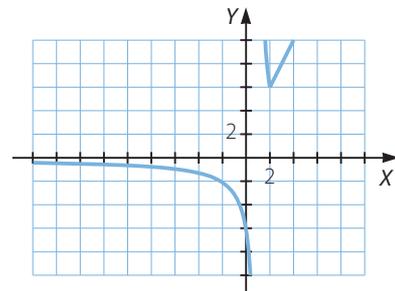
La función es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

No es continua en $x = 1$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.

No es simétrica ni periódica.



074
●●○

Representa y describe las características de estas funciones definidas a trozos.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{x-3} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \log x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$a) \text{ Dom } f = \mathbb{R} - \{3\} \quad \text{Im } f = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$$

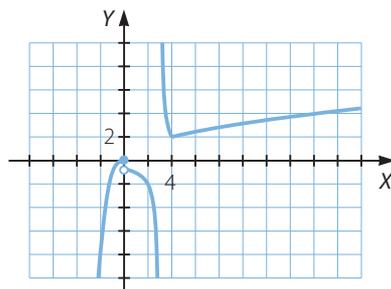
La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 3) \cup (3, 4)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

No es continua en $x = 0$, ni en $x = 3$, y el punto $x = 0$ es de discontinuidad inevitable de salto finito, y el punto $x = 3$ es de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

No es simétrica ni periódica.



Funciones elementales

b) $\text{Dom } g = \mathbb{R} \quad \text{Im } g = (0, 2]$

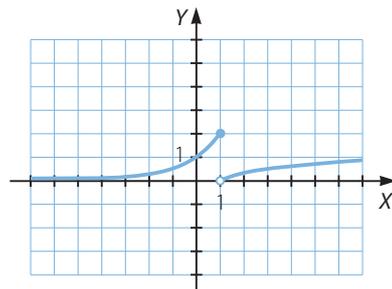
La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

No es continua en $x = 1$, y este punto es de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.



075
●●○

Escribe como funciones definidas a trozos.

a) $y = |x + 2|$

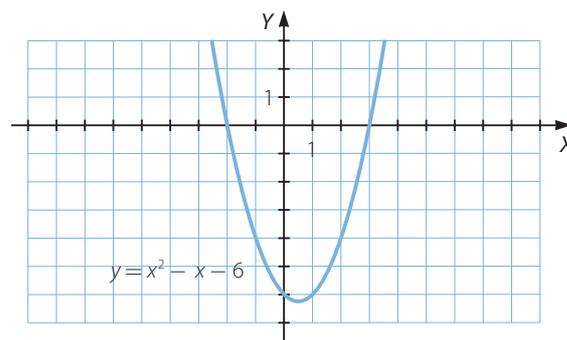
b) $y = |12 - 3x|$

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

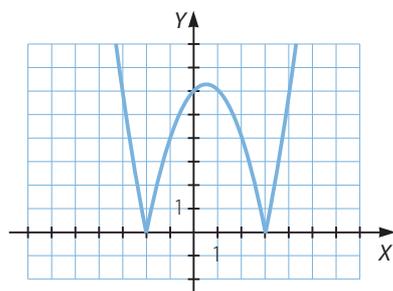
b) $f(x) = \begin{cases} 12 - 3x & \text{si } x \leq 4 \\ -12 + 3x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

076
●●○

Observa la gráfica de la función $y = x^2 - x - 6$.



Realiza la gráfica de $y = |x^2 - x - 6|$.



077
●●○

Representa la función.

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + 3x| & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos próximos a -1 , completando las tablas.

Izquierda de -1	-2	$-1,5$	$-1,1$	$-1,05$
$f(x)$	2	$2,25$	$2,09$	$2,0475$

Derecha de -1	0	$-0,5$	$-0,9$	$-0,95$
$f(x)$	3	$3,5$	$3,9$	$3,95$

Describe lo que le sucede a la función en las proximidades de -1 .

Por la izquierda de -1 los valores de la función se acercan a 2 , y por la derecha se acercan a 4 .

078
●●○

Escribe como una función definida a trozos y representa las funciones.

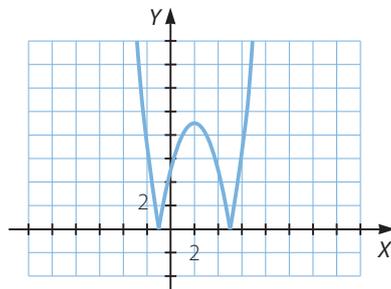
a) $y = |x^2 - 4x - 5|$

c) $y = |2x^2 - 7x + 3|$

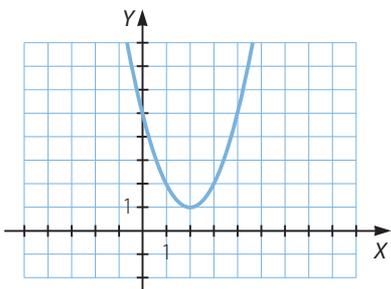
b) $y = |x^2 - 4x + 5|$

d) $y = |-x^2 + 4x - 5|$

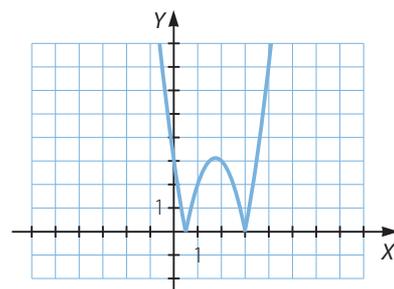
$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \leq -1, x \geq 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x < 5 \end{cases}$$



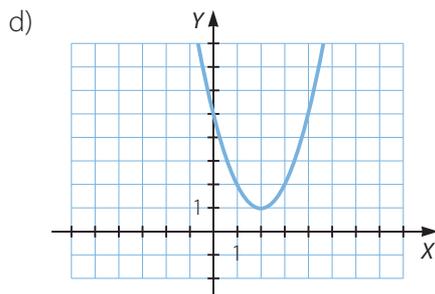
b)



$$c) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, x \geq 3 \\ -2x^2 + 7x - 3 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 3 \end{cases}$$



Funciones elementales



079

•••

Expresa como una función definida a trozos.

a) $y = |x| + |x + 2|$

b) $y = |x + 1| - |1 - x|$

c) $y = |x - 1| - |1 - x|$

d) $y = |2x + 1| - |2 - x|$

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad c) f(x) = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < x \leq 2 \\ x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

080

•••

El número de alumnos afectados por una epidemia de gripe se obtiene a partir de la función:

$$f(x) = \frac{30x}{x + 2}$$

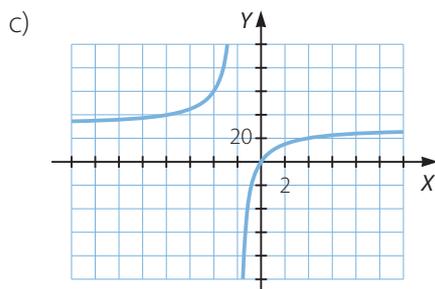
siendo x el número de días transcurridos desde el comienzo de la epidemia.

- ¿Cuántos afectados hubo el primer día?
- ¿En qué momento el número de afectados fue 15?
- Representa la función y comprueba los resultados que has obtenido en los apartados anteriores.

a) $f(1) = 10$ afectados

b) $\frac{30x}{x + 2} = 15 \rightarrow 30x = 15x + 30 \rightarrow 15x = 30 \rightarrow x = 2$

Hubo 15 afectados dos días después del comienzo de la epidemia.



081
●○○

Un capital de 5.000 € está depositado en un banco, y produce un interés anual del 2%.



- a) ¿Cuánto dinero hay al cabo de un año?
b) ¿Y a los dos años?
c) ¿Y a los n años?

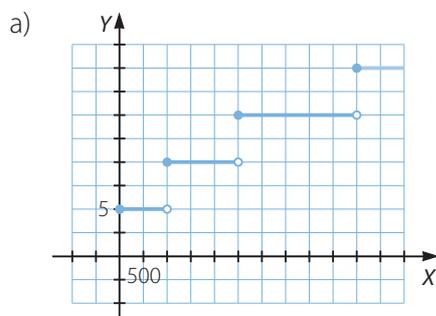
- a) 5.100 € b) 5.202 € c) $C = 5.000 \cdot 1,02^n$

082
●○○

La tabla recoge el interés que ofrece un banco al ingresar dinero durante un año.

Dinero (€)	Interés (%)
Hasta 1.000	5
De 1.000 a 2.500	10
De 2.500 a 5.000	15
Más de 5.000	20

- a) Representa la función que determina el interés obtenido dependiendo del dinero que se ingresa. ¿De qué tipo de función se trata?
b) Si se ingresan 1.800 €, ¿cuánto dinero tendré al final del año?
c) ¿Y si ingreso 500 €?



Se trata de una función definida a trozos.

- b) $1.800 \cdot 1,1 = 1.980$ €
c) $500 \cdot 1,05 = 525$ €

083
●○○

Encuentra las funciones inversas de estas funciones.

- a) $y = 3x - 1$ f) $y = \ln(x + 3)$
b) $y = \sqrt{x}$ g) $y = 3 + 4 \cdot 5^x$
c) $y = \operatorname{sen} 2x$ h) $y = \frac{1 + \log_3 x}{5}$
d) $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2}$ i) $y = |x - 1|$
e) $y = \operatorname{arc} \cos(x - 2)$ j) $y = x$

Funciones elementales

- a) $y = 3x - 1 \rightarrow y + 1 = 3x \rightarrow x = \frac{y + 1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3}$
- b) $y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2$
- c) $y = \operatorname{sen} 2x \rightarrow 2x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} y \rightarrow x = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} y}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{2}$
- d) $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2} \rightarrow 2y - 1 = \operatorname{tg} x \rightarrow x = \operatorname{arctg} (2y - 1) \rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} (2x - 1)$
- e) $y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} (x - 2) \rightarrow \operatorname{cos} y = x - 2 \rightarrow x = 2 + \operatorname{cos} y \rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \operatorname{cos} x$
- f) $y = \ln (x + 3) \rightarrow x + 3 = e^y \rightarrow x = e^y - 3 \rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 3$
- g) $y = 3 + 4 \cdot 5^x \rightarrow 5^x = \frac{y - 3}{4} \rightarrow x = \log_5 \left(\frac{y - 3}{4} \right) \rightarrow f^{-1}(x) = \log_5 \left(\frac{x - 3}{4} \right)$
- h) $y = \frac{1 + \log_3 x}{5} \rightarrow 5y = 1 + \log_3 x \rightarrow \log_3 x = 5y - 1 \rightarrow x = 3^{5y - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = 3^{5x - 1}$
- i) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$
 $\left. \begin{array}{l} y = x - 1 \rightarrow x = y + 1 \\ y = -x + 1 \rightarrow x = -y + 1 \end{array} \right\} \rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$
- j) $y = x \rightarrow x = y \rightarrow f^{-1}(x) = x$

084



Una granja de caracoles ha ajustado sus gastos de producción por x kilogramos de caracoles según la función:

$$G(x) = 2.000 + \frac{1}{200.000} x^3$$

Sus ingresos se rigen por la fórmula:

$$I(x) = 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000} x^2 + \frac{1}{200.000} x^3$$

Averigua cuál es el número de kilogramos de caracoles con el que se obtiene el beneficio máximo.



Los beneficios de la granja se obtienen a partir de la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000} x^2 + \frac{1}{200.000} x^3 - 2.000 - \frac{1}{200.000} x^3 = \\ &= 6.000 + 2x - \frac{1}{1.000} x^2 \end{aligned}$$

Se trata de una función cuadrática, por lo que su gráfica es una parábola. Al ser el coeficiente de x^2 un valor negativo la parábola está abierta hacia abajo. Entonces la función alcanza su máximo en el vértice de la misma:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2.000 \text{ kg}$$

085
•••

Una ONG ha estimado que el número de personas ingresadas en los hospitales

tras un *tsunami* sigue aproximadamente la fórmula: $P = 1 + \frac{110}{t^2 + 10}$ $t \in (0, 30)$

donde P es el número de personas hospitalizadas, en miles, y t es el número de días transcurridos desde el *tsunami*.

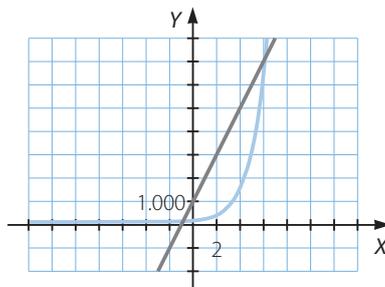
- ¿Cuántas personas habrá hospitalizadas el primer día?
 - ¿Y cuántas habrá al cabo de tres semanas?
 - Si la capacidad hospitalaria de una isla del área afectada es de 2.000 camas, ¿hasta qué día estuvo desbordada la capacidad?
 - 11.000 personas
 - 1.243 personas
- c) $1 + \frac{110}{t^2 + 10} = 2 \rightarrow t^2 + 120 = 2t^2 + 20 \rightarrow t^2 - 100 = 0 \rightarrow t = \pm 10$

Como el número de personas hospitalizadas decrece según el número de días la capacidad de hospitalización estuvo desbordada hasta el décimo día.

086
•••

La evolución de una población viene determinada por la función $P(t) = 100 \cdot 2^t$, y la de los alimentos que necesitan sigue la función $A(t) = 1.000t + 1.000$.

- ¿Cuánta población había al principio? ¿Y alimentos?
- ¿Y después de 2 años?
- ¿A partir de qué año la población tendrá menos alimentos de los que son necesarios?
 - $P(0) = 100$ $A(0) = 1.000$
 - $P(2) = 400$ $A(2) = 3.000$

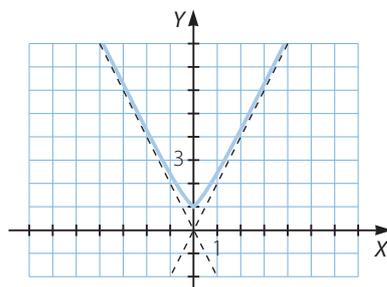


A partir del sexto año.

PARA FINALIZAR...

087

Razona para qué valor de x se hace mayor la diferencia $\sqrt{x^2 + 1} - |x|$



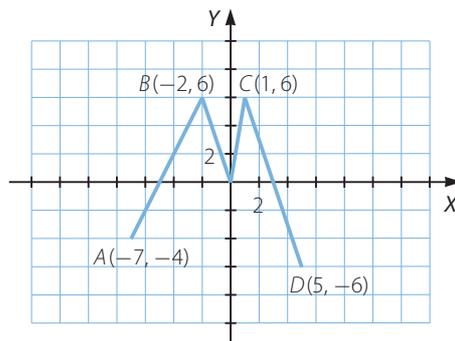
La diferencia alcanza el mayor valor para $x = 0$.

Funciones elementales

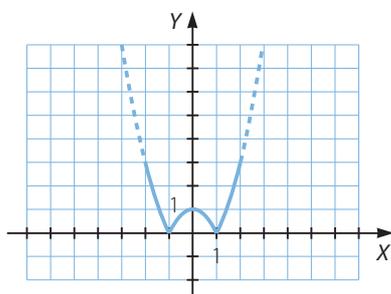
088 La función $f(x)$ está formada por cuatro segmentos.

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(x)] = 6$?

Como $f(1) = f(-2) = 6$, las soluciones de la ecuación son los valores para los que las ordenadas son iguales a 1 y a -2 . En total hay seis puntos que cumplen estas condiciones, es decir, la ecuación tiene seis soluciones.



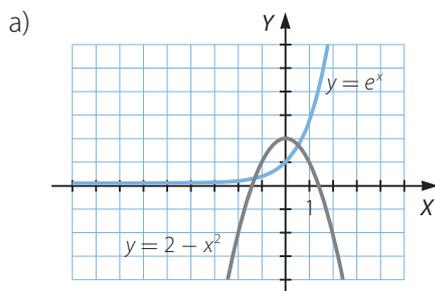
089 Calcula los valores máximo y mínimo (extremos absolutos) que puede alcanzar la función $f(x) = |1 - x^2|$ en el intervalo $[-2, 2]$.



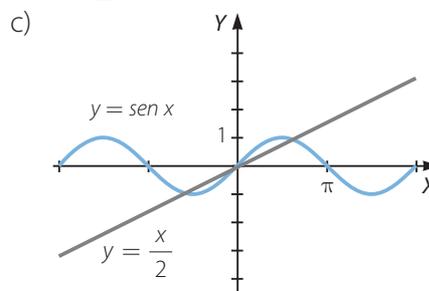
En el intervalo $[-2, 2]$, el máximo valor es 4, ya que los puntos $x = 2$ y $x = -2$ son los máximos absolutos, y el mínimo valor es 0, porque los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son los mínimos absolutos.

090 ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$?

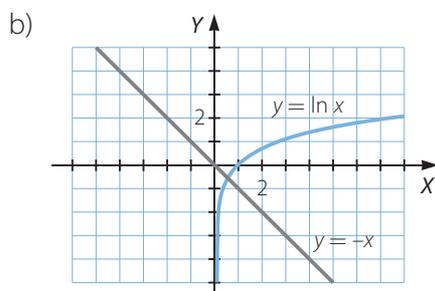
a) $e^x = 2 - x^2$ b) $\ln x = -x$ c) $\text{sen } x = \frac{x}{2}$



Tiene dos soluciones.



Tiene tres soluciones.



Tiene una solución.

091 Las manecillas de un reloj miden 20 y 30 cm. Entre las 12 horas y las 12 horas y 30 minutos:

- Expresa el ángulo que forman en función del tiempo, t , medido en minutos.
- Halla el área del triángulo creado al unir sus extremos en función de t . ¿Puede tomar el valor cero? ¿A qué hora alcanza su mayor valor?
- Expresa la distancia entre los extremos de las agujas en función de t .

a) Como la manecilla que marca las horas tarda 12 horas en completar una vuelta

$$(2\pi \text{ radianes}), \text{ su velocidad es: } v_h = \frac{2\pi}{720} = \frac{\pi}{360} \text{ rad/min}$$

$$\text{Análogamente, la velocidad de la otra manecilla es: } v_m = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/min}$$

El ángulo que forman ambas manecillas es la diferencia entre los ángulos recorridos por cada una, en función del tiempo t transcurrido:

$$\alpha = \frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{360}t = \frac{11\pi}{360}t \text{ rad}$$

$$\text{b) } A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \text{sen} \left(\frac{11\pi}{360}t \right) = 300 \text{sen} \left(\frac{11\pi}{360}t \right)$$

Esta función se anula si el ángulo mide $k\pi$ radianes, con $k \in \mathbb{Z}$. En el intervalo de tiempo dado esta condición solo se cumple a las 12 horas ($\alpha = 0$).

Como el mayor valor de la función seno se alcanza cuando el ángulo mide

$\frac{\pi}{2}$ radianes, hay que calcular a qué hora el ángulo formado tiene esta amplitud:

$$\frac{11\pi}{360}t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 16,36 \text{ El área es máxima a las 12 horas y 16,36 minutos.}$$

c) Por el teorema del coseno, la distancia entre las agujas es:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos \left(\frac{11\pi}{360}t \right)} = \sqrt{1.300 - 1.200 \cos \left(\frac{11\pi}{360}t \right)} = \\ &= 10\sqrt{13 - 12 \cos \left(\frac{11\pi}{360}t \right)} \end{aligned}$$

092 La temperatura media diaria, medida en grados Celsius, en una ciudad, durante el año pasado, viene dada por la siguiente función.

$$T = \frac{5}{9} \left[13 - 23 \cos \frac{2\pi}{365}(t - 32) \right]$$

donde t es el tiempo en días, correspondiendo $t = 1$ al 1 de enero, y el ángulo está medido en radianes. Halla la temperatura correspondiente a los días 1 de enero y 10 de agosto. Calcula las temperaturas máxima y mínima del año.

Para calcular la temperatura del 1 de enero: $t = 1 \rightarrow T = -3,77$ grados

Para calcular la temperatura del 10 de agosto: $t = 222 \rightarrow T = 19,89$ grados

Como en la expresión dada, el coseno del ángulo está multiplicado por un número negativo, la función alcanza el máximo si su amplitud es de π radianes.

$$\frac{2\pi}{365}(t - 32) = \pi \rightarrow t = 214,5 \text{ días}$$

Por tanto, la temperatura máxima es: $T = 20$ grados

Análogamente, la función alcanza el mínimo si dicho ángulo mide 0 radianes.

$$\frac{2\pi}{365}(t - 32) = 0 \rightarrow t = 32 \text{ Así, la temperatura mínima es: } T = -5,55 \text{ grados}$$

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El ocho

Sharrif iba sacando los libros [de mi bolsa] y ordenándolos en una pila sobre el escritorio mientras leía cuidadosamente los títulos.

–Juegos matemáticos de ajedrez... ¡ah! ¡Los números de Fibonacci! –exclamó, con esa sonrisa que me hacía sentir que tenía algo contra mí. Señalaba el aburrido libro de Nim–. ¿De modo que te interesan las matemáticas? –preguntó, mirándome con intención.

–No mucho –dije, poniéndome en pie y tratando de volver a guardar mis pertenencias en la bolsa. [...]

–¿Qué sabe exactamente sobre los números de Fibonacci? [...]

–Se usan para proyecciones de mercado –murmuré–. [...]

–¿Entonces no conoce al autor? [...] Me refiero a Leonardo Fibonacci. Un italiano nacido en Pisa en el siglo XII, pero educado aquí, en Argel. Era un brillante conocedor de las matemáticas de aquel moro famoso, Al-Kwarizmi, que ha dado su nombre a la palabra «algoritmo». Fibonacci introdujo en Europa la numeración arábiga, que reemplazó a los viejos números romanos...

Maldición. Debí haber comprendido que Nim no iba a darme un libro sólo para que me entretuviera, aun cuando lo hubiera escrito él mismo. [...]

Permanecí leyéndolo casi hasta el amanecer y mi decisión había resultado productiva, aunque no sabía con certeza cómo. Al parecer, los números de Fibonacci se usan para algo más que las proyecciones del mercado de valores. La resolución de un problema había llevado a Fibonacci a formar esta interesante sucesión de números empezando por el uno y sumando a cada número al precedente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... [...] Descubrió que los cocientes entre cada término y el anterior se aproximan al

número $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y que este número describía también la estructura de todas las cosas naturales que formaban una espiral.

KATHERINE NEVILLE

Los números de Fibonacci aparecen con frecuencia en la naturaleza. Por ejemplo, el número de espirales de los girasoles o de las piñas es siempre uno de estos números.

Además, como se dice en esta novela, al dividir cada término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior, se obtiene una nueva sucesión de números que se aproximan

cada vez más al número de oro: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Aunque no la descubrió Fibonacci, esta propiedad es verdadera. Compruébala tú mismo.

La sucesión que se obtiene al dividir cada término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior es:

$$a_1 = 1 \qquad a_3 = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad a_5 = \frac{8}{5} = 1,6 \qquad a_7 = \frac{21}{13} = 1,615\dots$$

$$a_2 = 2 \qquad a_4 = \frac{5}{3} = 1,6\hat{6} \qquad a_6 = \frac{13}{8} = 1,625 \qquad a_8 = \frac{34}{21} = 1,619\dots$$

Estos valores se aproximan a: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$