13 Contraste de hipóteses

1. Contraste de hipóteses

Pensa e calcula

Quérese contrastar que a estatura media dunha poboación de xente nova é 170 cm, e sábese que a desviación típica da poboación é de 10 cm. Tómase unha mostra de tamaño 64; e obtense, cun nivel de confianza do 95%, o intervalo de confianza (167,5; 172,5).

a) Que probabilidade se ten de que, nunha mostra de tamaño 64, a media sexa 171 cm?

b) Que probabilidade se ten de que, nunha mostra de tamaño 64, a media estea fóra do intervalo?

Solución:

a) O 95%. b) O 5%.

Aplica a teoría

1. Os gastos correntes por empregado dos distintos departamentos dunha empresa seguen unha distribución normal con desviación típica de 300 €. Nunha mostra de 16 departamentos, obtívose un gasto medio por empregado de 1 350 €. Determina, para un nivel de confianza do 99%, se o gasto corrente medio por empregado na empresa é de 1 280 €.

a) Formula a hipótese nula e a alternativa.

b) Determina a rexión crítica do contraste.

c) Atopa o estatístico do contraste.

d) Acepta ou rexeita a hipótese nula.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	1 280	300	
Mostra	1 350		16

Deséxase contrastar que os gastos son 1 280 €.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 1\,280$ €

$H_1: \mu \neq 1\,280$ €

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

A rexión de aceptación é: (–2,58; 2,58)

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{1\,350 - 1\,280}{\frac{300}{\sqrt{16}}} = 0{,}93$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $0{,}93 \in (-2{,}58; 2{,}58)$, acéptase a hipótese nula cunha probabilidade do 99%.

2. O número de reclamacións presentadas durante a campaña de Nadal en 9 tendas dunha empresa foron:

25, 31, 28, 30, 32, 20, 22, 34, 30

O número de reclamacións segue unha distribución normal con desviación típica igual a 5. Deséxase contrastar se o número medio de reclamacións é 26, cun nivel de significación de 0,05.

a) Formula a hipótese nula e a alternativa.

b) Determina a rexión crítica do contraste.

c) Atopa o estatístico do contraste.

d) Acepta ou rexeita a hipótese nula.

Solución:

A media da mostra é: $\frac{\Sigma x_i}{9} = 28$

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	26	5	
Mostra	28		9

Deséxase contrastar que o número medio de reclamacións é 26.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 26$

$H_1: \mu \neq 26$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: (–1,96; 1,96)

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{28 - 26}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = 1,2$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1,2 \in (-1,96; 1,96)$, acéptase a hipótese nula cunha probabilidade do 95%.

2. Contraste de hipóteses para a media

Pensa e calcula

Calcula $z_{\alpha/2}$ e z_α nos casos seguintes:

a) $P(z < z_\alpha) = 0,95$ b) $P(z < z_\alpha) = 0,99$ c) $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$ d) $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,99$

Solución:

a) $z_\alpha = 1,64$ b) $z_\alpha = 2,33$ c) $z_{\alpha/2} = 1,96$ d) $z_{\alpha/2} = 2,58$

Aplica a teoría

3. O envasado en botes dun produto segue unha distribución normal de desviación típica 0,2 cm³. Nos botes indícase que a cantidade é de 10 cm³. Elíxense ao azar 7 destes botes, mídense os seus contidos e obtéñense os resultados:

9,6 10 10,1 9,7 9,7 10 9,5

Podemos asegurar, cun nivel de confianza do 95%, que a capacidade media dos botes é a que se indica no envase?

Solución:

A media da mostra é: $\frac{\Sigma x_i}{7} = 9,8$ cm³

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	10	0,2	
Mostra	9,8		7

Deséxase contrastar que a cantidade media dos botes é 10 cc.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 10$

$H_1: \mu \neq 10$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

A rexión de aceptación é: $(-1,96; 1,96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{9,8 - 10}{\frac{0,2}{\sqrt{7}}} = -2,65$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-2,65 \notin (-1,96; 1,96)$, rexéitase a hipótese nula. A diferenza da mostra non se debe ao azar e é lóxico pensar que non é verdade que o contido medio sexa de 10 cc.

4. Unha empresa garante que unhas cordas que fabrica soportan, como máximo, un peso medio de 150 kg cunha desviación típica de 12 kg. Para verificar esta afirmación tómase unha mostra de 64 cordas e obtense un peso medio de 152 kg. Pódese asegurar, cun nivel de confianza do 95%, que a afirmación da empresa é verdadeira?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	150	12	
Mostra	152		64

Deséxase contrastar que o peso medio é como máximo 150 kg.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu \leq 150$ e a afirmación é verdadeira.

$H_1: \mu > 150$ e a afirmación é falsa.

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,65$

A rexión de aceptación é: $(-\infty; 1,65)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{152 - 150}{\frac{12}{\sqrt{64}}} = 1,33$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1,33 \in (-\infty; 1,65)$, acéptase a hipótese nula cunha probabilidade do 95%.

3. Contraste de hipóteses para a proporción

Pensa e calcula

Calcula nos casos seguintes:

a) $P(z > -z_\alpha) = 0,95$

b) $P(z > -z_\alpha) = 0,99$

Solución:

a) $P(z < z_\alpha) = 0,95 \Rightarrow z_\alpha = 1,65$

b) $P(z < z_\alpha) = 0,99 \Rightarrow z_\alpha = 2,33$

Aplica a teoría

5. Nunha mostra aleatoria de 950 persoas, o 20% estaba en desacordo coa política económica do Goberno. Contrasta, cun nivel de significación do 5%, a hipótese nula de que cando menos o 25% está en desacordo.

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Poboación	0,25	0,014	
Mostra	0,2		950

Deséxase contrastar que polo menos un 25% está en desacordo.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: p \geq 0,25$

$H_1: p < 0,25$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -1,65$

A rexión de aceptación é: $(-1,65; +\infty)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0,2 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{950}}} = -3,56$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-3,56 \notin (-1,65; +\infty)$, rexéitase a hipótese nula. Non se pode aceptar que haxa polo menos un 25% en desacordo.

6. Dunha mostra aleatoria de 170 propietarios de pequenos negocios, 119 manifestaron que a fonte de financiamento inicial foron os seus aforros. Contrasta a hipótese nula de que os aforros persoais son a fonte de financiamento para o 75% dos propietarios de pequenos negocios, cun nivel de confianza do 90%.

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Poboación	0,75	0,033	
Mostra	0,7		170

Deséxase contrastar que a proporción é do 75%.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: p = 0,75$

$H_1: p \neq 0,75$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,65$

A rexión de aceptación é: $(-1,65; 1,65)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0,7 - 0,75}{\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{170}}} = -1,51$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-1,51 \in (-1,65; 1,65)$, acéptase a hipótese nula.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Afírmase que "polo menos o 60% dos estudantes xantan no comedor da facultade". Para contrastalo tómase unha mostra de 441 estudantes e resulta que 220 xantan no comedor. Cun nivel de significación do 1%, pódese aceptar a afirmación inicial?

- [ ] Si, cunha probabilidade de erro do 1%.
- [x] Non, cunha probabilidade de erro do 1%.
- [ ] Si, cunha probabilidade do 99%.
- [ ] Non, cunha probabilidade de erro do 99%.

2 A empresa de transportes urxentes O Rápido afirma na súa publicidade que polo menos o 70% dos seus envíos chegan ao día seguinte ao seu destino. Para contrastar a calidade deste servizo, a Asociación de Consumidores selecciona aleatoriamente 100 envíos e observa que 39 non chegaron ao día seguinte ao seu destino. Cunha significación do 1%, pódese aceptar a afirmación da empresa?

- [ ] Como $-6,76 \notin (-1,28; +\infty)$, rexéitase a afirmación.
- [ ] Como $-6,76 \notin (-1,28; 1,28)$, rexéitase a afirmación.
- [x] Como $-1,96 \notin (-1,28; +\infty)$, rexéitase a afirmación.
- [ ] Como $-1,96 \in (-2,58; +\infty)$, acéptase a afirmación.

3 Estamos calibrando unha balanza. Para facelo, pesamos unha "pesa de proba" de 1 000 gramos 60 veces e obtemos un peso medio de 1 000,6 gramos. Se a desviación típica da poboación é de 2 gramos, podemos aceptar a hipótese nula H_0: $\mu = 1000$ fronte á alternativa H_1: $\mu \neq 1000$ cunha confianza do 99%?

- [ ] Como $2,32 \in (-1,645; +\infty)$, acéptase a hipótese nula.
- [ ] Como $2,32 \notin (-\infty; 1,645)$, rexéitase a hipótese nula.
- [ ] Como o valor do estatístico dá cero, acéptase a hipótese nula.
- [x] Como $2,32 \notin (-1,645; 1,645)$, acéptase a hipótese alternativa.

4 A principios de ano, un estudo en certa cidade indicaba que un 15% dos condutores empregaban o móbil co vehículo en marcha. Co fin de investigar a efectividade das campañas que se realizaron dende entón para reducir estes hábitos, recentemente fíxose unha enquisa a 120 condutores e 12 facían un uso indebido do móbil. Formula un test para contrastar que as campañas non cumpriron o seu obxectivo fronte a que si o fixeron, como parecen indicar os datos. A que conclusión se chega cun nivel de significación do 4%?

- [ ] H_0: $p = 0,15$; H_1: $p \neq 0,15$

  Acéptase a H_0.
- [ ] H_0: $p \leq 0,15$; H_1: $p > 0,15$

  Acéptase a H_0.
- [x] H_0: $p \geq 0,15$; H_1: $p < 0,15$

  Acéptase a H_0.
- [ ] H_0: $p \geq 0,15$; H_1: $p < 0,15$

  Rexéitase a H_0.

5 Segundo certo estudo realizado o ano pasado, un 35% das familias con conexión a Internet empregaban habitualmente este medio para realizar as súas operacións bancarias. O estudo prognosticaba tamén que esa porcentaxe aumentaría nos próximos meses. Dunha enquisa realizada recentemente a 125 persoas usuarias de Internet, 50 declararon utilizala habitualmente para realizar as citadas operacións. Formula un test para contrastar que a proporción do ano pasado se mantivo fronte a que, como parece, se cumpriu o prognóstico do estudo. A que conclusión se chega a un nivel de significación do 10%?

- [x] H_0: $p = 0,35$; H_1: $p > 0,35$

  Acéptase a H_0.
- [ ] H_0: $p \leq 0,35$; H_1: $p > 0,35$

  Rexéitase a H_0.
- [ ] H_0: $p = 0,35$; H_1: $p \neq 0,12$

  Acéptase a H_0.
- [ ] H_0: $p \geq 0,35$; H_1: $p < 0,35$

  Acéptase a H_0.

1. Contraste de hipóteses

7. O diámetro duns eixes segue unha distribución normal de media descoñecida e desviación típica 2 mm. Tómase unha mostra de tamaño 25 e obtense un diámetro medio de 36 mm. Podemos afirmar, cun nivel de significación de 0,01, que a media da poboación é de 40 mm?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	40	2	
Mostra	36		25

Deséxase contrastar que a media é igual a 40 mm.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu \neq 40$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

A rexión de aceptación é: (–2,58; 2,58)

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{36 - 40}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = -10$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-10 \notin (-2{,}58; 2{,}58)$, rexéitase a hipótese nula.

8. Os depósitos mensuais, en euros, nunha entidade bancaria seguen unha distribución normal de media μ e desviación típica $\sigma = 5{,}1$. Co fin de contrastar se a media dos depósitos mensuais é 20 €, tómase unha mostra de tamaño 16, e a media da mostra resulta ser 22,4 €. Pódese aceptar a hipótese de que a media é 20 € a un nivel de significación do 5%?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	20	5,1	
Mostra	22,4		16

Deséxase contrastar que a media é igual a 20 €.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 20$

$H_1: \mu \neq 20$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05\% \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: (–1,96; 1,96)

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{22{,}4 - 20}{\frac{5{,}1}{\sqrt{16}}} = 1{,}88$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1{,}88 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, acéptase a hipótese nula.

2. Contraste de hipóteses para a media

9. Cando unha máquina funciona correctamente, produce pezas cuxa lonxitude segue unha lei normal de media 12 cm e desviación típica 1 cm. O encargado de control de calidade tomou unha mostra de 25 pezas e obtense unha media de 11,5 cm.

Contrasta a hipótese de que a máquina está funcionando correctamente cun nivel de significación igual a 0,05.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	12	1	
Mostra	11,5		25

Deséxase contrastar que a media é igual a 12 cm.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 12$

$H_1: \mu \neq 12$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: (–1,96; 1,96)

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{11{,}5 - 12}{\frac{1}{\sqrt{25}}} = -2{,}50$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-250 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, rexéitase a hipótese nula.

10. A duración das lámpadas de 100 vatios que fabrica unha empresa segue unha distribución normal cunha desviación típica de 120 horas. A súa vida media está garantida durante un mínimo de 800 horas. Escóllese ao azar unha mostra de 50 lámpadas dun lote e, despois de comprobalas, obtense unha vida media de 750 horas. Cun nivel de significación de 0,01, habería que rexeitar o lote por non cumprir a garantía?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	800	120	
Mostra	750		50

Deséxase contrastar que a media é maior ou igual a 800 h.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu \geq 800$ h e cúmprese a garantía.

$H_1: \mu < 800$ h e cúmprese a garantía.

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -2{,}33$

A rexión de aceptación é: $(-2{,}33; +\infty)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{750 - 800}{\frac{120}{\sqrt{50}}} = -2{,}95$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-2{,}95 \notin (-2{,}33; +\infty)$, rexéitase a hipótese nula, é dicir, non se cumpre a garantía.

3. Contraste de hipóteses para a proporción

11. Unha empresa de produtos farmacéuticos afirma na súa publicidade que un dos seus medicamentos reduce considerablemente os síntomas da alerxia primaveral no 90% da poboación. Unha asociación de consumidores experimentou este fármaco nunha mostra de 200 persoas asociadas e obtivo o resultado indicado na publicidade en 170 persoas. Determina se a asociación de consumidores pode considerar que a afirmación da empresa é estatisticamente correcta a un nivel de significación de 0,05.

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Poboación	0,9	0,021	
Mostra	0,85		200

Deséxase contrastar que a proporción é do 90%.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: p = 0{,}9$

$H_1: p \neq 0{,}9$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0{,}85 - 0{,}9}{\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{200}}} = -2{,}36$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-2{,}36 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, rexéitase a hipótese nula, é dicir, non se cumpre o que se afirma na publicidade.

12. Un profesor afirma que, no seu centro, a porcentaxe de estudantes de bacharelato que fuma non supera o 15%. Se nunha mostra de 60 deses estudantes se observa que 12 fuman:

a) É aceptable a afirmación do profesor, cun nivel de significación de 0,01?

b) A afirmación do apartado anterior é a mesma se o nivel de confianza é do 90%?

Solución:

Como: $\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

	Proporción	D. típica	Tamaño
Poboación	0,15	$\sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{60}}$	
Mostra	0,2		60

Deséxase contrastar que a proporción é menor ou igual ao 15%.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: p \leq 0{,}15$ e o profesor ten razón.

$H_1: p > 0{,}15$ e o profesor ten razón.

Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

A rexión de aceptación é: $(-\infty; 2{,}33)$

Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0{,}2 - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{60}}} = 1{,}08$$

Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1{,}08 \in (-\infty; 2{,}33)$, acéptase a hipótese nula.

b) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}28$

Como $1{,}08 \in (-\infty; 1{,}28)$, acéptase a hipótese nula.

Para ampliar

13. Sábese, por traballos realizados por expertos, que a velocidade lectora media das nenas e nenos de 6 anos é de 40 palabras por minuto e que a desviación típica é de 12. Tomamos unha mostra aleatoria de 49 nenos e nenas de 6 anos e medimos a súa velocidade lectora e resulta unha media de 42 palabras por minuto. Podemos afirmar que a nosa media é compatible coa dos expertos a un nivel de confianza do 99%? Razoa a resposta.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	40	12	
Mostra	42		49

Deséxase contrastar que a media é igual a 40 palabras/min.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 40$

$H_1: \mu \neq 40$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$

A rexión de aceptación é: $(-2,58; 2,58)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{42 - 40}{\frac{12}{\sqrt{49}}} = 1,17$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1,17 \in (-2,58; 2,58)$, acéptase a hipótese nula, é dicir, o estudo é compatible cos traballos realizados polos expertos.

14. Quérese comprobar se unha máquina destinada á enchedura de envases de auga mineral sufriu un desaxuste. Unha mostra aleatoria de 10 envases desta máquina proporcionou os seguintes resultados:

0,49	0,52	0,51	0,48	0,53
0,55	0,49	0,50	0,52	0,49

Supoñendo que a cantidade de auga mineral que este tipo de máquinas deposita en cada envase segue unha distribución normal de media 0,5 litros e desviación típica de 0,02 litros, deséxase contrastar se o contido medio dos envases desta máquina é de 0,5 litros, cun nivel de significación do 5%.

a) Formula a hipótese nula e alternativa do contraste.

b) Determina a rexión crítica do contraste.

c) Realiza o contraste.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	0,5	0,02	
Mostra	0,508		10

Deséxase contrastar que o contido medio é 0,5 litros.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 0,5$

$H_1: \mu \neq 0,5$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

A rexión de aceptación é: $(-1,96; 1,96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{0,508 - 0,5}{\frac{0,02}{\sqrt{10}}} = 1,26$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1,26 \in (-1,96; 1,96)$, acéptase a hipótese nula. O contido medio dos envases de auga é de 0,5 litros.

15. Unha empresa de automóbiles está estudando as melloras que incluíu na nova xeración da súa gama de utilitarios. Ata agora, os quilómetros que un destes automóbiles podía percorrer –cun uso normal– sen que fosen necesarias reparacións importantes seguía unha normal con media 220 (en miles de quilómetros) e desviación típica 15 (en miles de quilómetros). As melloras parecen producir efecto, posto que con 100 automóbiles da nova xeración obtívose unha media de 225 (en miles de quilómetros) sen ningún tipo de problema grave. Supoñendo que a desviación típica se mantivese:

a) Formula un test para contrastar a hipótese de que as melloras non produciron efecto ou incluso que empeoraron a situación fronte a que si produciron efecto, como parecen indicar os datos. Se se conclúise que a media segue igual ou que incluso baixou, e, non obstante, esta conclusión fose falsa, como se chama o erro cometido?

b) Cun nivel de significación do 1%, a que conclusión se chega?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	220	15	
Mostra	225		100

Deséxase contrastar que os cambios non produciron melloras.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu \leq 220$ e os cambios non produciron efecto.

$H_1: \mu > 220$ e os cambios produciron efecto.

Se se acepta a hipótese nula, sendo falsa, cométese un erro de tipo II.

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

A rexión de aceptación é: $(-\infty; 2{,}33)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{225 - 220}{\frac{15}{\sqrt{100}}} = 3{,}33$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $3{,}33 \notin (-\infty; 2{,}33)$, rexéitase a hipótese nula, é dicir, as melloras produciron efecto.

16. Suponse que o peso das sandías de certa variedade segue unha distribución normal con desviación típica de 1 kg. Tómase unha mostra aleatoria de 100 sandías e obsérvase que o peso medio é de 6 kg.

Pode aceptarse a hipótese de que o verdadeiro peso medio das sandías é de 5 kg, cun nivel de significación de 0,05 kg?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	5	1	
Mostra	6		100

Deséxase contrastar que o peso das sandías é 5 kg.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu \neq 5$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{6 - 5}{\frac{1}{\sqrt{100}}} = 10$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $10 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, rexéitase a hipótese nula. Non se pode dar por bo que o peso das sandías sexa de 5 kg.

17. Sábese que a renda anual dos individuos dunha localidade segue unha distribución normal de media descoñecida e desviación típica de 1 442 €. Observouse a renda anual de 16 individuos desa localidade escollidos ao azar e obtívose un valor medio de 9 616 €. Contrasta, a un nivel de significación do 5%, se a media da distribución é de 8 715 €.

a) Cales son a hipótese nula e a hipótese alternativa do contraste?

b) Determina a forma da rexión crítica.

c) Acéptase a hipótese nula co nivel de significación indicado?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	8 715	1 442	
Mostra	9 616		16

Deséxase contrastar que o salario é de 8 715 €.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 8\,715$

$H_1: \mu \neq 8\,715$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: $(-1{,}96; 1{,}96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{9\,616 - 8\,715}{\frac{1\,442}{\sqrt{16}}} = 2{,}50$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $2{,}50 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, rexéitase a hipótese nula. Non se pode dar por bo que o salario sexa de 8 715 €.

18. Nun hospital observouse que os pacientes abusaban do servizo de urxencias, de forma que un 30% das consultas podían perfectamente esperar a concertar unha cita co médico de cabeceira, porque non eran realmente urxencias. Posto que esta situación retardou o servizo, realizouse unha campaña intensiva de concienciación.

Transcorridos uns meses recolleuse información de 60 consultas ao servizo, das cales só 15 non eran realmente urxencias:

a) Hai persoal do hospital que defende que a campaña non mellorou a situación. Formula un test para contrastar esta hipótese fronte a que si a mellorou. Se se conclúe que a situación non mellorou e realmente si o fixo, como se chama o erro cometido?

b) A que conclusión se chega no test empregado no apartado anterior, cun nivel de significación do 1%?

Solución:

Como: $\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

	Proporción	D. típica	Tamaño
Poboación	0,3	$\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{60}}$	
Mostra	0,25		60

Deséxase contrastar que polo menos un 25% está en desacordo.

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

H_0: $p \geq 0,3$ e a situación non mellorou.

H_1: $p < 0,3$ e a situación mellorou.

Se se acepta a hipótese nula, sendo falsa, cométese un erro de tipo II.

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -2,33$

A rexión de aceptación é: $(-2,33; +\infty)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0,25 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{60}}} = -0,85$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-0,85 \in (-2,33; +\infty)$, acéptase a hipótese nula, que afirma que a situación non mellorou.

19. Un investigador afirma que as horas de voo de certo tipo de avións comerciais se distribúe normalmente cunha media de 200 000 h e unha desviación típica de 20 000 h. Para comprobar a veracidade das súas hipóteses, obtivo unha mostra aleatoria de 4 avións fóra de servizo de distintas compañías aéreas e anotou o número de horas de voo de cada un; resultaron os seguintes datos (en miles de horas):

150, 320, 270, 140

a) Formula cales son a hipótese nula e a hipótese alternativa do contraste.

b) Realiza o contraste cun nivel de significación do 5%.

Solución:

A media da mostra é: 200000

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	200 000	20 000	
Mostra	220 000		4

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

H_0: $\mu = 200000$

H_1: $\mu \neq 200000$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

A rexión de aceptación é: $(-1,96; 1,96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{220\,000 - 200\,00}{\frac{20\,000}{\sqrt{4}}} = 2$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $2 \notin (-1,96; 1,96)$, rexéitase a hipótese nula. Non se pode dar por bo que o número de horas de voo sexa 200 000.

Problemas

20. Segundo un estudo realizado por unha empresa hoteleira durante un ano, a distribución do tempo de estancia de cada viaxeiro foi normal cunha media de 3,7 días e unha desviación típica de 1,1 días. Ao longo do presente ano, analizouse o tempo de estancia de 49 viaxeiros elixidos ao azar e obtívose unha media de 3,5 días.

Pódese afirmar que esta diferenza é debida ao azar cunha confianza do 88%?

Co mesmo nivel de confianza, cambiaría a resposta se esta media de 3,5 días se obtivese ao analizar o tempo de estancia de 100 viaxeiros elixidos ao azar?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	3,7	1,1	
Mostra	3,5		49

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 3,7$

$H_1: \mu \neq 3,7$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,88 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,56$

A rexión de aceptación é: $(-1,56; 1,56)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{3,5 - 3,7}{\frac{1,1}{\sqrt{49}}} = -1,27$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-1,27 \in (-1,56; 1,56)$, acéptase a hipótese nula.

Se a mostra é de tamaño 100:

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 3,7$

$H_1: \mu \neq 3,7$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,88 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,56$

A rexión de aceptación é: $(-1,56; 1,56)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{3,5 - 3,7}{\frac{1,1}{\sqrt{100}}} = -1,82$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-1,82 \notin (-1,56; 1,56)$, rexéitase a hipótese nula.

21. Ao lanzar en 5 000 ocasións unha moeda ao aire saíron 3 000 caras. Pódese aceptar, cun nivel de significación do 0,05, que a moeda non está trucada?

Solución:

	Proporción	D. típica	Tamaño
Poboación	0,5	0,007	
Mostra	0,6		5 000

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: p = 0,5$ e a moeda non está trucada.

$H_1: p \neq 0,5$ e a moeda está trucada.

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

A rexión de aceptación é: $(-1,96; 1,96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0,6 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{5\,000}}} = 14,14$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $14,14 \notin (-1,96; 1,96)$, rexéitase a hipótese nula, é dicir, a moeda está trucada.

22. O equipo directivo afirma que a media do percorrido que fai o alumnado que asiste a un centro de bacharelato é, como máximo, igual a 2,5 km, cunha desviación típica igual a 0,5 km. Tómase unha mostra de 81 estudantes, e obtense un percorrido medio de 2,6 km.

a) Pódese aceptar, cun nivel de significación igual a 0,05, a afirmación do equipo directivo?

b) A resposta do apartado anterior é a mesma se o nivel de confianza é do 99%?

Solución:

a)

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	2,5	0,5	
Mostra	2,6		81

Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu \leq 2,5$ e o equipo directivo ten razón.

$H_1: \mu > 2,5$ e o equipo directivo non ten razón.

Se se acepta a hipótese nula, sendo falsa, cométese un erro de tipo II.

Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,65$

A rexión de aceptación é: $(-\infty; 1,65)$

Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{2,6 - 2,5}{\frac{0,5}{\sqrt{81}}} = 1,8$$

Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1,8 \notin (-\infty; 1,65)$, rexéitase a hipótese nula e o equipo directivo non ten razón.

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$

A rexión de aceptación é: $(-\infty; 2,33)$

Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1,8 \in (-\infty; 2,33)$, acéptase a hipótese nula e o equipo directivo ten razón.

23. Nunha determinada comunidade autónoma estúdase o número medio de fillos por muller, a partir dos datos dispoñibles en cada concello. Suponse que este número segue unha distribución normal con desviación típica igual a 0,08. O valor medio destes datos para 36 concellos resulta ser igual a 1,17 fillos por muller. Deséxase contrastar, cun nivel de significación de 0,01, se na comunidade autónoma o número medio de fillos por muller é de 1,25.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	1,25	0,08	
Mostra	1,17		36

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 1,25$

$H_1: \mu \neq 1,25$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0,01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$

A rexión de aceptación é: $(-2,58; 2,58)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{1,17 - 1,25}{\frac{0,08}{\sqrt{36}}} = -6$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-6 \notin (-2,58; 2,58)$, rexéitase a hipótese nula.

24. Un establecemento vende paquetes de carbón para barbacoa, cun peso teórico de 10 kg. Suponse que o peso dos paquetes segue unha distribución normal con desviación típica de 1 kg. Para contrastar a citada hipótese, fronte a que o peso teórico sexa distinto de 10 quilos, escóllense ao chou 4 paquetes que pesan en quilos, respectivamente, 8, 10, 9, 8.

Deséxase que a probabilidade de aceptar a hipótese nula, cando esta é certa, sexa 0,95. Pídese:

a) A rexión crítica do contraste.

b) Débese rexeitar a hipótese nula?

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	10	1	
Mostra	8,75		4

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 10$

$H_1: \mu \neq 10$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

A rexión de aceptación é: $(-1,96; 1,96)$

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{8,75 - 10}{\frac{1}{\sqrt{4}}} = -2,5$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-2,5 \notin (-1,96; 1,96)$, rexéitase a hipótese nula.

25. Nas últimas eleccións celebradas, o 52% dos votantes dunha cidade estaba a favor da alcaldesa. Unha enquisa realizada recentemente indica que, de 350 cidadáns elixidos ao azar, 196 están a favor da alcaldesa:

a) Pódese afirmar, cun nivel de confianza do 90%, que a alcaldesa gaña popularidade?

b) Obtense a mesma resposta que no apartado anterior se o nivel de confianza é igual a 0,99?

Solución:

Como: $\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

	Proporción	D. típica	Tamaño
Poboación	0,52	$\sqrt{\frac{0,52 \cdot 0,48}{350}}$	
Mostra	0,56		350

a) **Defínense as hipóteses nula e alternativa:**

$H_0: p \geq 0,52$

$H_1: p < 0,52$

Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -1,28$

A rexión de aceptación é: $(-1,28; +\infty)$

Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \Rightarrow z = \frac{0,56 - 0,52}{\sqrt{\frac{0,52 \cdot 0,48}{350}}} = 1,5$$

Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $1,5 \in (-1,28; +\infty)$, acéptase a hipótese nula. A alcaldesa gaña popularidade.

b) Se o intervalo é máis amplo, tamén se aceptará a hipótese nula.

Efectivamente, se se calcula a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = -2,33$

A rexión de aceptación é: $(-2,33; +\infty)$

O valor do estatístico: $1,5 \in (-2,33; +\infty)$

26. Un fabricante de lámpadas asegura que a súa duración, en miles de horas, segue unha normal de 26 h de media e 5 h de desviación típica. Para unha mostra de 10 lámpadas deste fabricante, obtivéronse as seguintes duracións:

23,5	35	29,5	31	23
33,5	27	28	30,5	29

Deséxase contrastar, cun nivel de significación do 5%, se estes datos son compatibles co valor medio afirmado polo fabricante.

a) Formula o contraste.

b) Atopa a rexión crítica.

c) Que se puede concluír?

Solución:

A media da mostra é: 29

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	26	5	
Mostra	29		10

a) **Defínense as hipóteses nula e alternativa:**

$H_0: \mu = 26$

$H_1: \mu \neq 26$

b) **Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:**

$\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

A rexión de aceptación é: $(-1,96; 1,96)$

c) **Defínese o estatístico para o contraste:**

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{29 - 26}{\frac{5}{\sqrt{10}}} = 1,90$$

d) **Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:**

Como $1,90 \in (-1,96; 1,96)$, acéptase a hipótese nula. Pódese concluír que os datos son compatibles co que di o fabricante.

Para profundar

27. A conclusión dun contraste de hipóteses realizado cun nivel de significación igual a 0,1 foi "aceptar a hipótese nula H_0". Cal sería a conclusión para un nivel de significación igual a 0,05?

Solución:

A conclusión sería seguir aceptando a hipótese nula, xa que co nivel de significación do 0,05, a rexión de aceptación aumenta e, polo tanto, o estatístico seguirá estando nesta rexión.

28. A partir dos datos recollidos sobre unha mostra aleatoria de 121 pequenas e medianas empresas dunha comarca, calculouse para o último ano un beneficio medio de 89 millóns de euros, cunha cuasivarianza de 30,25 euros^2.

Contesta xustificando as respostas:

a) Poderíase rexeitar, cun nivel de significación de 0,001, a afirmación de que os beneficios medios na pequena e mediana empresa desta comarca son de 90 millóns de euros?

b) Que ocorrería para o nivel de significación 0,05?

Solución:

Sexa a cuasivarianza = s^2

A varianza = σ^2

Temos: $s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2$

Logo:

$30,25 = \frac{121}{120}\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = 30 \Rightarrow \sigma = 5,48$

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	90	5,48	
Mostra	89		121

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 90$

$H_1: \mu \neq 90$

Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}001 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}999 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 3{,}291$

A rexión de aceptación é: (–3,291; 3,291)

Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{89 - 90}{\frac{5{,}48}{\sqrt{121}}} = -2$$

Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $-2 \in (-3{,}291; 3{,}291)$, acéptase a hipótese nula.

b) Se: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow\ = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: (–1,96; 1,96)

O valor do estatístico $-2 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$; rexéitase a hipótese nula.

29. Un fabricante garántelle a un laboratorio farmacéutico que as súas máquinas producen comprimidos cun diámetro medio de 25 mm. Unha mostra de 100 comprimidos deu, como media dos diámetros, 25,18 mm. Supoñendo que o diámetro dos comprimidos é unha variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,89 mm, deséxase contrastar, cun nivel de significación do 5%, se o diámetro medio que afirma o fabricante é correcto. Para isto:

a) Formula a hipótese nula e a hipótese alternativa do contraste.

b) Realiza o contraste ao nivel de significación indicado.

Solución:

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	25	0,89	
Mostra	25,18		100

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 25$

$H_1: \mu \neq 25$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: (–1,96; 1,96)

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{25{,}18 - 25}{\frac{0{,}89}{\sqrt{100}}} = 2{,}02$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $2{,}02 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, rexéitase a hipótese nula.

30. En diferentes países da Unión Europea levouse a cabo un estudo da porcentaxe da poboación que accede ao ensino superior. Nos países escollidos obtivéronse os valores que aparecen a continuación (medidos en tanto por cento):

23,5	35	29,5	31	23
33,5	27	28	30,5	

Suponse que estas porcentaxes seguen unha distribución normal con desviación típica igual ao 5%. Deséxase contrastar, cun nivel de significación do 5%, se os datos anteriores son compatibles cun valor medio da porcentaxe da poboación que cursa estudos superiores igual ao 28%.

a) Formula no contraste cales son a hipótese nula e a hipótese alternativa.

b) Determina a rexión crítica do contraste.

c) É posible aceptar a hipótese co nivel de significación indicado?

Solución:

A media da mostra é: 29

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	28	5	
Mostra	29		9

a) Defínense as hipóteses nula e alternativa:

$H_0: \mu = 28$

$H_1: \mu \neq 28$

b) Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

A rexión de aceptación é: (–1,96; 1,96)

c) Defínese o estatístico para o contraste:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{29 - 28}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = 0{,}6$$

d) Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:

Como $0{,}6 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, acéptase a hipótese nula.

Paso a paso

31. Queremos contrastar o tempo medio en minutos para efectuar unha proba. Tomamos unha mostra de 50 persoas e obtivemos unha media de 48 minutos cunha desviación típica de 6 minutos. Podemos garantir, cun nivel de significación do 5%, que a duración media da proba é de 45 minutos?

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

32. Unha máquina produce un 4% de pezas defectuosas. Por este motivo, modificouse o proceso de produción da máquina e agora deséxase saber se se rebaixou a porcentaxe de pezas defectuosas fabricadas. Tomouse unha mostra de 500 pezas e obtívose que 10 pezas foron defectuosas. Pódese asegurar, cun nivel de significación do 5%, que os cambios na produción rebaixan o número de pezas defectuosas?

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

33. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

34. O salario medio correspondente a unha mostra de 1 600 persoas de certa poboación é de 565 €. Sábese que a desviación típica dos salarios na poboación é de 120 €. Pódese afirmar, cun nivel de significación do 5%, que o salario medio desta poboación é de 570 €?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste da media bilateral			
2		μ	σ	Tamaño
3	Poboación	570	120	
4	Mostra	565		1600
5	Hipótese			
6	H0	$\mu = \mu 0$		
7	Rexión de aceptación			
8	Nivel de significación	0,05		
9	Nivel de confianza $1 - \alpha$	0,95		
10	$P(-k < z < k) = 1 - \alpha$	0,98		
11	Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	1,96		
12	Rexión de aceptación	-1,96	1,96	
13	Estatístico			
14	z	-1,67		
15	Decisión			
16	Acéptase H0?	Acéptase H0		

35. Deséxase contrastar se o grao de satisfacción das persoas usuarias dos servizos públicos de saúde supera os 6 puntos nunha escala de 0 a 10. Tomouse unha mostra de 100 persoas e obtívose unha valoración media de 5,5 puntos e unha desviación típica de 3 puntos. Pódese afirmar, cun nivel de confianza do 99%, que a media do grao de satisfacción supera os 6 puntos?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste unilateral para a media			
2		μ	σ	Tamaño
3	Poboación	6	3	
4	Mostra	5,5		100
5	Hipótese			
6	H0	$\mu > \mu 0$		
7	Rexión de aceptación			
8	Nivel de significación	0,01		
9	Nivel de confianza $1 - \alpha$	0,99		
10	$P(-k < z < k) = 1 - \alpha$	0,990		
11	Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	2,33		
12	Rexión de aceptación	-2,33	∞	
13	Estatístico			
14	z	-1,67		
15	Decisión			
16	Acéptase H0?	Acéptase H0		

36. Un laboratorio desexa estudar a porcentaxe de persoas que teñen somnolencia como efecto secundario ao tomar un medicamento. Realizouse un estudo cunha mostra de 120 individuos e resultou que o 15% tivo este efecto secundario. O laboratorio desexa afirmar que só un 10% de pacientes teñen somnolencia como efecto secundario. Poden facer tal afirmación cun nivel de significación do 1%?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste da proporción bilateral			
2		Proporción p	σ	Tamaño
3	Poboación	0,10	0,02739	
4	Mostra	0,15		120
5	Hipótese			
6	H0	$\mu = \mu 0$		
7	Rexión de aceptación			
8	Nivel de significación	0,01		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,99		
10	P(– k < z < k) = 1 – α	0,995		
11	Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	2,58		
12	Rexión de aceptación	-2,58	2,58	
13	Estatístico			
14	z	1,83		
15	Decisión			
16	Acéptase H0?	Acéptase H0		

37. Un profesor afirma que a porcentaxe de estudantes de bacharelato do seu centro que fuma non supera o 15%. Se nunha mostra de 60 deses estudantes se observou que 12 fumaban:

a) É aceptable a afirmación do profesor cun nivel de significación de 0,01?

b) A afirmación do apartado anterior é a mesma se o nivel de confianza é do 90%?

Solución:

	A	B	C	D
1	Contraste unilateral para a proporción			
2		Proporción p	σ	Tamaño
3	Poboación	0,15	0,04610	
4	Mostra	0,2		60
5	Hipótese			
6	H0	p < p0		
7	Rexión de aceptación			
8	Nivel de significación	0,01		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,99		
10	P(z ≤ k) = 1 – α	0,990		
11	Valor crítico: z_α	2,33		
12	Rexión de aceptación	– ∞	2,33	
13	Estatístico			
14	z	1,08		
15	Decisión			
16	Acéptase H0?	Acéptase H0		

	A	B	C	D
1	Contraste unilateral para a proporción			
2		Proporción p	σ	Tamaño
3	Poboación	0,15	0,04610	
4	Mostra	0,2		60
5	Hipótese			
6	H0	p < p0		
7	Rexión de aceptación			
8	Nivel de significación	0,1		
9	Nivel de confianza 1 – α	0,90		
10	P(z ≤ k) = 1 – α	0,90		
11	Valor crítico: z_α	1,28		
12	Rexión de aceptación	– ∞	1,28	
13	Estatístico			
14	z	1,08		
15	Decisión			
16	Acéptase H0?	Acéptase H0		

1. Xúntanse tres clases A, B e C, co mesmo número de estudantes, no salón de actos dun centro. Sábese que o 10% dos estudantes na clase A son zurdos, na clase B o 8% son zurdos e na clase C o 88% dos estudantes non son zurdos.
   a) Se eliximos ao azar un estudante do salón de actos, con que probabilidade o estudante non será zurdo?
   b) Sabendo que un estudante elixido ao azar é zurdo, cal é a probabilidade de que pertenza á clase C?

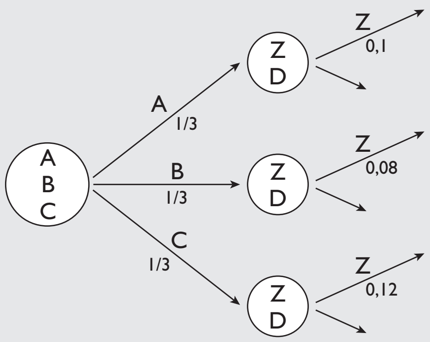
Solución:

A, B e C as clases.

Z = Zurdo.

D = Destro.

Diagrama en árbore:



a) Aplícase a regra da suma ou da probabilidade total e logo a do contrario:

$P(Z) = P(A) \cdot P(Z/A) + P(B) \cdot P(Z/B) + P(C) \cdot P(Z/C) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}08 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}12 = 0{,}1$

$P(\overline{Z}) = 1 - P(Z) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 = 90\%$

b) Aplícase o teorema de Bayes e a propiedade do contrario:

$$P(C/Z) = \frac{P(C) \cdot P(Z/C)}{P(Z)} = \frac{1/3 \cdot 0{,}12}{0{,}1} = 0{,}4$$

2. Unha empresa de electrodomésticos conta con catro fábricas, A, B, C e D, nas que se producen neveiras. A fábrica A produce o 30% do total de neveiras; a fábrica B, o 20%; a C, o 40%; e a D, o 10%. A porcentaxe de neveiras defectuosas en cada fábrica é do 2% en A; do 5% en B; do 4% en C; e do 1% en D.

   Calcula:
   a) A probabilidade de que escollida unha neveira ao azar, esta sexa defectuosa.
   b) A probabilidade de que unha neveira sexa defectuosa e proceda da fábrica B.
   c) Se unha neveira non é defectuosa, cal é a probabilidade de que proveña da fábrica D?

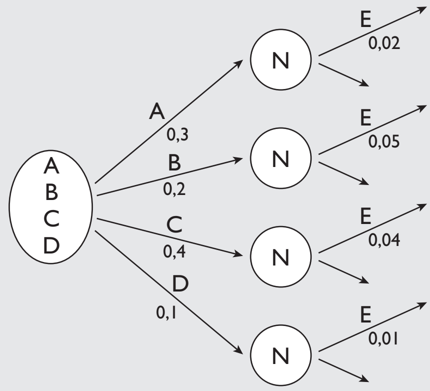
Solución:

Fábricas: A, B, C e D

N = Neveiras.

E = Neveira defectuosa.

Diagrama en árbore:



a) Aplícase a regra da suma ou da probabilidade total:

$P(E) = P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) +$
$+ P(D) \cdot P(E/D) = 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}04 +$
$+ 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}033$

b) Aplícase o teorema de Bayes:

$P(B \cap E) = P(B) \cdot P(E/B) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}01$

c) Aplícase o teorema de Bayes e a propiedade do contrario:

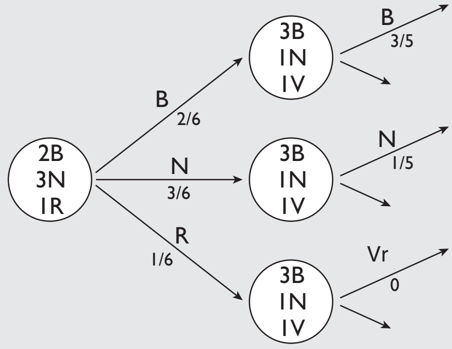
$$P(D/\overline{E}) = \frac{P(D) \cdot P(\overline{E}/D)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}99}{1 - 0{,}033} = 0{,}1$$

3. Temos dúas urnas A e B. Na primeira hai 2 bólas brancas, 3 negras e 1 vermella, e na segunda hai 3 bólas brancas, 1 negra e 1 verde.
   a) Extráese unha bóla de cada urna. Calcula a probabilidade de que ambas sexan da mesma cor.
   b) Lánzase unha moeda. Se se obtén cara, extráense dúas bólas da urna A, e se se obtén cruz, extráense dúas bólas da urna B. Calcula a probabilidade de que ambas as bólas sexan brancas.

Solución:

a) Aplícase a regra da suma ou da probabilidade total:

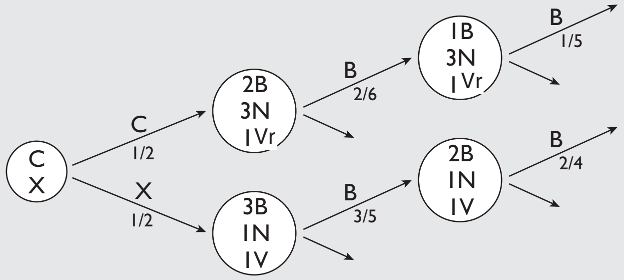
Diagrama en árbore:



$$P(\text{Mesma cor}) = P(B) \cdot P(B/B) + P(N) \cdot P(N/N) =$$
$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

b) Aplícase a regra da suma ou da probabilidade total:

Diagrama en árbore:



$$P(B) = P(C) \cdot P(B/C) \cdot P(B/C \cap B) + P(X) \cdot P(B/X) \cdot$$
$$\cdot P(B/X \cap B) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{30} + \frac{3}{20} = \frac{11}{60}$$

4. Nunha certa facultade sábese que o 25% dos estudantes suspenden matemáticas, o 15% suspenden química e o 10% suspenden matemáticas e química. Selecciónase un estudante ao chou.

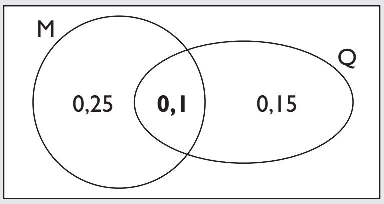
a) Calcula a probabilidade de que o estudante non suspenda química nin matemáticas.

b) Se sabemos que o estudante suspendeu química, cal é a probabilidade de que suspenda tamén matemáticas?

Solución:

M = Suspenden matemáticas.

Q = Suspenden química.



a) Aplícase a probabilidade do contrario.

$$P(\overline{M \cup Q}) = 1 - P(M \cup Q) = 1 - (0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}1) =$$
$$= 0{,}7 = 70\%$$

b) Aplícase a definición de probabilidade condicionada.

$$P(M/Q) = \frac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}67 = 67\%$$

5. Nunha granxa avícola tomouse unha mostra aleatoria de 200 crías de pato, entre as cales se atoparon 120 femias.

a) Atopa un intervalo de confianza, cun nivel do 98%, para a proporción de femias entre estas crías.

b) Razoa, á vista do intervalo atopado, se a ese nivel de confianza pode admitirse que a verdadeira proporción de femias de pato nesa granxa é 0,5.

Solución:

a) Temos: $\hat{p} = \dfrac{120}{200} = 0{,}6$ e $\hat{q} = 0{,}4$

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}98 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

O intervalo é:

$$\left(0{,}6 - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{200}}, 0{,}6 + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{200}}\right) =$$
$$= (0{,}519; 0{,}681) = (0{,}52; 0{,}68)$$

A proporción estará entre o 52% e o 68% cunha probabilidade do 98%.

b) Non pode admitirse que a verdadeira proporción de femias de pato nesa granxa é 0,5 con este nivel de confianza.

6. Tras múltiples observacións constatouse que o número de pulsacións dos deportistas entre 20 e 25 anos se distribúe normalmente cunha desviación típica de 9 pulsacións. Se unha mostra de 100 deportistas desa idade presenta unha media de 64 pulsacións:

a) Atopa o intervalo de confianza ao 97% para a media de pulsacións de todos os deportistas desa idade.

b) Interpreta o significado do intervalo obtido.

Solución:

a) $\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}97 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$

O intervalo é:

$$\left(64 - 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}, 64 + 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}\right) = (62{,}05; 65{,}95)$$

b) A proporción estará entre o 62,05% e o 65,95% cunha probabilidade do 97%.

7. O peso das persoas usuarias dun ximnasio ten unha media descoñecida e unha desviación típica $\sigma = 5{,}4$ kg. Tomamos unha mostra aleatoria de 100 persoas e obtemos unha media de 60 kg.

a) Calcula, cun nivel de confianza do 95%, o intervalo de confianza para o peso medio de todas as persoas.

b) Realízase a seguinte afirmación: "O peso medio dunha persoa usuaria dese ximnasio está comprendido entre 58,5 e 61,5 kg". Con que probabilidade esta afirmación é correcta?

Solución:

a) $\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

O intervalo é:

$$\left(60 - 1{,}96 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}}, 60 + 1{,}96 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}}\right) = (58{,}94; 61{,}06)$$

b) $\overline{x} = \frac{58{,}5 + 61{,}5}{2} = 60$

$60 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}} = 61{,}5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}77$

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$P(-2{,}77 \le z \le 2{,}77) = 2P(z \le 2{,}78) - 1 =$
$= 2 \cdot 0{,}9972 - 1 = 0{,}9944$

O nivel de confianza é: $1 - \alpha = 0{,}9944$

8. Nunha determinada poboación sábese que o valor da taxa diaria de consumo de calorías segue unha distribución normal con desviación típica $\sigma = 400$ calorías.

a) Se a media da poboación é $\mu = 1600$ calorías e se elixe unha mostra aleatoria de 100 persoas desa poboación, determina a probabilidade de que o consumo medio diario de calorías nesa mostra estea comprendido entre 1 550 e 1 660 calorías.

b) Se descoñecemos a media μ e co mesmo tamaño da mostra se afirma que "o consumo medio diario nesa poboación toma valores entre 1 530 e 1 670 calorías", con que nivel de confianza se fai esta afirmación?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = consumo medio de calorías

$$\overline{X} \equiv N\left(1\,600, \frac{400}{\sqrt{100}}\right) \equiv N(1\,600, 40)$$

$P(1\,550 \le x \le 1\,660)$

$P(1\,550 \le x \le 1\,660) =$

$= P\left(\frac{1\,550 - 1\,600}{40} \le z \le \frac{1\,550 + 1\,600}{40}\right) =$

$= P(-1{,}25 \le z \le 1{,}5) =$

$= P(z \le 1{,}5) - P(z \le -1{,}25) =$

$= P(z \le 1{,}5) + P(z \le 1{,}25) - 1 =$

$= 0{,}9332 + 0{,}8944 - 1 = 0{,}8275$

b) $\overline{x} = \frac{1\,530 + 1\,670}{2} = 1\,600$

$1\,600 + z_{\alpha/2} \cdot 40 = 1\,670 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}75$

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

$P(-1{,}75 \le z \le 1{,}75) = 2P(z \le 1{,}75) - 1 =$
$= 2 \cdot 0{,}9599 - 1 = 0{,}9198$

9. Un directivo de certa empresa de material eléctrico afirma que a vida media de certo tipo de lámpadas é de 1 500 horas. Outro directivo da mesma empresa afirma que a vida media destas lámpadas é igual ou menor de 1 500 horas. Elixida unha mostra aleatoria simple de 81 lámpadas deste tipo, vemos que a súa vida media foi de 1 450 horas. Supoñendo que a vida das lámpadas segue unha distribución normal con desviación típica igual a 180 horas:

a) É compatible a hipótese $H_0: \mu = 1\,500$ fronte á hipótese $H_1: \mu \ne 1\,500$, cunha confianza do 99%, co resultado experimental $\overline{x} = 1\,450$?

b) É compatible a hipótese $H_0: \mu = 1\,500$ fronte á hipótese $H_1: \mu < 1\,500$, cunha confianza do 99%, co resultado experimental $\overline{x} = 1\,450$?

Solución:

a)

	Media	D. típica	Tamaño
Poboación	1 500	180	
Mostra	1 450		81

- **Defínense as hipóteses nula e alternativa:**
  $H_0: \mu = 1\,500$
  $H_1: \mu \ne 1\,500$
- **Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:**
  $1 - \alpha = 99\% = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$
  A rexión de aceptación é: $(-2{,}58; 2{,}58)$
- **Defínese o estatístico para o contraste:**
  $$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{1\,450 - 1\,500}{\frac{180}{\sqrt{81}}} = -2{,}5$$
- **Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:**
  Como $-2{,}5 \in (-2{,}58; 2{,}58)$, acéptase a hipótese nula cunha probabilidade do 99%.

b)
- **Defínense as hipóteses nula e alternativa:**
  $H_0: \mu = 1\,500$
  $H_1: \mu < 1\,500$
- **Defínese a rexión de aceptación para o nivel de confianza dado:**
  $1 - \alpha = 99\% = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}325 = 2{,}33$
  A rexión de aceptación é: $(-2{,}33; +\infty)$
- **Defínese o estatístico para o contraste:**
  $$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1) \Rightarrow z = \frac{1\,450 - 1\,500}{\frac{180}{\sqrt{81}}} = -2{,}5$$
- **Acéptase ou rexéitase a hipótese nula:**
  Como $-2{,}5 \notin (-2{,}33; +\infty)$, rexéitase a hipótese nula cunha probabilidade do 99%.