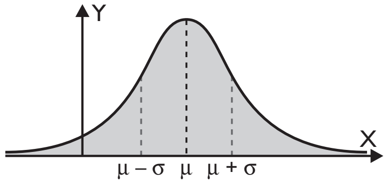
12 Inferencia estatística. Estimación por intervalos

1. A distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Pensa e calcula

No debuxo da gráfica, a área comprendida entre o eixe X e a curva é 1. Calcula mentalmente canto vale a área que queda á esquerda da recta $x = \mu$.



Solución:
Área = 0,5

Aplica a teoría

1. Calcula nunha N(0, 1) as seguintes probabilidades:

a) $P(z \leq 1,38)$ b) $P(z \geq 2,1)$
c) $P(z \leq -1,46)$ d) $P(1,2 \leq z \leq 2)$
e) $P(-2,1 \leq z \leq 3,2)$ f) $P(-2,4 \leq z \leq 2,4)$

Solución:

a) $P(z \leq 1,38) = 0,9162$

b) $P(z > 2,1) = 1 - P(z < 2,1) = 0,0179$

c) $P(z \leq -1,46) = P(z \geq 1,46) = 1 - P(z \leq 1,46) = 0,0721$

d) $P(1,2 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq 1,2) = 0,0923$

e) $P(-2,1 \leq z \leq 3,2) = P(z \leq 3,2) - P(z \leq -2,1) =$
$= P(z \leq 3,2) - 1 + P(z \leq 2,1) = 0,9814$

f) $P(-2,4 \leq z \leq 2,4) = P(z \leq 2,4) - P(z \leq -2,4) =$
$= 2P(z \leq 2,4) - 1 = 0,9836$

2. Calcula o valor de **k** nos seguintes casos:

a) $P(z \leq k) = 0,9871$ b) $P(z \geq k) = 0,1685$

Solución:

a) $k = 2,23$

b) $k = 0,9601$

3. Calcula nunha N(10, 2) as seguintes probabilidades:

a) $P(x \leq 8)$ b) $P(x \geq 11)$
c) $P(9 \leq x \leq 10)$ d) $P(-9 \leq x \leq 9)$

Solución:

a) $P\left(z \leq \frac{8 - 10}{2}\right) = P(z \leq -1) = 1 - P(z \leq 1) = 0,1587$

b) $P\left(z \geq \frac{11 - 10}{2}\right) = P(z \geq 0,5) = 1 - P(z \leq 0,5) = 0,3085$

c) $P\left(\frac{9 - 10}{2} \leq z \leq \frac{10 - 10}{2}\right) = P(-0,5 \leq z \leq 0) =$
$= P(z \leq 0) - P(z \leq -0,5) = 0,1915$

d) $P\left(\frac{-9 - 10}{2} \leq z \leq \frac{9 - 10}{2}\right) = P(-9,5 \leq z \leq -0,5) =$
$= P(z \leq -0,5) - P(z \leq -9,5) =$
$= 1 - P(z \leq 0,5) - 1 + P(z \leq 9,5) = 0,3085$

4. Calcula o intervalo característico nunha N(0, 1) correspondente á probabilidade de 0,9.

Solución:

$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0,9$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0,9$

$P(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0,90}{2} = 0,95$

$z_{\alpha/2} = 1,65$

2. Mostraxe

Pensa e calcula

Analiza a ficha técnica da marxe e contesta:

a) Cal é a poboación?

b) Cantos individuos hai na mostra?

c) Explica como se seleccionou a mostra.

d) Que significa a marxe de erro?

Solución:

a) Todos os maiores de 18 anos que viven no Estado español.

b) 2 001 individuos.

c) De cada comunidade autónoma seleccionouse aleatoriamente un número de individuos proporcional ao seu número de habitantes.

d) Que os resultados poden ser erróneos nun 2,2% por exceso ou por defecto.

Aplica a teoría

5. Nunha fábrica que envasa 2 000 latas de xarda diarias deséxase obter unha mostra de 100 latas. Explica como seleccionar a mostra:

a) Con mostraxe aleatoria simple.

b) Con mostraxe aleatoria sistemática.

Solución:

a) Elíxense ao azar as 100 latas. Pódese obter unha lista de 100 números aleatorios e seleccionar as latas correspondentes.

b) Elíxese unha lata aleatoriamente e vaise elixindo unha de cada 20 latas, por exemplo, ata completar as 100 da mostra.

6. Quérese obter unha mostra de 5 estudantes de 2º de bacharelato por mostraxe aleatoria simple. Se hai 30 estudantes e estes se numeraron do 1 ao 30, obtén coa calculadora seis números aleatorios que formen a mostra.

Solución:

27, 9, 20, 25 e 11

(A solución é aberta).

7. Nun almacén disponse de 60 000 paquetes de deterxente de catro tipos distintos segundo a táboa que aparece a continuación:

Deterxente	A	B	C	D
Nº de paquetes	18 000	20 000	10 000	12 000

Deséxase extraer unha mostra de 120 paquetes. Calcula o número de paquetes que hai que tomar de cada clase para realizar unha mostraxe aleatoria estratificada proporcional..

Solución:

60 000 : 120 = 500

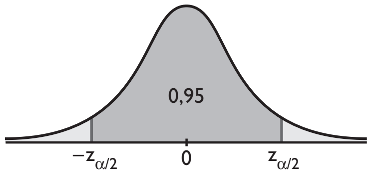
Hai que tomar, de cada 500 paquetes, un.

Deterxente	A	B	C	D	Total
Paquetes	18 000	20 000	10 000	12 000	60 000
Mostra	36	40	20	24	120

3. Estimación da media por intervalos de confianza

Pensa e calcula

Sexa $z \equiv N(0, 1)$. Utiliza a táboa do anexo final e calcula o valor de $z_{\alpha/2}$ tal que:
$P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$



Solución:

$P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0,95$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0,95$

$P(z < z_{\alpha/2}) = \dfrac{1 + 0,95}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Aplica a teoría

8. Unha empresa de transporte sabe que o peso medio dos paquetes que transporta é de 20 kg, cunha desviación típica de 5 kg. Se nun dos seus transportes leva 50 paquetes, cal é a probabilidade de que o seu peso medio sexa maior de 22 kg?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

b) $n = 50 \geq 30 \Rightarrow \mu = 20, \sigma = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = 0,71 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X} \equiv N(20; 0,71)$

c) $P(\overline{X} > 22) = P\left(z > \dfrac{22 - 20}{0,71}\right) = P(z > 2,82) =$

$= 1 - P(z < 2,82) = 0,0024$

9. O tempo que permanece cada paciente na consulta de certo médico é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal cunha desviación típica de 4 minutos. Tomouse unha mostra de 256 pacientes deste médico e atopouse que o seu tempo medio de consulta foi de 10 minutos. Calcula o intervalo de confianza, a un nivel do 95%, para o tempo medio de consulta que se deduce da mostra.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

b) O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(10 - 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}}, 10 + 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{256}}\right) =$$

$= (9,51; 10,49)$

Temos que $\mu \in (9,51; 10,49)$ cunha probabilidade do 95%.

10. As vendas mensuais nunha tenda de electrodomésticos distribúense segundo unha lei normal con desviación típica de 540 €. Realizouse un estudo nos últimos nove meses e atopouse o intervalo de confianza (2 802, 3 508).

a) Calcula cal foi a media das vendas neses nove meses.

b) Cal é o nivel de confianza para este intervalo?

Solución:

a) $\overline{X} = \dfrac{2\,802 + 3\,508}{2} = 3\,155$

b) $\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\,802 \Leftrightarrow 3\,155 - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{540}{\sqrt{9}} =$

$= 2\,802 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \Rightarrow P(-1,96 < z < 1,96) =$

$= 0,95 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95$

11. Un fabricante de lámpadas sabe que a desviación típica da duración das lámpadas é de 100. Calcula o tamaño da mostra que se deberá someter a proba para ter unha confianza do 95% de que o erro da duración media que se calcule sexa menor de 10 h.

Solución:

Como $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E}\right)^2$

$n = \left(1,96 \cdot \dfrac{100}{10}\right)^2 = 384,16$

Débese tomar unha mostra de 385 lámpadas.

4. Estimación da proporción por intervalos de confianza

Pensa e calcula

Realizouse unha estimación da proporción de xente nova que le o xornal diariamente cun nivel de confianza do 95% e obtívose que esta proporción está no intervalo (71, 75). Calcula cal é o erro máximo que se pode cometer co nivel de confianza do 95% nesta estimación.

Solución:

O erro máximo é:

$$\frac{75 - 71}{2} = 2 \text{ persoas}$$

Aplica a teoría

12. Nunhas eleccións, un dos candidatos obtivo o 46% dos votos. Calcula a probabilidade de que nunha mostra elixida ao chou de 200 votantes saíse unha porcentaxe ao seu favor igual ou superior ao 50%.

Solución:

Variable: $\hat{p}$ = proporcións da mostra.

$$n = 200 \geq 30 \Rightarrow p = 0{,}46 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0{,}46 \cdot 0{,}54}{200}} = 0{,}035$$

$$P(\hat{p} \geq 0{,}5) = P\left(z \geq \frac{0{,}5 - 0{,}46}{0{,}035}\right) = 1 - P(z \leq 1{,}14) =$$

$$= 0{,}1271$$

13. Nunha mostra aleatoria de 400 persoas que viron un programa de televisión, 100 persoas recoñeceron que lles gustara. Determina o intervalo de confianza, ao 95%, para a proporción de persoas na poboación ás que lles gusta o programa.

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Temos: $\hat{p} = \dfrac{100}{400} = 0{,}25$; e $\hat{q} = 0{,}75$

b) O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}25 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{400}}; 0{,}25 + \right.$$

$$\left. + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{400}}\right) = (0{,}21; 0{,}29)$$

A proporción estará entre o 21% e o 29% cunha probabilidade do 95%.

14. Nunha mostra de 100 pacientes sometidos a un certo tratamento, obtense melloría en 80 pacientes. Se se traballa cun nivel de confianza do 95%:

a) Cal é o erro máximo admisible?

b) Cal é o mínimo número de pacientes que se debe tomar se co nivel de confianza dado se desexa que o erro sexa menor de 0,05?

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$E = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{100}} = 0{,}08$$

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}05^2} = 245{,}86$$

Débese tomar unha mostra de 246 pacientes.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Suponse que a cualificación en Matemáticas obtida polo alumnado dunha certa clase é unha variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Elíxese unha mostra aleatoria simple de tamaño 10 e obtense unha suma das súas cualificacións igual a 59,5 puntos. Determina un intervalo de confianza ao 95% para a cualificación media da clase.

- ☐ (58,57; 60,43)
- ☒ (5,02; 6,88)
- ☐ (5,92; 5,98)
- ☐ (5, 6)

2 No enunciado do problema anterior, di que tamaño deberá ter a mostra para que o erro máximo da estimación sexa de 0,5 puntos, cun nivel de confianza do 95%.

- ☒ 35
- ☐ 34
- ☐ 6
- ☐ 31

3 A duración da vida dunha determinada especie de tartaruga suponse que é unha variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 anos. Tómase unha mostra aleatoria simple de 10 tartarugas e obtéñense as seguintes duracións, en anos:

46; 38; 59; 29; 34; 32; 38; 21; 44; 34

Determina un intervalo de confianza ao 95% para a vida media desta especie de tartarugas.

- ☐ (37,30; 37,70)
- ☐ (30, 40)
- ☐ (27,5; 47,5)
- ☒ (31,30; 43,70)

4 No enunciado do problema anterior, cal debe ser o tamaño da mostra observada para que o erro da estimación da vida media non sexa superior a 5 anos, cun nivel de confianza do 90%?

- ☐ 15
- ☐ 16
- ☒ 11
- ☐ 10

5 A lonxitude dos cables dos auriculares que fabrica unha empresa é unha variable aleatoria que segue unha lei normal con desviación típica 4,5 cm. Para poder estimar a lonxitude media medíronse os cables dunha mostra aleatoria de 9 auriculares e obtivéronse as seguintes lonxitudes, en cm:

205, 198, 202, 204, 197, 195, 196, 201, 202

Atopa un intervalo de confianza, ao 97%, para a lonxitude media dos cables.

- ☐ (100; 300)
- ☐ (195,5; 204,5)
- ☒ (196,74; 203,26)
- ☐ (199,94; 200,06)

6 No enunciado anterior, determina o tamaño mínimo que debe ter unha mostra destes auriculares para que o erro de estimación da lonxitude media sexa inferior a 1 cm, co mesmo nivel de confianza do apartado anterior.

- ☐ 90
- ☐ 10
- ☒ 96
- ☐ 95

7 Sábese que as puntuacións dun test seguen unha lei normal de media 36 e desviación típica 4,8. Se se toma unha mostra aleatoria de 16 individuos, cal é a probabilidade de que a media desta mostra sexa superior a 35 puntos?

- ☒ 0,7977
- ☐ 0,2023
- ☐ 0,5825
- ☐ 0,9661

8 No enunciado anterior, que porcentaxe de mostras de tamaño 25 ten unha media dunha mostra comprendida entre 34 e 36?

- ☐ 50%
- ☐ 70,23%
- ☐ 29,77%
- ☒ 48,14%

9 Para efectuar un control de calidade sobre a duración en horas dun modelo de xoguetes electrónicos elíxese unha mostra aleatoria de 36 xoguetes dese modelo, e obtense unha duración media de 97 horas. Sabendo que a duración dos xoguetes electrónicos dese modelo se distribúe normalmente cunha desviación típica de 10 horas, atopa o intervalo de confianza ao 99,2% para a duración media dos xoguetes electrónicos dese modelo.

- ☐ (94,08; 99,92)
- ☒ (92,58; 101,42)
- ☐ (92,71; 101,29)
- ☐ (87; 107)

10 A vida media dun determinado modelo de lámpada segue unha distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elixida unha mostra e cun nivel de confianza do 98%, obtense o intervalo (388,68; 407,32) para a vida media. Calcula a media e o tamaño da mostra elixida.

- ☒ $\bar{x}$ = 398 días e n = 225 lámpadas.
- ☐ $\bar{x}$ = 398 días e n = 15 lámpadas.
- ☐ $\bar{x}$ = 398 días e n = 275 lámpadas.
- ☐ Non se pode determinar.

Exercicios e problemas

1. A distribución normal N(μ, σ)

15. Calcula o intervalo característico nunha N(0, 1) correspondente á probabilidade de 0,99.

Solución:

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}99$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0{,}99$

$P(z \le z_{\alpha/2}) = \dfrac{1 + 0{,}99}{2} = 0{,}995$

$z_{\alpha/2} = 2{,}576 = 2{,}58$

16. Un estudo dun fabricante de televisores indica que a duración media dun televisor é de 10 anos, cunha desviación típica de 0,7 anos. Supoñendo que a duración media dos televisores siga unha distribución normal:

a) Calcula a probabilidade de que un televisor dure máis de 9 anos.

b) Calcula a probabilidade de que dure entre 9 e 11 anos.

Solución:

a) $x \equiv$ duración media.

$N(10; 0{,}7)$

$P(x > 9)$

$P(x > 9) = P\left(z > \dfrac{9 - 10}{0{,}7}\right) = P(z > -1{,}43) =$

$= P(z < 1{,}43) = 0{,}9236$

b) $P(9 < x < 11) = P\left(\dfrac{9 - 10}{0{,}7} < z < \dfrac{11 - 10}{0{,}7}\right) =$

$= P(-1{,}43 < z < 1{,}43) = 2P(z < 1{,}43) - 1 = 0{,}8472$

17. A duración de certo tipo de motor é unha variable normal cunha media de 10 anos e unha desviación típica de 2 anos. O fabricante garante o bo funcionamento dos motores por un período de 13 anos. Que porcentaxe de motores se espera que non cumpran a garantía?

Solución:

a) $x \equiv$ duración do motor.

b) $N(10; 2)$

$P(x < 13)$

$P(x < 13) = P\left(z < \dfrac{13 - 10}{2}\right) = P(z < 1{,}5) = 0{,}9332$

O 93,32% dos motores terán unha duración inferior a 13 anos, e polo tanto, non cumprirían a garantía.

2. Mostraxe

18. Desexase elixir por mostraxe aleatoria simple unha mostra de 8 veciños dunha comunidade de 60 persoas. Se se numeraron as 60 persoas do 1 ao 60, emprega a calculadora para xerar a mostra.

Solución:

47, 35, 60, 43, 10, 18, 37 e 49

(A solución é aberta).

19. En certa localidade hai 500 empresas dedicadas á alimentación, distribuídas segundo o número de empregados da seguinte forma:

Nº de empregados	Nº de empresas
Menor de 20	300
Entre 20 e 50	150
Maior de 50	50

Desexase extraer unha mostra de 20 empresas. Calcula o número delas que hai que tomar de cada clase para realizar unha mostraxe aleatoria estratificada proporcional.

Solución:

500 : 20 = 25

De cada 25, toman un.

Nº Empregados	Nº de empresas	Mostra
Menor de 20	300	12
Entre 20 e 50	150	6
Maior de 50	50	2
Total	500	20

20. Nun barrio quérese facer un estudo para coñecer o tipo de actividades de lecer que máis lles gustan aos seus habitantes. Para isto, van ser entrevistados 100 individuos elixidos ao azar.

a) Explica que procedemento de selección sería máis axeitado: mostraxe con reposición ou sen reposición.

b) Como os gustos cambian coa idade, e sábese que no barrio viven 2 500 nenos, 7 000 adultos e 500 anciáns, posteriormente decídese elixir a mostra anterior empregando mostraxe estratificada proporcional.

b1) Define os estratos.

b2) Determina o tamaño da mostra correspondente a cada estrato.

Solución:

a) É aconsellable elixir a mostra sen reemprazamento, para evitar que a opinión dunha persoa se teña en conta máis dunha vez.

b1) Débense considerar os estratos formados por nenos, adultos e anciáns.

b2) 10 000 : 100 = 100

De cada 100, elíxese un.

Estratos	Nenos	Adultos	Anciáns	Total
Individuos	2 500	7 000	500	10 000
Mostra	25	70	5	100

3. Estimación da media por intervalos de confianza

21. Unha variable aleatoria segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ. Extráense mostras aleatorias simples de tamaño **n**.

a) Que distribución ten a variable aleatoria media da mostra?

b) Se se toman mostras de tamaño 4 dunha variable aleatoria **x** con distribución N(165, 12), calcula $P(\overline{X} > 173{,}7)$.

Solución:

a) $\overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

n = 4 < 30 pero a distribución é normal; logo:

$$\mu = 165, \sigma = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(165; 6)$$

$$P(\overline{X} > 173{,}7) = P\left(z > \frac{173{,}7 - 165}{6}\right) = P(z > 1{,}45) =$$

$$= 1 - P(z < 1{,}45) = 0{,}0735$$

22. Sábese que o peso dos bebés acabados de nacer nunha determinada poboación segue unha distribución normal de 3 600 g de media e 280 g de desviación típica. Tómase unha mostra ao azar de 196 deles, e calcúlase a media. Cal é a probabilidade de que esta media estea entre 3 580 e 3 620 g?

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

b) $n = 196 \geq 30 \Rightarrow \mu = 3\,600, \sigma = \dfrac{280}{\sqrt{196}} = 20 \Rightarrow$

$\overline{X} \equiv N(3\,600, 20)$

c) $P(3\,580 < \overline{X} < 3\,620) =$

$$= P\left(\frac{3\,580 - 3\,600}{20} < z < \frac{3\,620 - 3\,600}{20}\right) =$$

$$= P(-1 < z < 1) = 2P(z < 1) - 1 = 0{,}6826$$

23. Foron probados 10 automóbiles, escollidos aleatoriamente dunha mesma marca e modelo, por condutores coa mesma forma de conducir e en estradas similares. Obtívose que o consumo medio de gasolina en litros, por cada 100 km, foi de 5. Estudos previos indican que o consumo de gasolina ten unha distribución normal de 2 litros de desviación típica. Determina un intervalo de confianza ao 95% para a media do consumo de gasolina destes automóbiles.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

b) O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(5 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}; 5 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (3{,}76; 6{,}24)$$

Temos que o consumo medio cada 100 km está no intervalo (3,76; 6,24) cunha probabilidade do 95%.

24. A duración das chamadas de teléfono nunha oficina comercial segue unha distribución normal con desviación típica de 10 segundos. Faise unha enquisa entre 50 chamadas, e a media de duración obtida nesa mostra é de 35 segundos. Calcula un intervalo de confianza ao 99% para a duración media das chamadas.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

b) O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(35 - 2{,}58 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}};\ 35 + 2{,}58 \cdot \frac{10}{\sqrt{50}}\right) = (31{,}35; 38{,}65)$$

Temos que a duración media das chamadas está no intervalo (31,35; 38,65) cunha probabilidade do 99%.

25. Estímase que o tempo de reacción dun condutor ante un obstáculo imprevisto ten unha distribución normal con desviación típica de 0,05 segundos. Se se quere conseguir que o erro de estimación da media non supere os 0,01 segundos, cun nivel de confianza do 99%, que tamaño mínimo deberá ter a mostra de tempo de reacción?

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 = 166{,}41$$

Débese tomar unha mostra de 167 individuos.

26. Unha variable aleatoria **x** ten distribución normal, e a súa desviación típica é igual a 3.

a) Se se consideran mostras de tamaño 16, que distribución segue a variable aleatoria media da mostra?

b) Se se desexa que a media da mostra non difira en máis dunha unidade da media da poboación, con probabilidade de 0,99, cantos elementos se deberían tomar como mínimo na mostra?

Solución:

a) Se se chama μ á media da poboación, entón a media da mostra segue unha distribución:

$$\overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow N(\mu, 0{,}75)$$

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 59{,}91$$

Débese tomar unha mostra de 60 individuos.

4. Estimación da proporción por intervalos de confianza

27. Nun centro escolar, o 40% do alumnado ten dous ou máis irmáns. Se se selecciona unha mostra de 36 estudantes, calcula cal é a probabilidade de que, dos estudantes da mostra, o 50% ou menos teñan dous ou máis irmáns?

Solución:

Variable: $\hat{p}$ = proporcións da mostra

$$n = 36 \geq 30 \Rightarrow p = 0{,}4 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{36}} = 0{,}08$$

$$P(\hat{p} \leq 0{,}5) = P\left(z \leq \frac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}08}\right) = P(z \leq 1{,}25) = 0{,}8944$$

28. Realizouse unha enquisa a 325 cidadáns e contabilizouse que 120 ían ao teatro regularmente.

a) Atopa, cun nivel de confianza do 94%, un intervalo para estimar a proporción de cidadáns que van ao teatro regularmente.

b) Calcula o número mínimo de cidadáns que deben entrevistarse para que o erro sexa do 0,01.

Solución:

a) Nivel de confianza = $1 - \alpha = 0{,}94 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}89$

$p = 120/325 = 0{,}369 \Rightarrow q = 0{,}631$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}369 \cdot 0{,}631}{325}} = 0{,}027$$

$(0{,}369 - 1{,}89 \cdot 0{,}027; 0{,}369 + 1{,}89 \cdot 0{,}027) =$

$= (0{,}32; 0{,}42)$

A proporción de cidadáns está entre o 32% e o 42% cunha probabilidade do 94%.

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = (1{,}89)^2 \cdot \frac{0{,}369 \cdot 0{,}631}{0{,}01^2} = 8\,317{,}24$$

Tomaranse 8 318 persoas.

29. Nunha mostra aleatoria de 400 persoas dunha poboación, hai 80 que teñen teléfono móbil. Calcula o intervalo de confianza aproximado para a proporción da poboación, cun nivel de confianza do 95%.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Temos: $\hat{p} = 0{,}2$ e $\hat{q} = 0{,}8$

b) O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}; 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}\right) =$$

$= (0{,}16; 0{,}24)$

A proporción estará entre o 16% e o 24% cunha probabilidade do 95%.

30. Cando se lles preguntou a 100 persoas de certa cidade, elixidas ao chou, se len o xornal polo menos unha vez á semana, só 40 contestaron que si. Atopa un intervalo de confianza, con nivel de confianza do 99%, para a proporción de persoas desa cidade que len o xornal polo menos unha vez á semana.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

Temos: $\hat{p} = 0{,}4$ e $\hat{q} = 0{,}6$

b) O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}4 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}; 0{,}8 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}\right) =$$

$= (0{,}27; 0{,}53)$

A proporción estará entre o 27% e o 53% cunha probabilidade do 99%.

31. O 70% das persoas que teñen teléfono móbil usan algún servizo de telefonía a través de Internet. Se se toma unha mostra de 150 persoas, cal é a probabilidade de que haxa máis de 90 persoas que usen algún servizo de telefonía móbil a través de Internet?

Solución:

- Variable: $\hat{p}$ = proporcións da mostra
- n = 150 ≥ 30 ⇒ pódese aproximar a unha normal:

$$N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

- $p = 0{,}7 \Rightarrow q = 0{,}3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{150}} = 0{,}04$
- $P(\hat{p} \geq 0{,}6) = P\left(z \leq \frac{0{,}6 - 0{,}7}{0{,}04}\right) = P(z \geq -2{,}5) =$

$= P(z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$

32. Dunha mostra de 60 clientes de supermercados, 24 foron capaces de dicir o prezo do produto que mercaran.

a) Determina o intervalo de confianza, ao 95%, para a proporción de clientes da poboación.

b) Calcula o número mínimo de clientes para que o erro sexa menor dun 5%.

Solución:

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Temos: $\hat{p} = 0{,}4$ e $\hat{q} = 0{,}6$

O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{60}}; 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{60}}\right) =$$

$= (0{,}28; 0{,}52)$

A proporción estará entre o 28% e o 52% cunha probabilidade do 95%.

Para ampliar

33. Unha cidade de 2000 habitantes está poboada por persoas de pelo negro, loiro e castaño. Seleccionouse, mediante mostraxe aleatoria estratificada con afixación proporcional, unha mostra constituída por 28 persoas de pelo negro, 32 de pelo loiro e 20 de pelo castaño. Determina cal é a composición, segundo a cor de pelo, dos habitantes desta cidade.

Solución:

Mostra: 28 + 32 + 20 = 80

2 000 : 80 = 25

Estratos	P. negro	P. loiro	P. castaño	Total
Mostra	28	32	20	80
Poboación	700	800	500	2 000

34. O peso das peras dunha colleita distribúese segundo unha normal de 115 g de media e 25 g de desviación típica.

a) Cal é a probabilidade de que unha pera elixida ao azar pese máis de 120 g?

b) Cal é a probabilidade de que o peso medio dunha mostra de 64 peras estea entre 112 e 119 g?

Solución:

a) $P(x > 120) = P\left(z > \frac{120 - 115}{25}\right) =$

$= P(z > 0{,}2) = 1 - P(z < 0{,}2) = 0{,}4207$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

n = 64 > 30 Logo:

$\mu = 115, \sigma = \frac{25}{\sqrt{64}} = 3{,}125 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(115; 3{,}125)$

$P(112 < \overline{X} < 119) =$

$= P\left(\frac{112 - 115}{3{,}125} < z < \frac{119 - 115}{3{,}125}\right) =$

$= P(-0{,}96 < z < 1{,}28) = P(z < 1{,}28) - P(z < -0{,}96) =$

$= P(z < 1{,}28) - 1 + P(z < 0{,}96) = 0{,}7312$

35. Sábese que o cociente intelectual do alumnado dunha universidade distribúese segundo unha lei normal de media 100 e varianza 27.

a) Calcula a probabilidade de que unha mostra de 81 alumnos e alumnas teña un cociente intelectual medio inferior a 109.

b) Calcula a probabilidade de que unha mostra de 36 alumnas e alumnos teña un cociente intelectual medio superior a 109.

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

$n = 81 > 30$

$\mu = 100, \sigma = \dfrac{27}{\sqrt{81}} = 3 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(100, 3)$

$P(\overline{X} < 109) = P\left(z < \dfrac{109 - 100}{3}\right) =$

$= P(z < 3) = 0,9987$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

$n = 36 > 30$

$\mu = 100, \sigma = \dfrac{27}{\sqrt{36}} = 4,5 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(100; 4,5)$

$P(\overline{X} > 109) = P\left(z > \dfrac{109 - 100}{4,5}\right) =$

$= P(z > 2) = 1 - P(z < 2) = 0,0228$

36. Suponse que os ingresos diarios dunha empresa seguen unha distribución normal de 400 € de media e 250 € de desviación típica.

a) Como se distribúe a media da mostra para mostras aleatorias de tamaño **n**?

b) Disponse dunha mostra aleatoria de 25 observacións. Calcula a probabilidade de que o promedio de ingresos estea entre 350 € e 400 €.

Solución:

a) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

$\mu = 400, \sigma = \dfrac{250}{\sqrt{n}} \Rightarrow \overline{X} \equiv N\left(400, \dfrac{250}{\sqrt{n}}\right)$

b) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra.

$n = 25 < 30$ pero a distribución é normal.

$\mu = 400, \sigma = \dfrac{250}{\sqrt{25}} = 50 \Rightarrow \overline{X} \equiv N(400; 50)$

$P(350 < \overline{X} < 400) =$

$P\left(\dfrac{350 - 400}{50} < z < \dfrac{400 - 400}{50}\right) =$

$= P(-1 < z < 0) = P(z < 0) - P(z < -1) =$

$= P(z < 0) - 1 + P(z < 1) = 0,3413$

37. A cantidade media de hemoglobina en sangue do ser humano segue unha distribución normal con desviación típica de 2 g/dl. Calcula o nivel de confianza dunha mostra de 12 extraccións de sangue que indique que a media da poboación de hemoglobina en sangue está entre 13 e 15 g/dl.

Solución:

O intervalo de confianza para a media é:

$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (13, 15)$

A media da mostra é:

$\overline{X} = \dfrac{13 + 15}{2} = 14$

$14 - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{12}} = 13$

$z_{\alpha/2} = 1,73$

$P(-1,73 < z < 1,73) = 2P(z < 1,73) - 1 = 0,9164$

O nivel de confianza é do 91,64%.

38. O peso medio dunha mostra de 64 mozos de 18 anos foi de 70 kg. Sabendo que os pesos dos mozos de 18 anos se distribúen cunha desviación típica de 12 kg, atopa o intervalo de confianza para a media dos pesos da poboación de mozos de 18 anos, cun nivel de confianza do 95%.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

b) O intervalo é:

$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\left(70 - 1,96 \cdot \dfrac{12}{\sqrt{64}}, 70 + 1,96 \cdot \dfrac{12}{\sqrt{64}}\right) = (67,06; 72,94)$

Temos que o peso medio está no intervalo (67,06; 72,94) cunha probabilidade do 95%.

39. Unha mostra aleatoria de 100 estudantes que se presentan a unhas probas de selectividade revela que a media de idade é de 18,1 anos. Atopa un intervalo de confianza do 90% para a idade media de todos os estudantes que se presentan ás probas, sabendo que a desviación típica da poboación é de 0,4.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,65$

b) O intervalo é:

$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\left(18,1 - 1,65 \cdot \dfrac{0,4}{\sqrt{100}}; 18,1 + 1,65 \cdot \dfrac{0,4}{\sqrt{100}}\right) =$

$= (18,03; 18,17)$

Temos que a idade media está no intervalo (18,03; 18,17) cunha probabilidade do 95%.

40. Un fabricante de pilas alcalinas sabe que a desviación típica da duración das pilas que fabrica é de 80 h. Calcula o tamaño da mostra que debe someterse a proba para ter unha confianza do 95% de que, ao tomar a duración media da mostra como valor da duración media da poboación total de pilas, o erro que se cometa sexa menor ca 16 h.

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{80}{16}\right)^2 = 96{,}04$$

Débese tomar unha mostra de 97 pilas.

41. Nunha enquisa realizada a 800 persoas elixidas ao azar do censo electoral, 240 declararon a súa intención de votar ao partido A.

a) Estima cun nivel de confianza do 95,45% entre que valores se atopa a intención de voto a este partido en todo o censo.

b) Discute razoadamente o efecto que tería sobre o intervalo de confianza o aumento ou a diminución do nivel de confianza.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}9545 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2$

Temos: $\hat{p} = 0{,}3$ e $\hat{q} = 0{,}7$

O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}; 0{,}3 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}\right) =$$

$= (0{,}2676; 0{,}3324)$

A proporción estará entre o 26,76% e o 33,24% cunha probabilidade do 95,45%.

b) Se aumenta o nivel de confianza, a amplitude do intervalo faise maior e, polo tanto, o erro máximo admisible aumenta. Gáñase en seguridade da estimación pero pérdese precisión. Por outra banda, se diminúe o nivel de confianza, diminúe a amplitude do intervalo e é menor o erro admisible.

42. En certa poboación próxima a unha estación de esquí quérese estimar cun nivel de confianza do 95% a poboación de habitantes que practican esquí. Tómase unha mostra de 400 habitantes da poboación, dos que 240 afirman que practican este deporte. Determina o correspondente intervalo de confianza.

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Temos: $\hat{p} = 0{,}6$ e $\hat{q} = 0{,}4$

O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}6 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{400}}; 0{,}6 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{400}}\right) =$$

$= (0{,}5520; 0{,}6480)$

A proporción estará entre o 55,2% e o 64,8% cunha probabilidade do 95%.

43. Sábese que o peso en quilogramos do alumnado de bacharelato é unha variable aleatoria **x** que segue unha distribución normal de desviación típica igual a 5 kg.

a) No caso de considerar mostras de 25 estudantes, que distribución ten a variable aleatoria das medias da mostra $\bar{x}$?

b) Se se desexa que a media da mostra non difira en máis dun quilo da media da poboación, con probabilidade 0,95, cantos estudantes se deberían tomar na mostra?

Solución:

a) Se se lle chama á media da poboación μ, entón a media da mostra segue unha distribución:

$$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{25}}\right) = N(\mu, 1)$$

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{5}{1}\right)^2 = 96{,}04$$

Débese tomar unha mostra de 97 individuos.

44. Nunha universidade cóllese ao azar unha mostra de 100 alumnos e alumnas, e atópase que 62 aprobaron todas as materias.

a) Cun nivel de confianza do 95%, atopa un intervalo para estimar a porcentaxe de alumnas e alumnos que aproban todas as materias.

b) Á vista do resultado anterior, preténdese repetir a experiencia para conseguir unha cota de erro de 0,03, co mesmo nivel de confianza do 95%. Cantos individuos deberá ter a mostra?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Temos: $\hat{p} = 0{,}62$ e $\hat{q} = 0{,}38$

O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$= (0{,}62 - 1{,}96 \cdot 0{,}049; 0{,}62 + 1{,}96 \cdot 0{,}049) =$
$= (0{,}5249; 0{,}7151)$

A proporción estará entre o 52,49% e o 71,51% cunha probabilidade do 95%.

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

$$n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}62 \cdot 0{,}38}{0{,}03^2} = 1\,005{,}65$$

Débese tomar unha mostra de 1 006 individuos`.

45. Un laboratorio farmacéutico afirma que o número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar unha determinada enfermidade segue unha distribución normal con desviación típica igual a 8. Tómase unha mostra de 100 enfermos aos que se lles subministra o medicamento, e obsérvase que a media de horas que tardan en curar é igual a 32.

a) Atopa un intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 99%, para a media do número de horas que tarda en curar o medicamento.

b) Se o nivel de significación é 0,05, cal é o tamaño da mostra que habería que considerar para estimar o valor da media cun erro menor de 3 h?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(32 - 2{,}58 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}; 32 + 2{,}58 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}\right) =$$

$= (29{,}94; 34{,}06)$

Temos que a media para o número de horas está no intervalo (29,94; 34,06) cunha probabilidade do 99%.

b) Como $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{8}{3}\right)^2 = 27{,}32$$

Débese tomar unha mostra de 28 pacientes.

Problemas

46. Un estudo realizado sobre 100 usuarios e usuarias revela que un coche percorre anualmente un promedio de 15 200 km, cunha desviación típica de 2 250 km.

a) Determina un intervalo de confianza, ao 99%, para a cantidade promedio de quilómetros percorridos.

b) Cal debe ser o tamaño mínimo da mostra para que o erro cometido non sexa superior a 500 km, con igual confianza?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(15\,200 - 2{,}58 \cdot \frac{2\,250}{\sqrt{100}}, 15\,200 + 2{,}58 \cdot \frac{2\,250}{\sqrt{100}}\right) =$$

$= (14\,619{,}5; 15\,780{,}5)$

Temos que o número medio de quilómetros está no intervalo (14 619,5; 15 780,5) cunha probabilidade do 99%.

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{2\,250}{500}\right)^2 = 134{,}79$$

Débese tomar unha mostra de 135 usuarias e usuarios.

47. Sábese que o consumo semanal de refrescos (en litros) entre a xuventude dunha cidade é unha variable normal con desviación típica igual a 0,6 litros. Pregúntase a 100 mozas e mozos desa cidade sobre o seu consumo semanal de refrescos e obtense unha media da mostra de 1,5 litros.

a) Atopa o intervalo de confianza de nivel 0,95 para a media de consumo semanal de refrescos da poboación de mozos e mozas.

b) Se se acepta un erro de 0,1 litros e se toma un nivel de confianza do 99%, cal é o tamaño da mostra de mozas e mozos que habería que considerar?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(1{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}}; 1{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}}\right) =$$

$= (1{,}38; 1{,}62)$

Temos que o consumo medio de refrescos está no intervalo (1,38; 1,62) cunha probabilidade do 95%.

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}58 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}1}\right)^2 = 239{,}63$$

Débese tomar unha mostra de 240 mozos e mozas.

48. Unha mostra aleatoria extraída dunha poboación normal de varianza igual a 100 presenta unha media da mostra de 160. Sabendo que o tamaño da mostra é 144.

a) Calcula un intervalo de confianza do 95% para a media da poboación.

b) Calcula un intervalo de confianza do 90% para a media da poboación.

c) Se se quere ter unha confianza do 95% de que o erro máximo é 1,2, cantas observacións adicionais deben tomarse?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(160 - 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}; 160 + 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}\right) =$$

$= (158{,}37; 161{,}63)$

b) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(160 - 1{,}65 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}; 160 + 1{,}65 \cdot \frac{10}{\sqrt{144}}\right) =$$

$= (158{,}63; 161{,}37)$

c) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{10}{1{,}2}\right)^2 = 266{,}77$$

Débese tomar unha mostra de 267 unidades; por tanto, deben tomarse 123 unidades adicionais.

49. O peso dos cans adultos dunha certa raza é unha variable aleatoria que se distribúe normalmente con desviación típica de 0,6 kg. Unha mostra aleatoria de 30 animais deu un peso medio de 7,4 kg.

a) Calcula un intervalo de confianza, ao 99%, para o peso medio dos cans adultos desta raza.

b) Que tamaño mínimo ten que ter a mostra para ter unha confianza do 95% de que a media da mostra non se diferencia en máis de 0,3 kg da media da poboación?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(7{,}4 - 2{,}58 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}}; 7{,}4 + 2{,}58 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}}\right) = (7{,}12; 7{,}68)$$

O peso medio da poboación está no intervalo (7,12; 7,68) cunha probabilidade do 99%.

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{0{,}3}\right)^2 = 15{,}37$$

Débese tomar unha mostra de 16 cans.

50. Tomouse unha mostra aleatoria de 100 individuos aos que se lles mediu o nivel de glicosa en sangue, e obtívose unha media da mostra de 110 mg/cc. Sábese que a desviación típica da poboación é de 20 mg/cc.

a) Obtén un intervalo de confianza, ao 90%, para o nivel de glicosa en sangue da poboación.

b) Que erro máximo se comete na estimación anterior?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(110 - 1{,}65 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}; 110 + 1{,}65 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right) =$$

$= (106{,}72; 113{,}28)$

O nivel medio de glicosa en sangue da poboación está no intervalo (106,72; 113,28) cunha probabilidade do 90%.

b) O erro máximo é:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = 1{,}65 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3{,}3 \text{ mg/cc}$$

51. Nun centro escolar hai 2 000 estudantes, distribuídos en 5 cursos da seguinte maneira: 400 en 1°, 380 en 2°, 520 en 3°, 360 en 4° e 340 en 5°. Quérese seleccionar unha mostra de 100 estudantes empregando a técnica de mostraxe aleatoria estratificada con afixación proporcional e considerando cada curso como un estrato. Como se seleccionaría a mostra?

Solución:

2 000 : 100 = 20

Cada 20 estudantes, elíxese un.

Estratos	1°	2°	3°	4°	5°	Total
Poboación	400	380	520	360	340	2 000
Mostra	20	19	26	18	17	100

52. Sabendo que a varianza dunha lei normal é $\sigma^2 = 16$, determina o nivel de confianza co que pode dicirse que a súa media está comprendida entre 6,2 e 8,8 se se toma unha mostra aleatoria de tamaño 36 desta distribución.

Solución:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (6,2; 8,8)$$

A media da mostra é:

$$\overline{X} = \frac{6,2 + 8,8}{2} = 7,5$$

$$7,5 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} = 6,2$$

$$z_{\alpha/2} = 1,95$$

$P(-1,95 < z < 1,95) = 2P(z < 1,95) - 1 = 0,9488$

O nivel de confianza é do 94,88%.

53. Unha fábrica de conservas desexa coñecer o tempo que tarda en estragarse un produto almacenado. Elíxese unha mostra de 400 unidades e resulta que o tempo medio de descomposición destes produtos é de 172 h. Por experiencias anteriores coñécese que a desviación típica da variable normal tempo de descomposición é de 5 h.

Cun nivel de confianza do 95%, entre que valores se atopa o tempo medio de descomposición para a totalidade do produto almacenado?

Solución:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(172 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{400}}, 110 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{400}}\right) =$$

$= (171,51; 172,49)$

O tempo medio de descomposición da poboación está no intervalo (171,51; 172,49) cunha probabilidade do 95%.

54. Para estimar a proporción dos habitantes dunha determinada cidade que posúen ordenador persoal, quérese utilizar unha mostra aleatoria de tamaño **n**. Calcula o valor mínimo de **n** para garantir que, cun nivel de confianza do 95%, o erro da estimación non sexa superior ao 2%. (Como se descoñece a proporción, deberase tomar o caso máis desfavorable, que será 0,5).

Solución:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2}$$

$$n = 1,96^2 \cdot \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,02^2} = 2\,401$$

Débese tomar unha mostra de 2 401 habitantes.

55. Co fin de estimar a idade media dos habitantes dunha gran cidade, tomouse unha mostra aleatoria de 300 habitantes, que deu como resultado unha idade media de 35 anos e unha desviación típica de 7 anos.

a) Atopa o intervalo do 95% de confianza no que se atopa a idade media da poboación.

b) Que nivel de confianza se debería usar para que o intervalo fose 35 ± 0,44?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(35 - 1,96 \cdot \frac{7}{\sqrt{300}}; 35 + 1,96 \cdot \frac{7}{\sqrt{300}}\right) =$$

$= (34,21; 35,79)$

A idade media da poboación está no intervalo (34,21; 35,79) cunha probabilidade do 95%.

b) O erro máximo é:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{300}} = 0,44$$

$$z_{\alpha/2} = 1,09$$

$P(-1,09 < z < 1,09) = 2P(z < 1,09) - 1 = 0,7242$

O nivel de confianza é do 72,42%.

56. Estamos realizando unha mostra sobre o nivel de coñecementos xerais dos estudantes de bacharelato. Para isto, elíxese unha mostra aleatoria de 9 destes estudantes, aos que se lles realizou un exame. As cualificacións obtidas foron as seguintes:

7,8 6,5 5,4 7,1 5,0 8,3 5,6 6,6 6,2

Suponse que a variable aleatoria obxecto de estudo segue unha distribución normal de desviación típica coñecida e igual a 1.

Pídese:

a) Un intervalo de confianza ao 98% para a media das cualificacións nos exames.

b) O tamaño mínimo que debería ter a mostra no caso de admitir un erro máximo de 0,5 puntos, cun nivel de confianza do 95%.

Solución:

a) A media da mostra é 6,5.

$1 - \alpha = 0{,}98 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(6{,}5 - 2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}; 6{,}5 + 2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}\right) = (5{,}72; 7{,}28)$$

A nota media da poboación está no intervalo (5,72; 7,28) cunha probabilidade do 98%.

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{1}{0{,}5}\right)^2 = 15{,}37$$

Débese tomar unha mostra de 16 estudantes.

57. Sábese que os estudantes dunha provincia dormen un número de horas diarias que se distribúen segundo unha lei normal de media μ horas e desviación típica $\sigma = 2$ h.

a) A partir dunha mostra de 64 estudantes, obtívose o seguinte intervalo de confianza para a media da poboación (7,26; 8,14). Determina o nivel de confianza co que se construíu este intervalo.

b) Determina o tamaño da mostra mínimo necesario para que o erro que se cometa ao estimar a media da poboación por un intervalo de confianza sexa, como máximo, de 0,75 h, cun nivel de confianza do 98%.

Solución:

a) $$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7{,}26; 8{,}14)$$

A media da mostra é 6,5.

$$\overline{X} = \frac{7{,}26 + 8{,}14}{2} = 7{,}7$$

$$7{,}7 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 7{,}26$$

$z_{\alpha/2} = 1{,}76$

$P(-1{,}76 < z < 1{,}76) = 2P(z < 1{,}76) - 1 = 0{,}9216$

O nivel de confianza é do 92,16%.

b) $1 - \alpha = 0{,}98 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}33$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(2{,}33 \cdot \frac{2}{0{,}75}\right)^2 = 38{,}60$$

Débese tomar unha mostra de 39 estudantes.

58. Nunha mostra de 600 persoas dunha cidade obsérvase que 30 son inmigrantes.

a) Determina un intervalo de confianza de nivel 0,95 para a porcentaxe de inmigrantes desta cidade.

b) Se se quere estimar a porcentaxe de inmigrantes cun erro máximo de 0,02, cal é o tamaño da mostra que habería que considerar se se usa un nivel de significación do 1%?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Temos: $\hat{p} = 0{,}05$ e $\hat{q} = 0{,}95$

O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}05 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{600}}; 0{,}05 + \right.$$

$$\left. + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{600}}\right) = (0{,}03; 0{,}07)$$

A proporción estará entre o 3% e o 7% cunha probabilidade do 95%.

b) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2}$$

$$n = 2{,}58^2 \cdot \frac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{0{,}02^2} = 790{,}45$$

Débese tomar unha mostra de 791 persoas.

59. Tomouse ao azar unha mostra de 60 estudantes dunha universidade, e atopouse que un terzo deles falaba inglés.

a) Atopa, cun nivel de confianza do 90%, un intervalo de confianza para estimar a proporción de estudantes que falan inglés entre o alumnado desa universidade.

b) Á vista do resultado anterior, preténdese repetir a experiencia para conseguir unha cota de erro do 0,01, co mesmo nivel de confianza do 90%. Cantos individuos deberá ter a mostra?

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

Temos: $\hat{p} = 0{,}33$ e $\hat{q} = 0{,}67$

O intervalo é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}33 - 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot 0{,}67}{60}}; 0{,}33 + \right.$$

$$\left. + 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}33 \cdot 0{,}67}{60}}\right) = (0{,}23; 0{,}43)$$

A proporción estará entre o 23% e o 43% cunha probabilidade do 90%.

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2}$

$$n = 1{,}65^2 \cdot \frac{0{,}33 \cdot 0{,}67}{0{,}01^2} = 6\,019{,}45$$

Débese tomar unha mostra de 6 020 persoas.

Para profundar

60. Sábese que a estatura dos individuos dunha poboación é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal de 6 cm de desviación típica. Tómase unha mostra aleatoria de 225 individuos que dá unha media de 176 cm.

a) Obtén un intervalo de confianza, cun 99% de confianza, para a media da estatura da poboación.

b) Calcula o mínimo tamaño da mostra que se deberá tomar para estimar a estatura media dos individuos da poboación cun erro inferior a 1 cm e un nivel de confianza do 95%.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(176 - 2{,}58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}}; 176 + 2{,}58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}}\right) =$$

$$= (174{,}97; 177{,}03)$$

A estatura media da poboación está no intervalo (174,97; 177,03) cunha probabilidade do 99%.

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(1{,}96 \cdot \frac{6}{1}\right)^2 = 138{,}30$$

Débese tomar unha mostra de 139 individuos.

61. Nunha poboación normal con varianza coñecida, tomouse unha mostra de tamaño 49, calculouse a súa media e obtívose 4,2. Determina a varianza da poboación sabendo que o intervalo de confianza, ao 95%, é (3,64; 4,76) para a media da poboación.

Solución:

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (3{,}64; 4{,}76)$$

$$4{,}2 - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 3{,}64$$

$\sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$

62. Nunha poboación, unha variable aleatoria segue unha distribución normal de media descoñecida e desviación típica 20.

a) Se dunha mostra de tamaño 25 se observou que a media é 2 743, determina o intervalo de confianza, ao 90%, para a media da poboación.

b) Elixida unha mostra, a súa media foi 2 740. Construíuse un intervalo de confianza, ao 95%, que resultou ser (2 736,08; 2 743,92). Calcula cal era o tamaño da mostra.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(2\,743 - 1{,}65 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}; 2\,743 + 1{,}65 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}}\right) =$$

$$= (2\,736{,}44; 2\,749{,}56)$$

A media da poboación está no intervalo (2 736,44; 2 749,56) cunha probabilidade do 90%.

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= (2\,736{,}08; 2\,743{,}92)$$

$$2\,740 - 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} = 2\,736{,}08$$

$\sqrt{n} = 10 \Rightarrow n = 100$

63. Unha mostra aleatoria de 60 persoas ten unha media de 235 mg/dl (miligramos por decilitro) en medidas de colesterol. Supoñendo que a desviación típica da variable que mide as unidades de colesterol é $\upsilon = 28$ mg/dl, pídese:

a) Que se calcule o intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 0,95, para a media da poboación.

b) Que se determine o tamaño da mostra necesario para reducir o intervalo de confianza anterior á metade.

Solución:

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

O intervalo é:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(235 - 1{,}96 \cdot \frac{28}{\sqrt{60}}; 235 + 1{,}96 \cdot \frac{28}{\sqrt{60}}\right) =$$

$= (227{,}92; 242{,}08)$

A media de colesterol da poboación está no intervalo (227,92; 242,08) cunha probabilidade do 95%.

b) O erro máximo admisible no apartado anterior é 7,08 e quérese reducir á metade: 7,08/2 = 3,54

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}54$$

$$1{,}96 \cdot \frac{28}{\sqrt{n}} = 3{,}54$$

$\sqrt{n} = 15{,}50$

$n = 240{,}33$

Hai que tomar unha mostra de 241 individuos.

64. Dúas variables aleatorias independentes x_1 e x_2 seguen unha distribución normal con media μ e desviación típica σ.

a) Que distribución ten a variable aleatoria $x_1 + x$?

b) Se $\mu = 15$ e $\sigma = \sqrt{8}$, calcula: $P(x_1 + x_2 > 28)$

Solución:

a) A suma: $x_1 + x_2 \equiv N(2\nu, \sigma\sqrt{2})$

b) $\mu = 15$ e $\sigma = \sqrt{8} \Rightarrow x_1 + x_2 \equiv N(30, 4)$

$$P(x_1 + x_2 > 28) = P\left(z > \frac{28 - 30}{4}\right) = P(z > -0{,}5) =$$

$= P(z < 0{,}5) = 0{,}6915$

65. Sexa un conxunto de catro bólas marcadas cos números 1, 3, 5 e 7.

a) Escribe todas as mostras de tamaño 2 que poderían formarse con esas bólas se a mostraxe se fai sen reposición. Calcula as medias dos números de cada mostra e atopa a media de todas as medias.

b) Fai o mesmo, pero supoñendo que a mostraxe se fai con reemprazamento.

c) Calcula a media dos valores das catro bólas. Con que coincide?

Solución:

a) As mostras sen reemprazamento son:

	1	3	5	7
1		1,3	1,5	1,7
3	3,1		3,5	3,7
5	5,1	5,3		5,7
7	7,1	7,3	7,5	

As súas medias respectivas son:

	1	3	5	7
1		2	3	4
3	2		4	5
5	3	4		6
7	4	5	6	

A media de todas as medias é:

$$\frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{12} = 4$$

b) As mostras con reemprazamento son:

	1	3	5	7
1	1,1	1,3	1,5	1,7
3	3,1	3,3	3,5	3,7
5	5,1	5,3	5,5	5,7
7	7,1	7,3	7,5	7,7

As medias respectivas son:

	1	3	5	7
1	1	2	3	4
3	2	3	4	5
5	3	4	5	6
7	4	5	6	7

A media de todas as medias é:

$$\frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 7}{16} = 4$$

c) A media das bólas é:

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7}{4} = 4$$

As medias coinciden de acordo co teorema central do límite.

66. As estaturas das socias e socios dun club teñen de media μ = 175 cm e desviación típica σ = 10 cm. Se se elixe unha mostra de 64 deles, cal é a probabilidade de que a media da mostra sexa menor ou igual ca 173 cm?

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

67. Nunha mostra de 100 persoas obtívose que o peso medio é de 69 kg. Sabendo que a desviación típica da poboación é 8 kg, atopa o intervalo de confianza cun nivel de significación de 0,05 para a media da poboación.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

68. Queremos estimar as vendas diarias que se fan nunha tenda cun nivel de confianza do 90% e que o erro máximo da estimación sexa de 200 €. Calcula o número mínimo de días que debemos contabilizar as vendas, sabendo que a desviación típica é de 500 €.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

69. O 3% das pezas fabricadas por unha máquina son defectuosas. Cal é a probabilidade de que en 50 pezas o 2% ou menos sexan defectuosas?

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

70. Tomouse unha mostra de 40 oliveiras e contabilizáronse 18 delas con repilo (enfermidade producida por un fungo). Atopa o intervalo de confianza para a proporción de oliveiras con repilo na poboación cun nivel de confianza do 99%.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

71. Sábese por unha enquisa piloto que a proporción de usuarias e usuarios que valora o uso dun modelo de ordenador é 0,45. Calcula o tamaño da mostra que debe tomarse para estimar cun nivel de confianza do 95% e erro máximo da estimación de 0,5%, a proporción de usuarios e usuarios que valoran o modelo de ordenador.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

72. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

73. Unha empresa de transporte sabe que o peso medio dos paquetes que transporta é de 20 kg cunha desviación típica de 5 kg. Se nun dos seus transportes leva 50 paquetes, cal é a probabilidade de que o seu peso medio sexa maior ca 22 kg?

Solución:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das medias da mostra					
2	Media da poboación				μ	20
3	Desviación típica da poboación				σ	5
4	Tamaño da mostra				n	50
5	Desviación típica da media da mostra				$\sigma/\sqrt{n}$	0,71
6	k	μ	σ	Acumulado	$P(z \le k)$	$P(z \ge k)$
7	22	20	0,71	1	0,9977	0,0023
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	$P(k_1 \le z \le k_2)$
10			20	0,71	1	0,0000

74. Nunhas eleccións un dos candidatos obtivo o 46% dos votos. Calcula a probabilidade de que nunha mostra de 200 votantes, elixida ao azar, saíse unha porcentaxe igual ou superior ao 50% ao seu favor.

Solución:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das proporcións da mostra					
2	Proporción				p	0,46
3	Proporción				q	0,54
4	Tamaño da mostra				n	200
5	Desviación típica da proporción da mostra				σ	0,035
6	k	μ	σ	Acumulado	$P(p \leq k)$	$P(p \geq k)$
7	0,5	0,46	0,035	1	0,8718	0,1282
8						
9	p_1	p_2	μ	σ	Acumulado	$P(p_1 \leq z \leq p_2)$
10			0,46	0,035	1	0

75. O tempo que permanece cada paciente na consulta de certo médico é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal cunha desviación típica de 4 minutos. Tomouse unha mostra de 256 pacientes deste médico e atopouse que o seu tempo medio de consulta foi de 10 minutos. Calcula o intervalo de confianza, a un nivel do 95%, para o tempo medio de consulta que se deduce da mostra.

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para a media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	10	0,05	4	256	0,49	9,51	10,49

76. Nunha mostra aleatoria de 400 persoas que viron un programa de televisión, 100 persoas recoñeceron que lles gustou. Determina o intervalo de confianza, ao 95%, para a proporción de persoas na poboación que lles gusta o programa.

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para a proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico						
3	$1-\alpha$	$P(k \leq z \leq k) = 1-\alpha$	k						
4	0,95	0,975	1,96						
5									
6	Intervalo de confianza para a proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_\alpha/2$	$z_\alpha/2 \cdot \sigma$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	400	100	0,25	0,75	0,02	1,96	0,04	0,21	0,29

77. Un laboratorio farmacéutico afirma que o número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar unha determinada enfermidade segue unha distribución normal con desviación típica igual a 8. Tómase unha mostra de 100 enfermos aos que se lles subministra o medicamento e obsérvase que a media de horas que tardan en curar é igual a 32.

a) Atopa un intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 99%, para a media do número de horas que tarda en curar o medicamento.

b) Se o nivel de significación é 0,05, cal é o tamaño da mostra que habería que considerar para estimar o valor da media cun erro menor de 3 horas?

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para a media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	32	0,01	8	100	2,06	29,94	34,06
4							
5							
6	Valor crítico para a media						
7	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico				
8	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k				
9	0,95	0,975	1,96				
10							
11	Tamaño da mostra para a media						
12	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Erro	Tamaño da mostra			
13	1,96	8	3,00	27,32			

78. Un estudo realizado sobre 100 usuarias e usuarios revela que un automóbil percorre anualmente un promedio de 15 200 km cunha desviación típica de 2 250 km.

a) Determina un intervalo de confianza, ao 99%, para a cantidade promedio de quilómetros percorridos.

b) Cal debe ser o tamaño mínimo da mostra para que o erro cometido non sexa superior a 500 km, con igual confianza?

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para a media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	15200	0,01	2250	100	579,56	14620,44	15779,56
4							
5							
6	Valor crítico para a media						
7	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico				
8	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k				
9	0,99	0,995	2,58				
10							
11	Tamaño da mostra para a media						
12	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Erro	Tamaño da mostra			
13	2,58	2250	500,00	134,36			

79. Sábese que o peso dos bebés acabados de nacer nunha determinada poboación segue unha distribución normal de media 3 600 g e desviación típica 280 g. Tómase unha mostra ao azar de 196 destes bebés e calcúlase a media. Calcula cal é a probabilidade de que esta media estea entre 3 580 e 3 620 g.

Solución:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das medias da mostra					
2	Media da poboación				μ	3600
3	Desviación típica da poboación				σ	280
4	Tamaño da mostra				n	196
5	Desviación típica da media da mostra				$\sigma/\sqrt{n}$	20,00
6	k	μ	σ	Acumulado	$P(z \leq k)$	$P(z \geq k)$
7	173	3600	20,00	1	0,0000	1,0000
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	$P(k_1 \leq z \leq k_2)$
10	3580	3620	3600	20,00	1	0,6827

80. Un fabricante de lámpadas sabe que a desviación típica da duración das lámpadas é de 100. Calcula o tamaño da mostra que se deberá someter a proba para ter unha confianza do 95% de que o erro da duración media que se calcule sexa menor que 10 h.

Solución:

	A	B	C	D
1	Valor crítico para a media			
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico	
3	$1-\alpha$	$P(k \leq z \leq k) = 1-\alpha$	k	
4	0,95	0,975	1,96	
5				
6	Tamaño da mostra para a media			
7	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Erro	Tamaño da mostra
8	1,96	100	10,00	384,15

81. En certa poboación próxima a unha estación de esquí quérese estimar cun nivel de confianza do 95% a poboación de habitantes que practican este deporte. Tómase unha mostra de 400 habitantes da poboación, da que 240 afirman que practican esquí. Determina o correspondente intervalo de confianza.

Solución:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para a proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico						
3	$1-\alpha$	$P(k \leq z \leq k) = 1-\alpha$	k						
4	0,95	0,975	1,96						
5									
6	Intervalo de confianza para a proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_\alpha/2$	$z_\alpha/2 \cdot \sigma$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	400	240	0,60	0,40	0,02	1,96	0,05	0,55	0,65

82. Estímase que o tempo de reacción dun condutor ante un obstáculo imprevisto ten unha distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Se se quere conseguir que o erro de estimación da media non supere os 0,01 segundos cun nivel de confianza do 99%, que tamaño mínimo deberá ter a mostra de tempo de reacción?

Solución:

	A	B	C	D
1	Valor crítico para a media			
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico	
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k	
4	0,99	0,995	2,58	
5				
6	Tamaño da mostra para a media			
7	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Erro	Tamaño da mostra
8	2,58	0,05	0,01	165,87

83. Cun nivel de confianza igual a 0,95, a partir dun estudo da mostra, o intervalo de confianza da proporción de habitantes dunha comunidade que teñen ordenador portátil é:

[0,1804; 0,2196]

a) Cal é a proporción da mostra de habitantes desa comunidade que teñen ordenador portátil? Cal é o tamaño da mostra?

b) Cal debería ser o tamaño da mostra para estimar a citada proporción, cunha confianza do 95%, cun erro máximo de 0,01?

Solución:

	A	B	C	D	E
1	Valor crítico para a proporción				
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico		
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k		
4	0,95	0,975	1,96		
5					
6	Límite inf. intervalo	Límite sup. intervalo	p	q	n
7	0,1804	0,2196	0,20	0,80	1599,94
8					
9					
10	Tamaño da mostra para a proporción				
11	$k = z_{\alpha/2}$	p	q	Erro	Tamaño da mostra
12	1,96	0,20	0,80	0,010	6146,33