10 Integral indefinida e definida

1. Regras de integración

Pensa e calcula

Calcula: a) $y = x^5,\ y' =$ b) $y' = 3x^2,\ y =$ c) $y = e^{5x},\ y' =$ d) $y' = e^{3x},\ y =$

Solución:

a) $y' = 5x^4$ b) $y = x^3$ c) $y' = 5e^{5x}$ d) $y = \dfrac{1}{3}e^{3x}$

Aplica a teoría

1. $\int 3(3x-5)^7\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función polinómica.
$\dfrac{(3x-5)^8}{8} + k$

2. $\int \dfrac{dx}{(3x+5)^3}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función racional.
$-\dfrac{1}{6(3x+5)^2} + k$

3. $\int \dfrac{9}{x+3}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.
$9\,L|x+3| + k$

4. $\int e^x\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.
$e^x + k$

5. $\int \dfrac{dx}{x+3}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.
$L|x+3| + k$

6. $\int (x^2 - 4x)\,dx$

Solución:
$\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + k$

7. $\int 2^{6x}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.
$\dfrac{2^{6x-1}}{3\,L\,2} + k$

8. $\int \dfrac{x\,dx}{x^2-1}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.
$\dfrac{1}{2}\,L|x^2-1| + k$

9. $\int 4\sqrt{x}\,dx$

Solución:
$\dfrac{8x\sqrt{x}}{3} + k$

10. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{2\sqrt{7x+5}}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función irracional.
$\sqrt{7x+5} + k$

11. $\displaystyle\int 6x^3\,dx$

Solución:
$\dfrac{3x^4}{2} + k$

12. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) dx$

Solución:
$\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + k$

13. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

Solución:
$\dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + k$

14. $\displaystyle\int 2x(x^2+1)\,dx$

Solución:
$\dfrac{x^4}{2} + x^2 + k$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$

Solución:
$-\dfrac{1}{(x+3)} + k$

16. $\displaystyle\int (x^3 - 6x^2 + 1)\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función polinómica.
$\dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$

17. $\displaystyle\int x(x^2+5)\,dx$

Solución:
$\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5x^2}{2} + k$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función irracional.
$2\sqrt{x-1} + k$

19. $\displaystyle\int e^{x/2}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.
$2\,e^{x/2} + k$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} + k$

Solución:
$\dfrac{-1}{3(x^3+1)}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-3)^4}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función racional.
$-\dfrac{1}{(x-3)^3} + k$

22. $\displaystyle\int (4x+1)^5\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función polinómica.
$\dfrac{(4x+1)^6}{24} + k$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$

Solución:
$L\,x + k$

24. $\displaystyle\int 3 \cdot 2^{3x}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.
$\dfrac{2^{3x}}{L\,2} + k$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función racional.
$-\dfrac{1}{6(2x-1)^3} + k$

26. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x - 5}\,dx$

Solución:
L $|e^x - 5| + k$

27. $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.
L $|x^2 - 3x + 5| + k$

28. $\displaystyle\int 2\sqrt[5]{2x}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función irracional.
$\dfrac{5x\sqrt[5]{2x}}{3} + k$

29. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - (2x)^2}}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función trigonométrica.
arc sen $2x + k$

30. $\displaystyle\int e^{-7x}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.
$-\dfrac{e^{-7x}}{7} + k$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.
$-$L $|1 - x| + k$

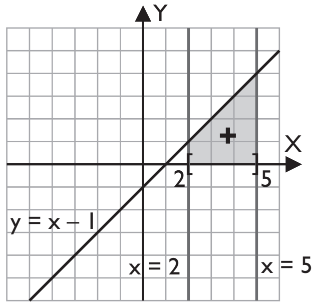
32. $\displaystyle\int (x^4 - 2x - 5)\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función polinómica.
$\dfrac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$

2. Integral definida

Pensa e calcula

Atopa, contando, a área da 2ª figura da marxe, a que ten un signo + dentro. Cada cadradiño é unha unidade cadrada.

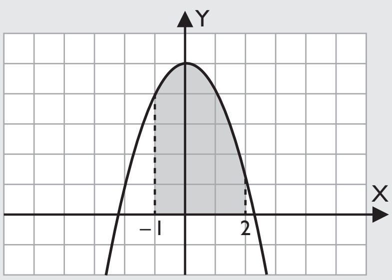


Solución:
Ten exactamente 7,5 u^2.

Aplica a teoría

33. Calcula: $\displaystyle\int_{-1}^{2} (5 - x^2)\,dx$

Solución:



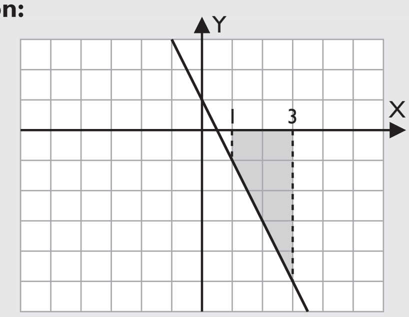
a) $F(x) = 5x - \dfrac{x^3}{3}$

b) $F(-1) = -\dfrac{14}{3}$, $F(2) = \dfrac{22}{3}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (5 - x^2)\,dx = 12$ u^2

34. Calcula: $\displaystyle\int_{1}^{3} (-2x + 1)\,dx$

Solución:



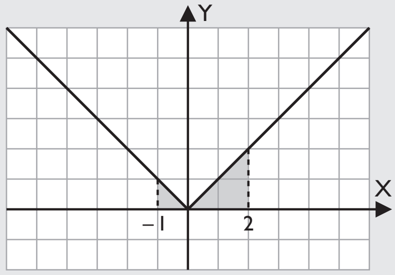
a) $F(x) = x - x^2$

b) $F(1) = 0, F(3) = -6$

c) $\int_1^3 (5 - x^2)\,dx = -6\ u^2$

35. Sendo $|x|$ o valor absoluto ou módulo de x, calcula a integral definida: $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

Solución:



a) $\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx$

Sexa: $F(x) = \int (-x)\,dx$

$F(x) = -\dfrac{x^2}{2}$

$F(-1) = -\dfrac{1}{2}, F(0) = 0$

$\int_{-1}^{0} (-x)\,dx = \dfrac{1}{2}\ u^2$

$G(x) = \int x\,dx$

$G(x) = \dfrac{x^2}{2}$

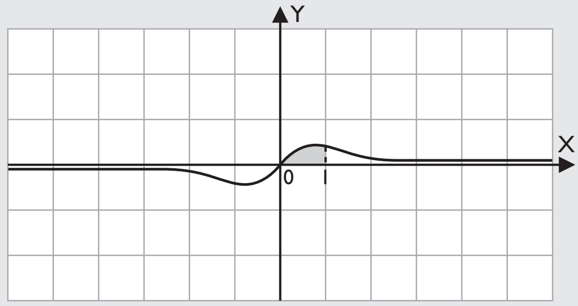
$G(0) = 0, G(2) = 2$

$\int_0^2 x\,dx = 2\ u^2$

$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx = \dfrac{5}{2} = 2{,}5\ u^2$

36. Calcula o valor de: $\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{e^{x^2}}$

Solución:



a) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,e^{-x^2}$

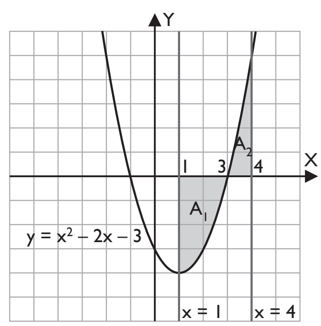
b) $F(0) = -\dfrac{1}{2}, F(1) = -\dfrac{1}{2}\,e^{-1}$

c) $\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{e^{x^2}} = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-1}) = 0{,}32\ u^2$

3. Cálculo de áreas

Pensa e calcula

Atopa por aproximación a área das dúas rexións, a amarela e a verde, do debuxo da marxe. Cada cadradiño é unha unidade cadrada.



Solución:

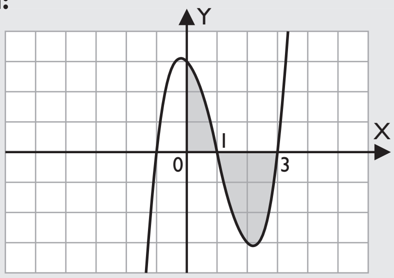
A amarela, 5 u^2 aproximadamente, e a verde 2 u^2 aproximadamente.

En total, unhas 7 unidades cadradas.

Aplica a teoría

37. Atopa a área da rexión plana limitada pola gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, o eixe de abscisas e as rectas $x = 0, x = 3$.

Solución:



Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$

$$\int (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$$

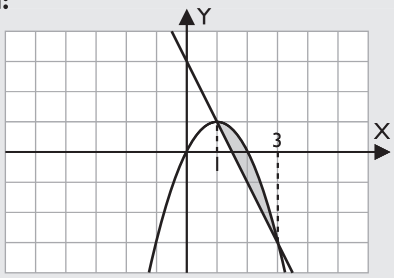
$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx = \frac{7}{4}\ u^2$$

$$\int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx = -4\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{23}{4} = 5{,}75\ u^2$$

38. Atopa a área do recinto limitado pola recta $y = 3 - 2x$ e a parábola $y = 2x - x^2$.

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 3$

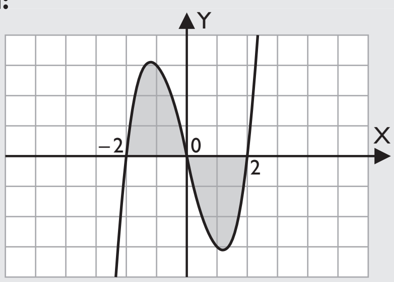
$$\int (-x^2 + 4x - 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = \frac{4}{3}\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2$$

39. Atopa a área da rexión plana limitada pola gráfica de $y = x^3 - 4x$ e o eixe X.

Solución:



Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

$$\int (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)\,dx = 4\ u^2$$

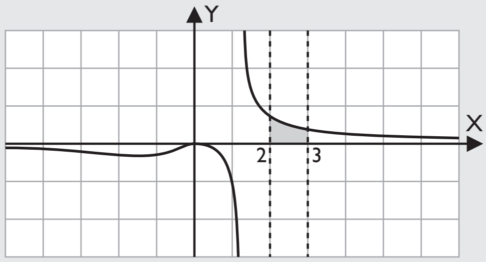
$$\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = -4\ u^2$$

$$\text{Área} = 8\ u^2$$

40. Calcula a área da rexión limitada pola curva:

$y = \dfrac{x^2}{x^3 - 2}$ e as rectas: $y = 0, x = 2, x = 3$

Solución:



Raíces: $x = 0$

$$\int \frac{x^2}{x^3 - 2}\,dx = \frac{1}{3}\,L\,|x^3 - 2|$$

$$\int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 2}\,dx = \frac{1}{3}(L\,25 - L\,6)\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{3}(L\,25 - L\,6) = 0{,}48\ u^2$$

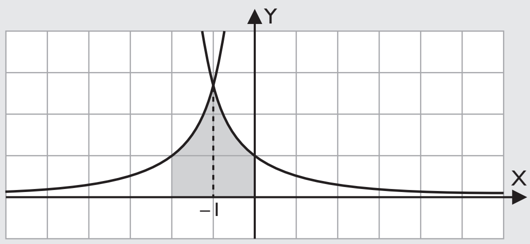
41. Resolve as seguintes cuestións:

a) Debuxa o recinto limitado polas curvas:

$$y = e^{x+2}, y = e^{-x}, y = 0, x = -2, x = 0$$

b) Atopa a área do recinto considerado no apartado anterior.

Solución:



Raíces: $x = -1$

$$\int_{-2}^{-1} e^{x+2}\,dx = e - 1\ u^2$$

$$\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = e - 1\ u^2$$

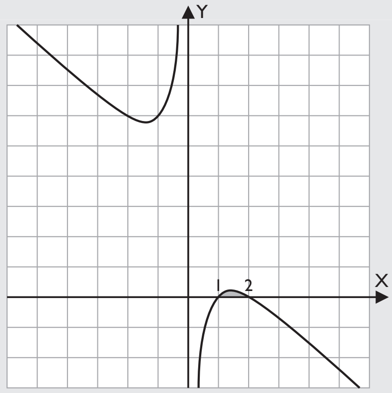
$$\text{Área} = 2e - 2 = 3{,}44\ u^2$$

42. Dada a función, definida nos números reais excepto en x = 0:

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

Calcula a área da rexión plana limitada pola gráfica de f(x) e o semieixe positivo X.

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 2$

$$\int \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = 3x - \frac{x^2}{2} - 2L|x|$$

$$\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - 2\ L\ 2\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{3}{2} - 2\ L\ 2 = 0{,}11\ u^2$$

4. Aplicacións da integral definida

Pensa e calcula

Un depósito recolle auga dunha billa a unha velocidade que segue a función f(x) = 2x, onde f(x) se expresa en litros por minuto, e **x**, en minutos.

Calcula a integral $\int_0^5 2x\, dx$ e interpreta o resultado.

Solución:

$$\int_0^5 2x\, dx = 25$$

Recóllense 25 litros de auga nos 5 primeiros minutos.

Aplica a teoría

43. Estímase que o ritmo de crecemento dun feto durante o embarazo vén dado pola función:

$$f(x) = -\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}$$

onde **x** se mide en semanas e f(x) en centímetros por semana. Calcula canto creceu o feto nas 30 primeiras semanas.

Solución:

a) O crecemento será:

$$\int_0^{30} \left(-\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}\right) dx$$

b) $F(x) = \int \left(-\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}\right) dx = -\frac{x^3}{600} + \frac{x^2}{10}$

c) F(30) = 45; F(0) = 0

d) |F(30) – F(0)| = |45 – 0| = 45

Creceu 45 cm.

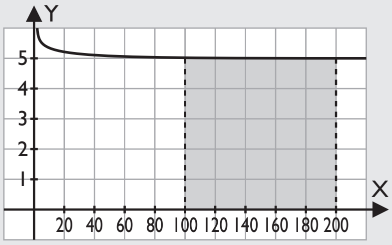
44. Unha fábrica produce obxectos de decoración. A función de ingreso marxinal vén dado por:

$$i(x) = 5 + \frac{3}{x+2}$$

onde **x** é o número de obxectos vendidos e i(x) vén dado en euros.

Cal é o incremento dos ingresos obtidos cando se pasa de vender 100 a vender 200 obxectos?

Solución:



$$\int_{100}^{200}\left(5 + \frac{3}{x+2}\right) dx = 500 + 3(L\ 101 - L\ 51) = 502{,}05\ €$$

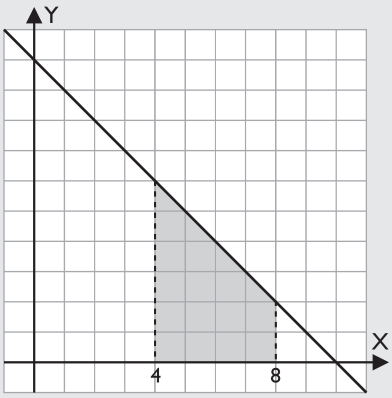
45. A función que mide o caudal que sae dun depósito é a seguinte:

$$f(x) = 10 - x$$

onde f(x) está dado en litros por segundo, e **x**, en segundos.

Que cantidade de auga sae do depósito entre o segundo 4 e o segundo 8?

Solución:



$$\text{Volume} = \int_4^8 (10 - x)\, dx = 16 \text{ litros.}$$

46. Nun concello estímase que o ritmo de xeración de lixo vén dado pola función:

$$f(x) = 10\,000 \cdot e^{0,5x}$$

onde **x** se mide en anos e f(x) en toneladas por ano. Se se considera x = 0 o primeiro ano no que se inicia o estudo, canto lixo se xerará no concello durante os 5 primeiros anos?

Solución:

a) O crecemento será:

$$\int_0^5 10\,000\ e^{0,5x}\ dx$$

b) $F(x) = \int 10\,000\ e^{0,5x}\ dx = 20\,000\ e^{0,5x}$

c) $F(5) = 243\,650$; $F(0) = 20\,000$

d) $|F(5) - F(0)| = |243\,650 - 20\,000| = 223\,650$

Xeráronse 223 650 Tm.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Calcula a seguinte integral indefinida:

$$\int\left(x+\frac{5}{x}\right)^2 dx$$

- ☐ $\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{4}+k$
- ☐ $\frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{x}\right)^3+k$
- ☒ $\frac{x^3}{3}+10x-\frac{25}{x}+k$
- ☐ $\frac{x^4}{4}+L\,|x|+k$

2 Sexa a función $f(x) = 3x^2 - 6x$. Se $f'(x)$ representa a súa derivada, atopa unha primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que verifique $F(2) = f'(3)$.

- ☐ $x^3 - 3x^2 + 5$
- ☒ $x^3 - 3x^2 + 16$
- ☐ $x^3 - 3x^2 + 13$
- ☐ $x^3 - 3x^2$

3 Calcula a área da rexión plana acoutada limitada polas gráficas das funcións reais de variable real:

$$f(x) = x^2 - x;\ g(x) = 1 - x^2$$

- ☐ 4/3 u^2
- ☐ 8/9 u^2
- ☐ 8/3 u^2
- ☒ 9/8 u^2

4 Dada a función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{se } x\le 0\\ (x-1)^2 & \text{se } x>0\end{cases}$$

Calcula a área do recinto limitado polos eixes de coordenadas e a gráfica da función.

- ☐ 2/3 u^2
- ☐ 1/3 u^2
- ☒ 1 u^2
- ☐ Non se pode calcular a área porque a función é descontinua en $x = 0$.

5 Dada a función:

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{se } x\le -3\\ x^2 & \text{se } -3<x<1\\ 1 & \text{se } x\ge 1\end{cases}$$

Calcula a área limitada pola gráfica da función $y = f(x)$, as rectas $x = -3$, $x = 2$ e o eixe de abscisas.

- ☒ 31/3 u^2
- ☐ 11/3 u^2
- ☐ 35/3 u^2
- ☐ Non se pode calcular a área porque a función é descontinua en $x = -3$.

6 Calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2$ e a recta $y = -x + 2$.

- ☐ 9 u^2
- ☐ 3 u^2
- ☐ 21/2 u^2
- ☒ 9/2 u^2

7 Dada a función $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$, calcula a área encerrada pola gráfica da función $f(x)$ e polo eixe OX.

- ☐ 32/3 u^2
- ☒ 71/6 u^2
- ☐ 45/4 u^2
- ☐ 7/12 u^2

8 Unha alfombra de flores leva 21 rosas por cada 4 dm^2 de superficie. Quérese encher de rosas unha parte da alfombra cuxa gráfica está limitada polas funcións:

$$y = -x^2 + 4x + 3\ ;\ y = 3$$

Se se mide en metros e cada rosa custa 0,3 €, canto custa encher esa parte da alfombra?

- ☒ 1 680 €
- ☐ 3 570 €
- ☐ 840 €
- ☐ 1 890 €

9 Sexa a función $f(x) = 3x^2 - 6x$. Calcula a área limitada pola curva e o eixe X entre $x = 1$ e $x = 3$.

- ☐ 8 u^2
- ☐ 4 u^2
- ☐ 6 u^2
- ☒ 2 u^2

10 Atopa a área limitada pola recta $y = -4x + 4$ e a parte positiva dos eixes de coordenadas.

- ☒ 2 u^2
- ☐ 4 u^2
- ☐ 1/2 u^2
- ☐ 8 u^2

1. Regras de integración

47. $\int 4(4x - 1)^5\, dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función polinómica.
$$\frac{(4x - 1)^6}{6} + k$$

48. $\int \frac{dx}{(x - 1)^5}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función racional.
$$-\frac{1}{4(x - 1)^4} + k$$

49. $\int (2x + 7)^2\, dx$

Solución:
$\frac{(2x + 7)^3}{6} + k$

50. $\int e^{-x}\, dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.
$$-e^{-x} + k$$

51. $\int \frac{dx}{x - 1}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.
$$L\,|x - 1| + k$$

52. $\int \frac{5}{x^3}\, dx$

Solución:
$-\frac{5}{2x^2} + k$

53. $\int 2^{-4x}\, dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.
$$-\frac{2^{-4x}}{4\,L\,2} + k$$

54. $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 9}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.
$$\frac{1}{2}\,L\,|x^2 + 9| + k$$

55. $\int \frac{3}{(x - 9)^2}\, dx$

Solución:
$\frac{-3}{x - 9} + k$

56. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función irracional.
$$2\sqrt{3x} + k$$

57. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$

Solución:
$2\sqrt{x^2 - 1} + k$

58. $\int \frac{3x}{x^2 - 5}\, dx$

Solución:
$\frac{3\,L\,|x^2 - 5|}{2} + k$

59. $\int e^{4x - 7}\, dx$

Solución:
$\frac{e^{4x - 7}}{4} + k$

60. $\int (5 - 2x)^4\, dx$

Solución:
$-\frac{(5 - 2x)^5}{10} + k$

61. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{x}{x^2 + 3}\right) dx$

Solución:
$-\frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{L\,|x^2 + 3|}{2} + k$

62. $\int (10x^4 + 2x^3 - x - 1)\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función polinómica.

$$2x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - x + k$$

63. $\int x(x+1)^2\,dx$

Solución:
$\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + k$

64. $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función irracional.

$$\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} + k$$

65. $\int e^{x/3}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.

$$3e^{x/3} + k$$

66. $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x}\,dx$

Solución:
$\frac{1}{2}x^2 - 3x + L\,|x| + k$

67. $\int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x+2} + \frac{8}{x^5}\right) dx$

Solución:
Aplícase a integral das operacións.

$$x^3 + x - L\,|x+2| - \frac{2}{x^4} + k$$

68. $\int (2x-1)^3\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función polinómica.

$$\frac{(2x-1)^4}{8} + k$$

69. $\int 3xe^{x^2}\,dx$

Solución:
$\frac{3e^{x^2}}{2} + k$

70. $\int 5 \cdot 7^{-5x}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función exponencial.

$$-\frac{7^{-5x}}{L\,7} + k$$

71. $\int \frac{dx}{(x+7)^2}$

Solución:
Aplícase a integral dunha función racional.

$$-\frac{1}{x+7} + k$$

72. $\int (2x + e^{5x})\,dx$

Solución:
$x^2 + \frac{e^{5x}}{5} + k$

73. $\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 1}\,dx$

Solución:
Aplícase a integral dunha función logarítmica.

$$L\,|x^3 + 5x - 1| + k$$

74. $\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

Solución:
$\frac{x^2}{2} + L\,|x| + k$

75. $\int (x+1)^3\,dx$

Solución:
$\frac{(x+1)^4}{4} + k$

76. $\int \sqrt[3]{5x + 1}\, dx$

Solución:

Aplícase a integral dunha función irracional.

$$\frac{3(5x + 1)\sqrt[3]{5x + 1}}{20} + k$$

77. $\int 2^{3x}\, dx$

Solución:

$\frac{2^{3x}}{3\, L\, 2} + k$

78. $\int 2x\sqrt[3]{x^2 - 1}\, dx$

Solución:

$\frac{3(x^2 - 1)\sqrt[3]{x^2 - 1}}{4} + k$

79. $\int e^{5x}\, dx$

Solución:

Aplícase a integral dunha función exponencial.

$$\frac{e^{5x}}{5} + k$$

80. $\int \frac{5\, dx}{5x + 4}$

Solución:

Aplícase a integral dunha función logarítmica.

$$L\,|5x + 4| + k$$

81. $\int (6x^2 - x + 2)\, dx$

Solución:

$2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + k$

82. $\int x3^{x^2}\, dx$

Solución:

$\frac{3^{x^2}}{2\, L\, 3} + k$

83. $\int xe^{-x^2}\, dx$

Solución:

$-\frac{e^{-x^2}}{2} + k$

84. $\int \frac{2}{x + 1}\, dx$

Solución:

$2\, L\,|x + 1| + k$

85. $\int \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 8x + 1\right) dx$

Solución:

Aplícase a integral dunha función polinómica.

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 4x^2 + x + k$$

86. $\int (x + \sqrt{x})\, dx$

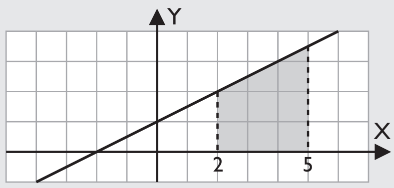
Solución:

$\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + k$

2. Integral definida

87. Calcula: $\int_2^5 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$

Solución:



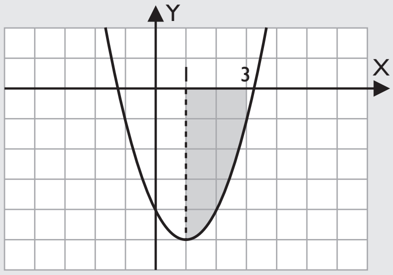
a) $F(x) = \frac{x^2}{4} + x$

b) $F(2) = 3, F(5) = \frac{45}{4}$

c) $\int_2^5 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \frac{33}{4} = 8{,}25\ u^2$

88. Calcula: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 4)\, dx$

Solución:



a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 4x$

b) $F(1) = -\frac{14}{3}, F(3) = -12$

c) $\int_1^3 (x^2 - 2x - 4)\, dx = -\frac{22}{3} = -7{,}33\ u^2$

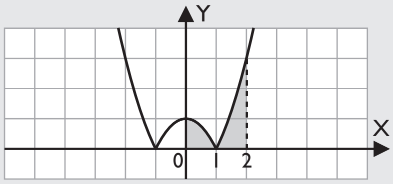
A área é negativa porque o recinto está debaixo do eixe X.

89. Sexa f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$:

a) Esboza a gráfica de f.

b) Calcula: $\int_0^2 f(x)\, dx$

Solución:



$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx$

Sexa: $F(x) = \int (-x^2 + 1)\, dx$

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + x$

$F(0) = 0, F(1) = \frac{2}{3}$

$\int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx = \frac{2}{3}\ u^2$

$G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx$

$G(x) = \frac{x^3}{3} - x$

$G(1) = -\frac{2}{3}, G(2) = \frac{2}{3}$

$\int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \frac{4}{3} u^2$

$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = 2\ u^2$

90. Calcula: $\int_0^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

Solución:

a) $F(x) = x + L|x|$

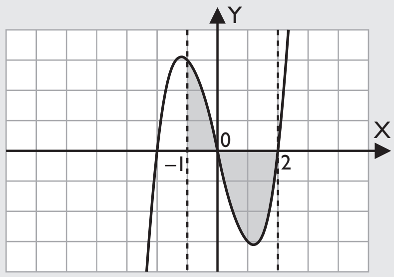
b) $F(e) = e + 1; F(1) = 1$

c) $\int_0^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = F(e) - F(1) = e$

3. Cálculo de áreas

91. Atopa a área da rexión plana limitada pola gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, o eixe de abscisas, a recta $x = -1$ e a recta $x = 2$.

Solución:



Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

$\int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

$\int_{-1}^0 (x^3 - 4x)\, dx = \frac{7}{4}\ u^2$

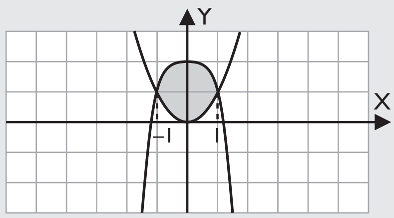
$\int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx = -4\ u^2$

Área $= \frac{23}{4} = 5{,}75\ u^2$

92. Atopa a área do recinto limitado polas gráficas destas funcións:

$y = 2 - x^4 \qquad y = x^2$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 1$

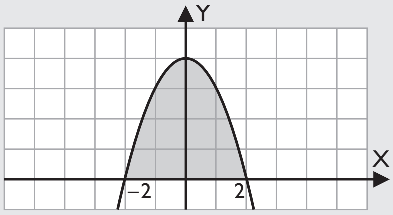
$\int (-x^4 - x^2 + 2)\, dx = -\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x$

$$\int_{-1}^{1} (-x^4 - x^2 + 2)\,dx = \frac{44}{15}\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{44}{15} = 2{,}93\ u^2$$

93. Dada a función $f(x) = 4 - x^2$, calcula a área encerrada entre a gráfica f(x) e o eixe de abscisas.

Solución:



Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 2$

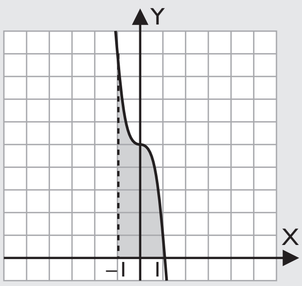
$$\int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \frac{32}{3}\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{32}{3} = 10{,}67\ u^2$$

94. Calcula a área da rexión limitada pola gráfica da función $f(x) = -4x^3 + 5$, o eixe de abscisas, a recta $x = -1$ e a recta $x = 1$.

Solución:



Raíces: $x = \frac{\sqrt[3]{10}}{2} = 1{,}08$

$$\int (-4x^3 + 5)\,dx = -x^4 + 5x$$

$$\int_{-1}^{1} (-4x^3 + 5)\,dx = 10\ u^2$$

$$\text{Área} = 10\ u^2$$

4. Aplicacións da integral definida

95. O caudal dunha billa vén dado pola función:

$$f(x) = 1 + 2x$$

onde **x** se mide en minutos e f(x) en litros por minuto.

a) Escribe a función que expresa a cantidade de auga que bota a billa ao cabo de x minutos.

b) Canta auga bota a billa durante a quinta hora?

Solución:

A función será:

a) $F(x) = \int (1 + 2x)\,dx = x + x^2$

$$\int_{4}^{5} (1 + 2x)\,dx$$

b) $F(5) = 30$; $F(4) = 20$

c) $|F(5) - F(4)| = 10$

A billa botou 10 litros.

96. A función de ingreso marxinal dun produto, en millóns de euros, é:

$$i(x) = 15 - 2x$$

onde **x** é o número de unidades vendidas en miles.

a) Calcula que ingreso se obtén pola venda de 2 000 unidades.

b) Cal é o ingreso adicional ao pasar de 2 000 a 3 000 unidades vendidas?

Solución:

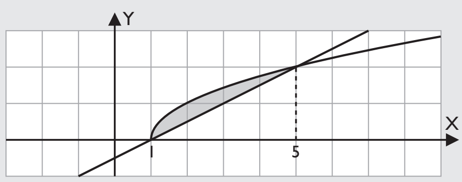
$$\int_{0}^{2} (15 - 2x)\,dx = 26 \text{ millóns de euros.}$$

$$\int_{2}^{3} (15 - 2x)\,dx = 10 \text{ millóns de euros.}$$

97. Dous irmáns herdan unha parcela que deberán repartir entre eles. A parcela é a rexión plana limitada pola curva $y = \sqrt{x - 1}$ e a recta $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Calcula a área da parcela.

Solución:



$$\text{Área} = \int_{1}^{5} \left(\sqrt{x - 1} - \frac{x - 1}{2}\right) dx = \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2$$

Para ampliar

98. Calcula tres primitivas da función:

$$y = x$$

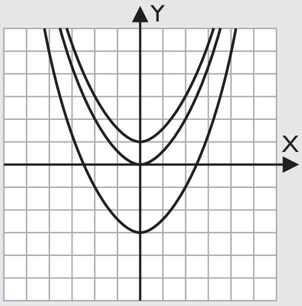
Represéntaas. En que se parecen?

Solución:

$y = \frac{x^2}{2}$

$y = \frac{x^2}{2} + 1$

$y = \frac{x^2}{2} - 3$



Todas as curvas teñen en común que son translacións verticais da integral sen constante.

99. Dada a función:

$$y = -x + 1$$

a) Calcula a súa integral indefinida:

b) Atopa a primitiva que pasa polo punto P(4, – 1).

c) Debuxa a función inicial e a primitiva que se pide no apartado anterior.

Solución:

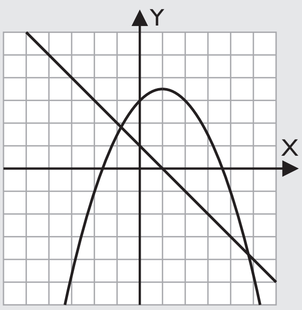
a) $\int (-x + 1)\,dx = -\frac{x^2}{2} + x + k$

b) $-\frac{4^2}{2} + 4 + k = -1$

$k = 3$

$y = -\frac{x^2}{2} + x + 3$

c)



100. Calcula a integral da función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Solución:

É a integral dun polinomio.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$$

101. $\int \frac{1}{e^{2x}}\,dx$

Solución:

$\frac{-1}{2e^{2x}} + k$

102. $\int \left(\frac{1}{x} + 3x^2\right) dx$

Solución:

$L\,|x| + x^3 + k$

103. Calcula a integral da función:

$$y = e^{x+2}$$

Solución:

É a integral dunha función exponencial.

$$e^{x+2} + k$$

104. $\int \left(\frac{x^3 - x + 2}{x^2}\right) dx$

Solución:

$\frac{x^2}{2} - L\,|x| - \frac{2}{x} + k$

105. $\int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

Solución:

$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + k$

106. Calcula a integral da función:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

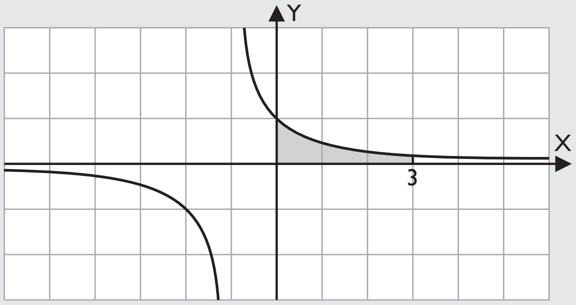
Solución:

Aplícase a integral dunha función irracional.

$$\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + k$$

107. Calcula: $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$

Solución:



a) $F(x) = L\,|x+1|$

b) $F(0) = 0, F(3) = L\,4$

c) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = L\,4 = 1{,}39\ u^2$

108. Sexa a función: $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$

a) Atopa os valores de **a** e **b**, de forma que f(x) teña un máximo en x = 1 e un mínimo en x = 2.

b) Atopa a área da rexión limitada pola gráfica f(x) e o eixe X entre x = 0 e x = 3.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2bx + a$

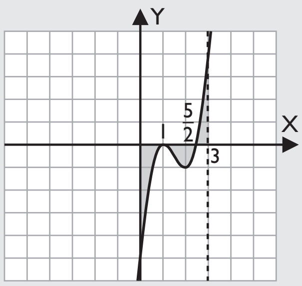
Nos puntos nos que ten o máximo e o mínimo, a primeira derivada anúlase.

Obtense o sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b + 6 = 0 \\ a + 4b + 24 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 12, b = -9$$

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

b) Raíces: $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{2}$



• $F(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2 - 5x$

• $F(0) = 0, F(1) = -\frac{3}{2}, F(5/2) = -\frac{75}{32}, F(3) = -\frac{3}{2}$

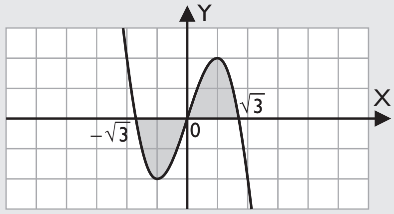
• Área $= \frac{51}{16} = 3{,}19\ u^2$

109. Sexa a función: $f(x) = 3x - x^3$

Atopa a área da rexión limitada polo eixe X e esta función.

Solución:

Raíces: $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$



a) $F(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}$

b) $F(-\sqrt{3}) = \frac{9}{4}, F(0) = 0, F(\sqrt{3}) = \frac{9}{4}$

c) Área $= \frac{9}{2} = 4{,}5\ u^2$

110. Considera as funcións f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

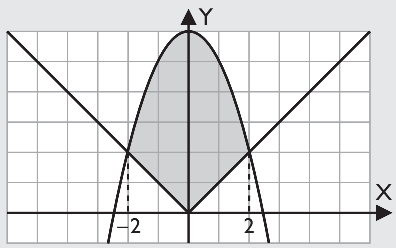
$$f(x) = 6 - x^2, \quad g(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Debuxa o recinto limitado polas gráficas **f** e **g**.

b) Calcula a área do recinto descrito no apartado anterior.

Solución:

a) Debuxo:



b) Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 2$

$\int_{-2}^{0} (6 - x^2 + x)\,dx = \frac{22}{3}$

$\int_{0}^{2} (6 - x^2 - x)\,dx = \frac{22}{3}$

Área $= \frac{44}{3} = 14{,}67\ u^2$

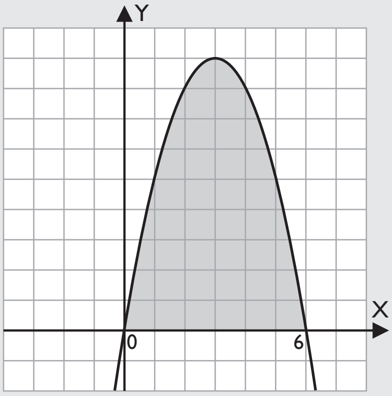
111. Calcula o valor de **a**, positivo, para que a área encerrada entre a curva $y = ax - x^2$ e o eixe de abscisas sexa 36. Representa a curva que se obtén para este valor de **a**.

Solución:

$ax - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = a$

$$\int_0^a (ax - x^2)\, dx = 36 \Rightarrow a = 6$$

$y = 6x - x^2$



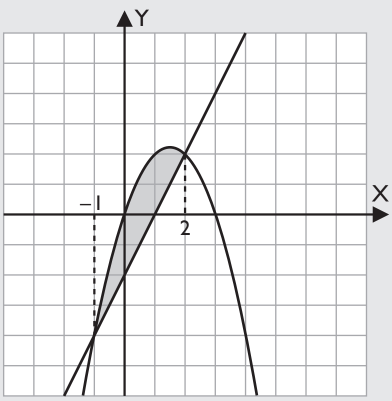
112. Resolve as seguintes cuestións:

a) Debuxa a rexión limitada pola curva de ecuación $y = x(3 - x)$ e a recta de ecuación $y = 2x - 2$.

b) Atopa a área da rexión descrita no apartado anterior.

Solución:

a) Gráfica:



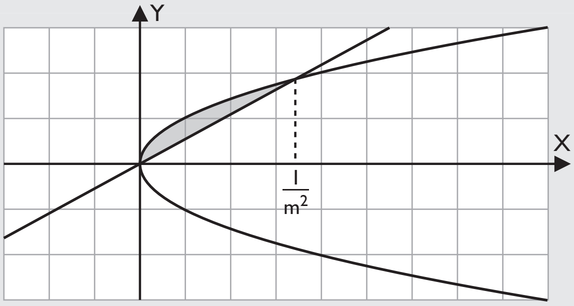
b) Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 2$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx = \frac{9}{4} = 4{,}5\ u^2$$

113. Atopa os valores de **m** para que a área da rexión limitada pola parábola $y^2 = x$ e a recta $y = mx$ sexa 1.

Solución:

Raíces: $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{1}{m^2}$

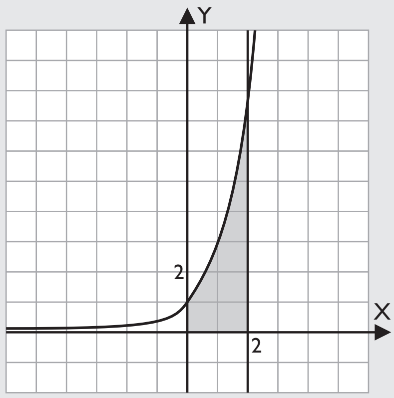


$$\int_0^{1/m^2} \left(\sqrt{x} - mx\right) = 1$$

$$m = \frac{\sqrt[3]{6^2}}{6}$$

114. Calcula a área da rexión limitada pola curva $y = e^x$ e as rectas $x = 0$ e $x = 2$.

Solución:



a) $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x$

b) $F(2) = e^2;\ F(0) = 1$

c) $\text{Área} = \displaystyle\int_0^2 e^x\, dx = |F(2) - F(0)| = e^2 - 1\ u^2$

115. Atopa o valor do parámetro **a** sabendo que a área limitada pola gráfica da parábola $y = x^2 - ax$ e o eixe X é: $\dfrac{32}{3}$

Solución:

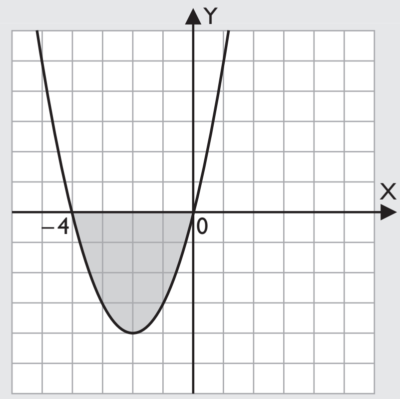
$x^2 - ax = 0 \Rightarrow x = 0, x = a$

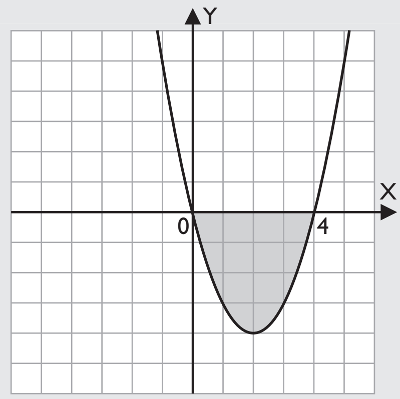
$$\left|\int_a^0 (x^2 - ax)\, dx\right| = \frac{32}{3}$$

$|a^3| = 64$

$a = 4$

$a = -4$





Problemas

116. Calcula tres primitivas da función:

$$y = -x$$

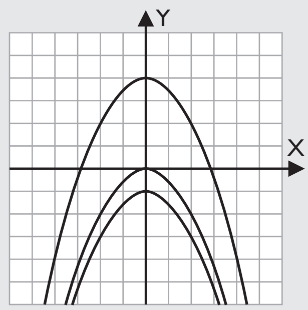
Represéntaas. En que se parecen?

Solución:

$y = -\dfrac{x^2}{2}$

$y = -\dfrac{x^2}{2} + 3$

$y = -\dfrac{x^2}{2} - 1$



Todas as curvas teñen en común que son translacións verticais da integral sen constante.

117. Dada a función: $y = e^x$

a) Calcula a súa integral indefinida.

b) Atopa a primitiva que pasa polo punto P(1, 1).

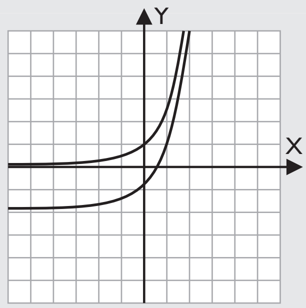
c) Debuxa a función inicial e a primitiva que se pide no apartado anterior.

Solución:

a) $\int e^x \, dx = e^x + k$

b) $e^1 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - e \Rightarrow y = e^x + 1 - e$

c)



118. Calcula a integral da función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

Solución:

É a integral dun polinomio.

$$\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + k$$

119. Calcula a integral da función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Solución:

Aplícase o método de integración de funcións racionais.

A descomposición é:

$$x - 3 + \frac{2}{x}$$

A integral é:

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2\,L\,|x| + k$$

120. Calcula a integral da función:

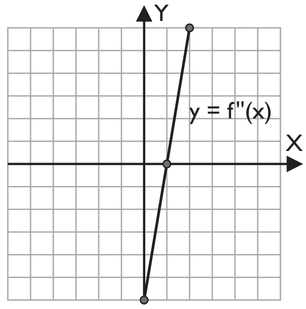
$$y = e^{-x}$$

Solución:

É a integral dunha función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

121. A recta que pasa polos puntos (0, –6) e (1, 0) (observa o debuxo) é a gráfica da función derivada segunda f'' dunha certa función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sábese que a orixe pertence á curva y = f(x) e que nese punto a recta tanxente ten pendente igual a 3. Determina unha expresión da función f.



Solución:

$f''(x) = 6x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + k_1$

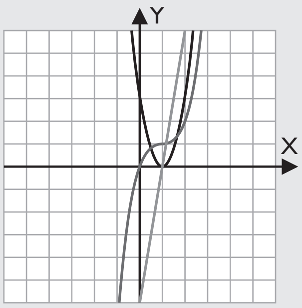
$f'(0) = 3 \Rightarrow k_1 = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + k_2$

$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$



122. Considérase a función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

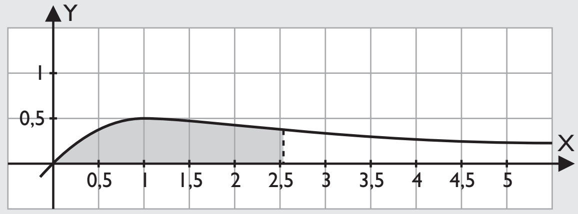
Calcula o valor de a > 0 para o cal se verifica a igualdade: $\int_0^a f(x)\,dx = 1$

Solución:

$$\int_0^a \frac{x}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2} L\,(a^2 + 1)$$

Resólvese a ecuación e tómase a > 0:

$$\frac{1}{2} L\,(a^2 + 1) = 1 \Rightarrow a = \sqrt{e^2 - 1}$$

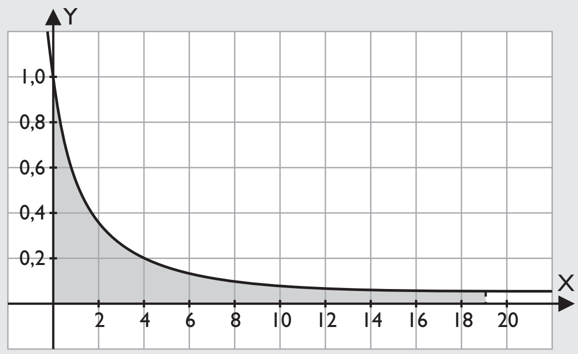


123. Calcula o valor de a > 0 para que: $\int_0^a \frac{1}{x + 1}\,dx = 3$

Solución:

$$\int_0^a \frac{dx}{x + 1} = L\,(a + 1)$$

$L\,(a + 1) = 3 \Rightarrow a = e^3 - 1$



124. Considéranse as funcións:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3,\ g(x) = ax^2 + b$$

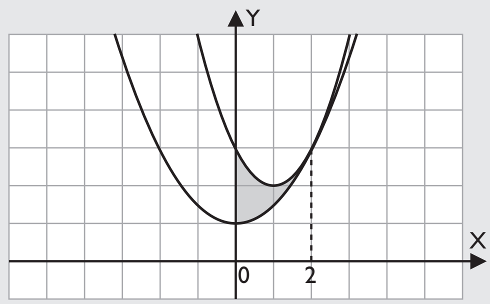
a) Calcula **a** e **b** para que as gráficas f(x) e g(x) sexan tanxentes no punto de abscisa x = 2.

b) Para os mesmos valores de **a** e **b**, encontra a área limitada polas gráficas das funcións e o eixe vertical Y.

Solución:

a) $a = \frac{1}{2}$, b = 1

b) Área:



$$\int_0^2 \frac{x^2 - 4x + 4}{2}\,dx = \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2$$

125. Sexan as funcións: $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$

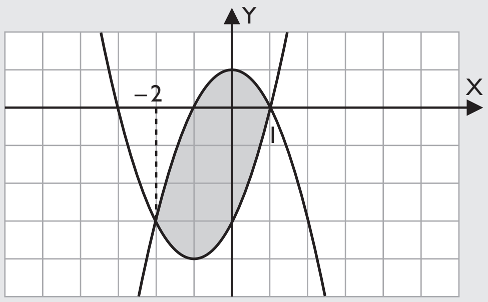
a) Determínense **a**, **b** e **c** sabendo que as gráficas de ambas as funcións se cortan nos puntos $(-2, -3)$ e $(1, 0)$.

b) Calcúlese a área da rexión limitada polas gráficas f(x) e g(x).

Solución:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = -x^2 + 1$

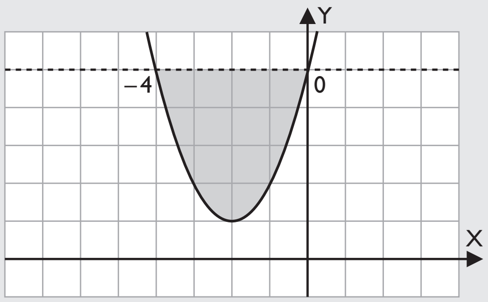
b) Área:



$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)\, dx = 9 \text{ u}^2$$

126. Encontra a área do recinto delimitado por esta curva: $y = x^2 + 4x + 5$, e esta recta: $y = 5$

Solución:

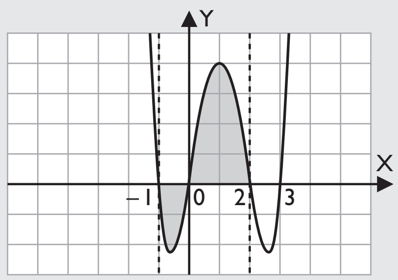


$$\text{Área} = \int_{-4}^{0} (-x^2 - 4x)\, dx = \frac{32}{3} = 10{,}67 \text{ u}^2$$

127. Sexa a función: $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

Calcula a área determinada pola gráfica f(x), o eixe horizontal e as rectas $x = -1$ e $x = 2$.

Solución:



Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3$

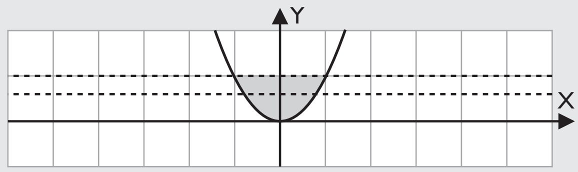
a) $F(x) = \dfrac{x^5}{5} - x^4 + \dfrac{x^3}{3} + 3x^2$

b) $F(-1) = \dfrac{22}{15}$, $F(0) = 0$, $F(2) = \dfrac{76}{15}$

c) $\text{Área} = \dfrac{98}{15} = 6{,}53 \text{ u}^2$

128. Quérese dividir a rexión plana encerrada entre a parábola $y = x^2$ e a recta $y = 1$ en dúas rexións de igual área mediante unha recta $y = a$. Atopa o valor de **a**.

Solución:



Aplicando o cálculo integral, temos:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

Se $y = a$, $y = x^2$.

$x^2 = a \Rightarrow x_1 = -\sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a}$

A metade de $\dfrac{4}{3}$ é: $\dfrac{2}{3}$

$$\int_{0}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

129. Resolve as seguintes cuestións:

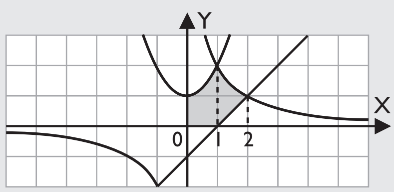
a) Debuxa o recinto limitado polos semieixes positivos de coordenadas e as curvas:

$$y = x^2 + 1, y = \frac{2}{x} \text{ e } y = x - 1$$

b) Atopa a área do recinto considerado no apartado anterior.

Solución:

a) Recinto:



b) Área do recinto.

$$\int_{0}^{1} (x^2 + 1)\, dx = \frac{4}{3}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - x + 1 \right) dx = -\frac{1}{2} + L\,4$$

$$\text{Área} = \frac{5}{6} + L\,4 = 2{,}22\ u^2$$

130. Resolve as seguintes cuestións:

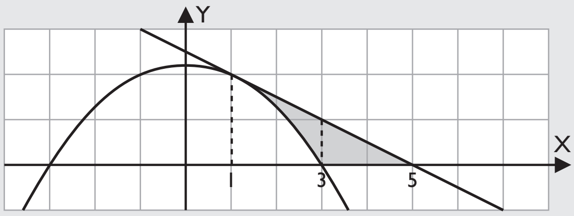
a) Debuxa o recinto limitado pola curva $y = \dfrac{9 - x^2}{4}$, a recta tanxente a esta curva no punto de abscisa $x = 1$ e o eixe de abscisas.

b) Calcula a área do recinto considerado no apartado anterior.

Solución:

a) Recta tanxente:

$$y = \frac{5 - x}{2}$$



b) Área do recinto.

$$\int_1^3 \left(\frac{5 - x}{2} - \frac{9 - x^2}{4} \right) dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_3^5 \frac{5 - x}{2}\, dx = 1$$

$$\text{Área} = \frac{5}{3} = 1{,}67\ u^2$$

131. Da función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sábese que ten un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0, 0)$ e que: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$

Calcula **a**, **b**, **c** e **d**.

Solución:

Temos un máximo relativo en $x = 1$, a primeira derivada anúlase para $x = 1$.

$$3a + 2b + c = 0$$

Temos un punto de inflexión en $(0, 0)$, pasa por ese punto; por tanto, $d = 0$ e a segunda derivada anúlase en $x = 0$.

$$b = 0$$

De onde se obtén: $c = -3a$

A función é:

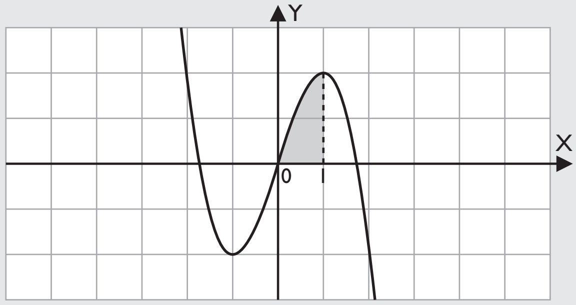
$f(x) = ax^3 - 3ax$

$$\int_0^1 (ax^3 - 3ax)\, dx = \frac{5}{4}$$

$$-\frac{5a}{4} = \frac{5}{4}$$

$a = -1$

$f(x) = -x^3 + 3x$



Para profundar

132. A recta de ecuación $3x - y + 2 = 0$ é tanxente á parábola de ecuación $y = ax^2 + c$ no punto $P(1, 5)$.

a) Calcula as constantes **a** e **c** da ecuación da parábola describindo o procedemento que sigas.

b) Debuxa a rexión plana limitada polo eixe Y, a parábola e a recta tanxente.

c) Calcula a área da rexión descrita no apartado anterior.

Solución:

a) A pendente da recta é: $m = 3$

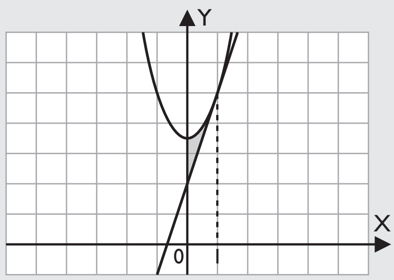
A derivada da parábola é: $y' = 2ax$

Polo tanto, para $x = 1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$

Se a parábola pasa polo punto $P(1, 5)$, dedúcese que:

$c = \dfrac{7}{2}$

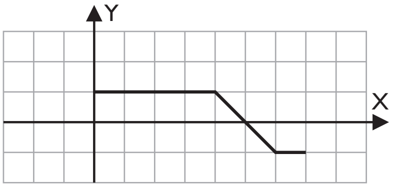
b) Debuxo:



c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{7}{2} - 3x - 2 \right) dx = \frac{1}{2}$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ u^2$$

133. A figura que aparece a continuación representa a gráfica dunha función f: [0, 7] $\to \mathbb{R}$:



Sexa F: [0, 7] $\to \mathbb{R}$ a función definida por:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

a) Calcula F(4) e F(7).

b) Debuxa a gráfica F(x) explicando como o fas.

Solución:

a) F(4) é a área comprendida entre o eixe X e a función no intervalo [0, 4], F(4) = 4 u^2.

F(7) obtense como F(4), pero hai media unidade máis positiva e unha e media negativa, F(7) = 3 u^2.

A fórmula de F(x) é:

• No intervalo [0, 4] é:

$$f(t) = 1 \Rightarrow F(x) = x$$

• No intervalo [4, 6] é:

$$f(t) = -x + 5 \Rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x + k_1$$

coa condición de que debe pasar polo punto P(4,4). De onde se obtén que $k_1 = -8$.

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x - 8$$

• No intervalo [6, 7] é:

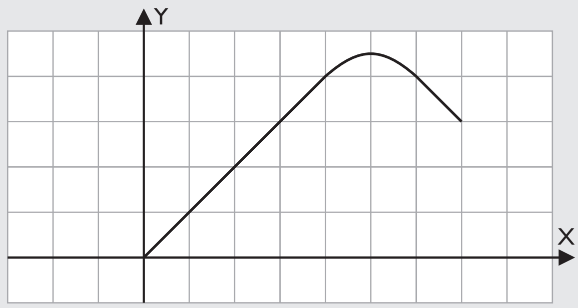
$$f(t) = -1 \Rightarrow F(x) = -x + k_2$$

coa condición de que debe pasar polo punto P(6, 4). De onde se obtén que $k_2 = 10$.

$$F(x) = -x + 10$$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 4 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 5x - 8 & \text{se } 4 < x < 6 \\ -x + 10 & \text{se } 6 \le x \le 7 \end{cases}$$

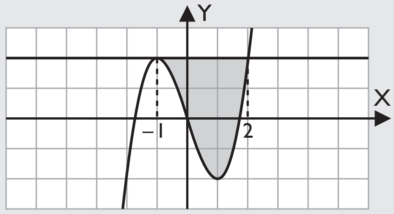
b)



134. Atopa a recta tanxente á curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ no punto de abscisa $x = -1$.

Debuxa o recinto limitado por esta recta tanxente e a curva dada e calcula a súa área.

Solución:



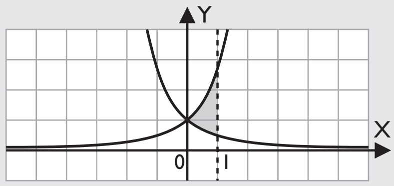
A recta tanxente no punto de abscisa $x = -1$ é $y = 2$.

$$\int_{-1}^{2} (2 - x^3 + 3x)\,dx = \frac{27}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{27}{4} = 6{,}75 \text{ u}^2$$

135. Calcula a área da rexión limitada polas curvas: $y = e^x$, $y = e^{-x}$, e a recta: $x = 1$

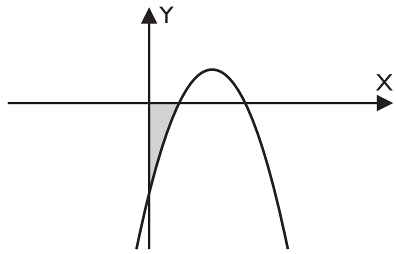
Solución:



$$\int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$\text{Área} = e + \frac{1}{e} - 2 = 1{,}09 \text{ u}^2$$

136. Na figura aparece unha curva que representa unha función polinómica de grao 2. Os puntos de intersección da curva co eixe X son o A(1, 0) e o B(3, 0). Ademais, a área limitada pola curva e os dous eixes coordenados vale 4/3. Atopa a expresión desta función.



Solución:

$$f(x) = a(x - 1)(x - 3)$$

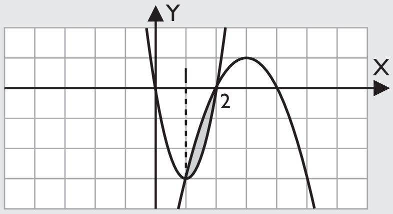
$$f(x) = a(x^2 - 4x + 3)$$

$$a\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx = -\frac{4}{3} \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

137. Debuxa coa maior exactitude posible as gráficas das funcións $f(x) = 3x^2 - 6x$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 8$. Representa o recinto limitado por ambas as funcións e obtén a súa área.

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 2$

$$\int_1^2 (-4x^2 + 12x - 8)\, dx = \frac{2}{3}$$

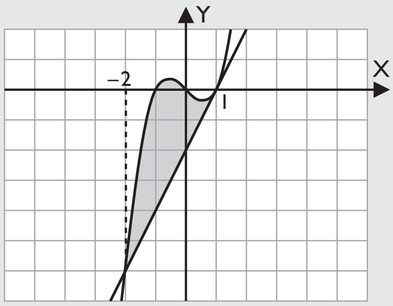
$$\text{Área} = \frac{2}{3} = 0{,}67 \text{ u}^2$$

138. Representa graficamente o recinto plano limitado pola curva $y = x^3 - x$ e a súa recta tanxente no punto de abscisa $x = 1$. Calcula a súa área.

Solución:

A ecuación da recta tanxente no punto P(1, 0) é:

$$y = 2x - 2$$

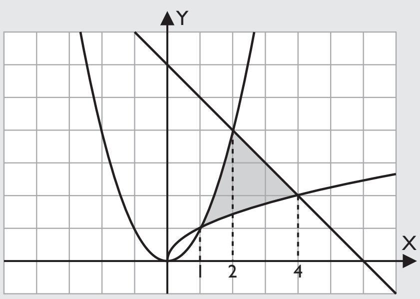


$$\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)\, dx = \frac{27}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{27}{4} = 6{,}75 \text{ u}^2$$

139. Determina a área comprendida entre a curva $y = x^2$, a curva $y = \sqrt{x}$ e a recta que pasa polos puntos A(2, 4) e B(4, 2).

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$

$$\int_1^2 \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx = 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_2^4 \left(6 - x - \sqrt{x}\right) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{11}{3} = 3{,}67 \text{ u}^2$$

140. Calcula o valor de $a > 0$ para que:

$$\int_0^3 \frac{1}{x + a}\, dx = 5$$

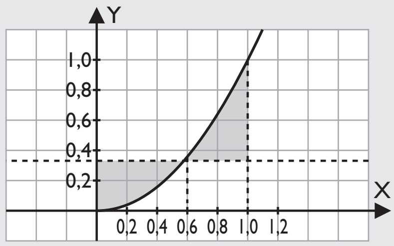
Solución:

$$\int_0^3 \frac{1}{x + a}\, dx = L\,(3 + a) - L\,a = L\,\frac{3 + a}{a}$$

$$L\,\frac{3 + a}{a} = 5 \Rightarrow \frac{3 + a}{a} = e^5 \Rightarrow a = \frac{3}{e^5 - 1}$$

141. Considéranse as curvas $y = x^2$ e $y = a$, onde **a** é un número real comprendido entre 0 e 1($0 < a < 1$). Ambas as curvas córtanse no punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Atopa **a** sabendo que a área encerrada entre ambas as curvas dende $x = 0$ ata $x = x_0$ é igual á encerrada entre elas dende $x = x_0$ ata $x = 1$.

Solución:



Ao punto (x_0, y_0) pódeselle chamar: $\left(\sqrt{a}, a\right)$

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a)\, dx$$

$$\frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a} - a + \frac{1}{3}$$

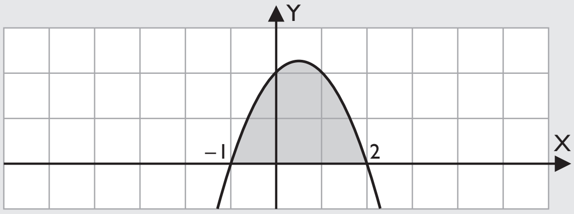
$$a = \frac{1}{3}$$

142. Considera a función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 2 + x - x^2$$

Calcula **a**, $a < 2$, de forma que: $\displaystyle\int_a^2 f(x)\, dx = \frac{9}{2}$

Solución:



$$\int_a^2 (2 + x + x^2)\,dx = \frac{9}{2}$$

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{10}{3} = \frac{9}{2} \Rightarrow a = -1, a = \frac{7}{2}$$

O valor $a < 2$ é: $a = -1$

143. Da gráfica da función polinómica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

coñécense os seguintes datos: que pasa pola orixe de coordenadas e que nos puntos de abscisas 1 e –3 ten tanxentes paralelas á bisectriz do segundo e cuarto cuadrantes.

a) Calcula **a**, **b** e **c**.

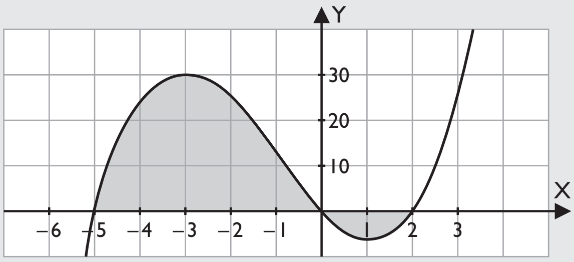
b) Debuxa o recinto limitado pola gráfica da función f(x) e o eixe de abscisas, e calcula a súa área.

Solución:

a) $a = 3, b = -10, c = 0$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$

b) Debuxo:



Raíces: $x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 2$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2$$

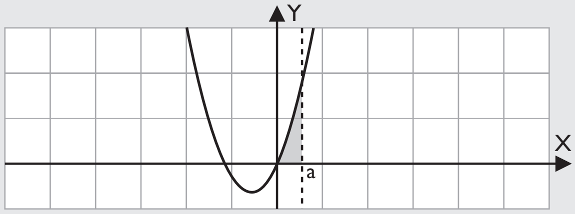
$$F(-5) = -\frac{375}{4}, F(0) = 0, F(2) = -8$$

$$\text{Área} = \frac{407}{4} = 101{,}75 \text{ u}^2$$

144. Determina unha constante positiva **a** sabendo que a figura plana limitada pola parábola $y = 3ax^2 + 2x$, a recta $y = 0$ e a recta $x = a$ ten área $(a^2 - 1)^2$.

Solución:

A parábola pasa pola orixe de coordenadas.



$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)\,dx = a^4 + a^2$$

Por tanto:

$a^4 + a^2 = (a^2 - 1)^2$

Ao resolver esta ecuación, obtense:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Só se toma o resultado positivo, como indica o enunciado do problema.

Paso a paso

145. Calcula a seguinte integral indefinida:

$$\int (e^{5x} + x^2)\, dx$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

146. Calcula a integral:

$$F(x) = \int (2x - 5)\, dx$$

Atopa a primitiva que pase polo punto P(4, 3).

Representa a primitiva obtida para comprobar que pasa por este punto.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

147. Debuxa e calcula a área do recinto limitado polo eixe X e a función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ no intervalo [1, 4].

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

148. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

149. $\int (x^3 - 6x^2 + 1)\, dx$

Solución:

Exercicio 149

$$\int (x^3 - 6x^2 + 1)\, dx \rightarrow \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + x$$

150. $\int \frac{5}{x^3}\, dx$

Solución:

Exercicio 150

$$\int \frac{5}{x^3}\, dx \rightarrow \frac{-5}{2 \cdot x^2}$$

151. $\int \frac{1}{(3x + 5)^2}\, dx$

Solución:

Exercicio 151

$$\int \frac{1}{(3x + 5)^2}\, dx \rightarrow \frac{-1}{9 \cdot x + 15}$$

152. $\int 5 \cdot 7^{5x}\, dx$

Solución:

Exercicio 152

$$\int 5 \cdot 7^{5x}\, dx \rightarrow \frac{7^{5 \cdot x}}{\ln(7)}$$

153. $\int \frac{1}{(x + 3)^2}\, dx$

Solución:

Exercicio 153

$$\int \frac{2}{(x + 3)^2}\, dx \rightarrow \frac{-2}{x + 3}$$

154. $\int (e^{x/5} + x^2)\, dx$

Solución:

Exercicio 154

$$\int \left(e^{\frac{x}{5}} + x^2\right) dx \rightarrow 5 \cdot e^{\frac{x}{5}} + \frac{x^3}{3}$$

155. Calcula a integral: $F(x) = \int (3x^2 - 4x - 1)\,dx$

Atopa a primitiva que pase polo punto P(2, 1). Representa a primitiva obtida para comprobar que pasa por este punto.

Solución:

Exercicio 155

$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \;\rightarrow\; x \mapsto 3\cdot x^2 - 4\cdot x - 1$

$F(x) = \int f(x)\,dx \;\rightarrow\; x \mapsto x^3 - 2\cdot x^2 - x$

$P = \text{punto}(2, 1) \;\rightarrow\; (2, 1)$

Substituímos o punto P(2, 1)

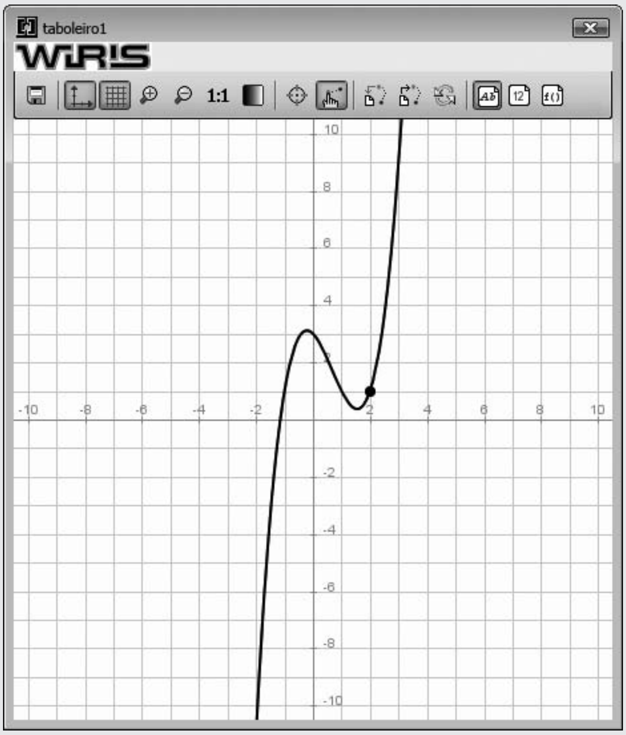
$\text{resolver}(F(2) + k = 1) \;\rightarrow\; \{\{k=3\}\}$

A función é :

$F(x) = F(x) + 3 \;\rightarrow\; x \mapsto x^3 - 2\cdot x^2 - x + 3$

debuxar(F(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(P, {cor = negro, tamaño_punto = 8})



156. Debuxa o recinto correspondente e calcula a seguinte integral definida:

$$\int_2^5 (x - 1)\,dx$$

Observa e xustifica o signo do valor obtido.

Solución:

Problema 156

$f(x) = x - 1 \;\rightarrow\; x \mapsto x - 1$

debuxar(x = 2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 5, {cor = negro, anchura_liña = 2})

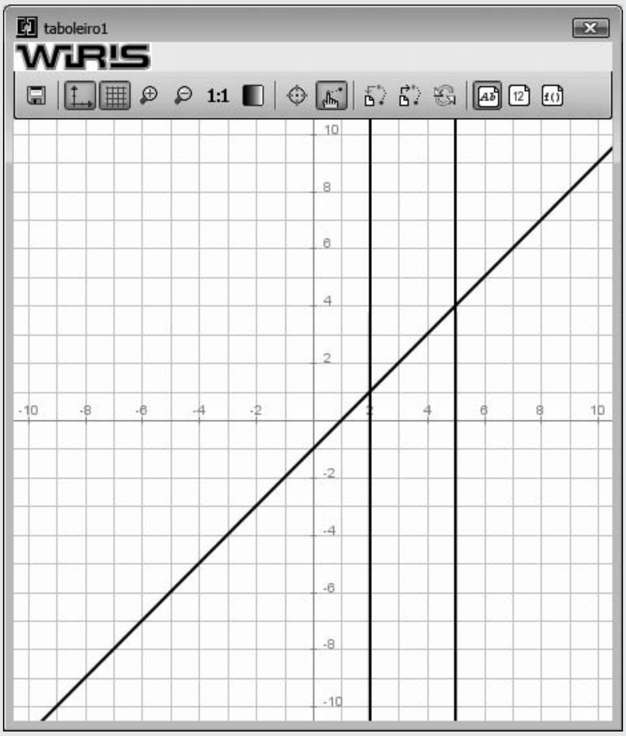
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

$\text{resolver}(f(x) = 0) \;\rightarrow\; \{\{x=1\}\}$

Hai unha soa rexión no intervalo [2, 5]

$\int_2^5 f(x)\,dx \;\rightarrow\; \frac{15}{2}$

O signo é positivo porque a rexión está enriba do eixe X.



157. Debuxa o recinto correspondente e calcula a seguinte integral definida:

$$\int_1^4 (x^2 - 6x + 4)\,dx$$

Observa e xustifica o signo do valor obtido.

Solución:

Problema 157

$f(x) = x^2 - 6x + 4 \;\rightarrow\; x \mapsto x^2 - 6\cdot x + 4$

debuxar(x = 1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 4, {cor = negro, anchura_liña = 2})

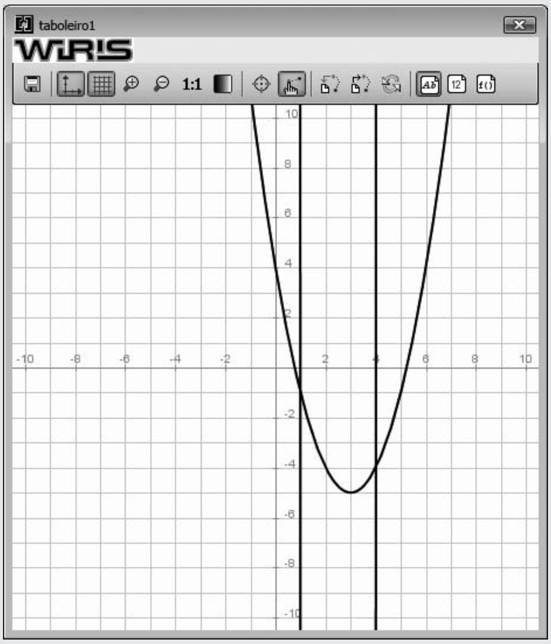
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

$\text{resolver}(f(x) = 0) \;\rightarrow\; \{\{x = -\sqrt{5} + 3\}, \{x = \sqrt{5} + 3\}\}$

Hai unha soa rexión no intervalo [1, 4]

$\int_1^4 f(x)\,dx \;\rightarrow\; -12$

O signo é negativo porque a rexión está debaixo do eixe X.



158. Debuxa o recinto correspondente e calcula a seguinte integral definida.

$$\int_{-4}^{4} |x|\, dx$$

Solución:

Problema 158

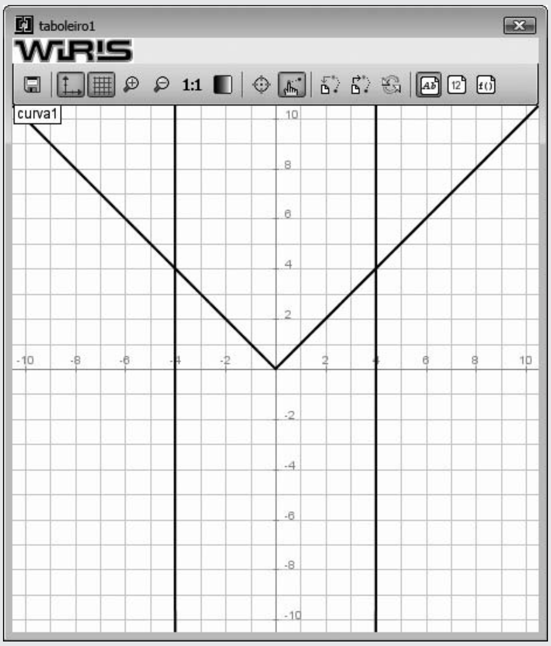
$f(x) = |x| \;\rightarrow\; x \mapsto |x|$

debuxar(x = −4, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 4, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

$\int_{-4}^{4} f(x)\, dx \;\rightarrow\; 16$



159. Debuxa o recinto limitado polas seguintes funcións e calcula a súa área.

$f(x) = 4 - x^2$ $\qquad$ $g(x) = 2x + 1$

Solución:

Problema 159

$f(x) = 4 - x^2 \;\rightarrow\; x \mapsto -x^2+4$

$g(x) = 2x + 1 \;\rightarrow\; x \mapsto 2 \cdot x+1$

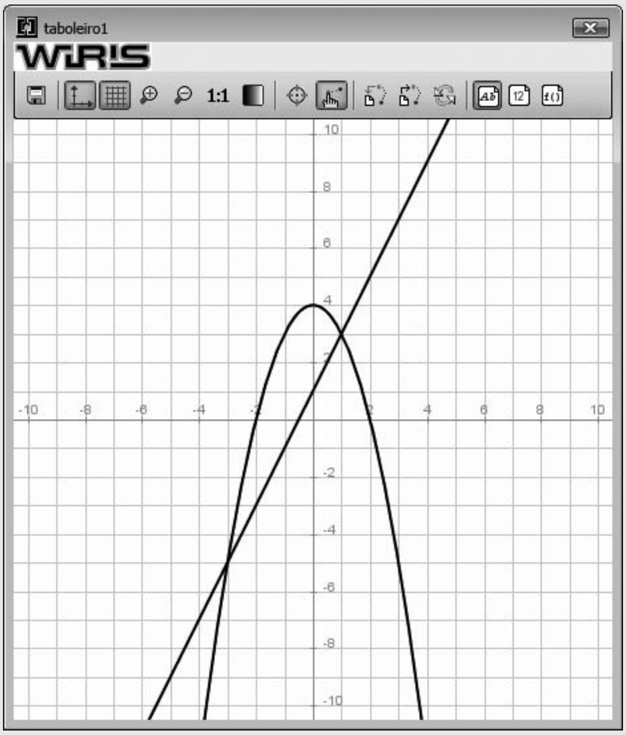
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(g(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

resolver(f(x) = g(x)) $\rightarrow$ {{x=−3}, {x=1}}

$\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \;\rightarrow\; \frac{32}{3}$

Área = $\frac{32}{3}$ u^2



160. Debuxa e calcula a área do recinto limitado polo eixe X e a función:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$$

Solución:

Problema 160

$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x \rightarrow x \mapsto -x^3 + x^2 + 2 \cdot x$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(y = 0, {cor = negro, anchura_liña = 2})

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=−1}, {x=0}, {x=2}}

Hai dúas rexións nos intervalos [−1, 0] e [0, 2]

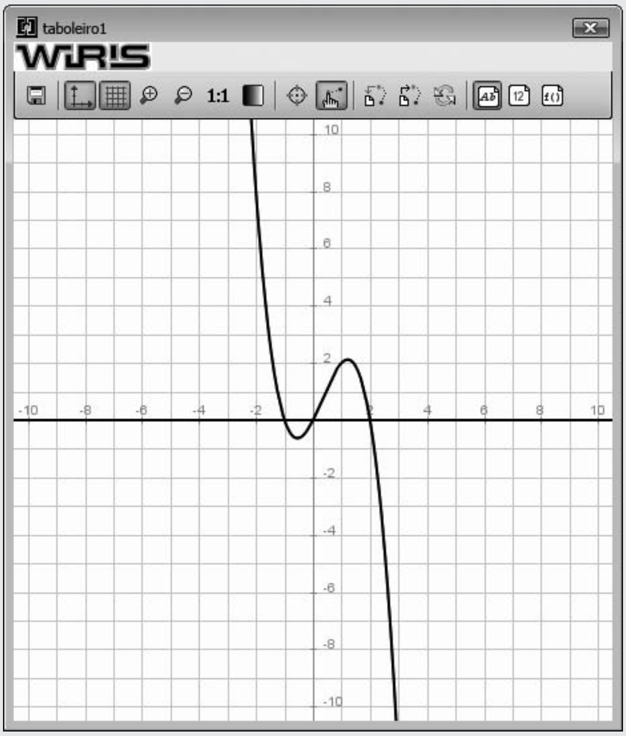
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \rightarrow -\frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx \rightarrow \frac{8}{3}$$

$$\left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{8}{3}\right| \rightarrow \frac{37}{12}$$

$$\frac{37.}{12} \rightarrow 3.0833$$

$$\text{Área} = \frac{37}{12}\,u^2 = 3{,}08\,u^2$$



161. Unha fábrica produce chips para ordenadores. A función de ingreso marxinal vén dada por:

$$i(x) = 3 + \frac{2}{x + 1}$$

onde **x** é o número de chips vendidos e **i(x)** vén dado en euros. Se a fábrica vende 10 000 unidades, cales son os ingresos obtidos?

Debuxa a rexión correspondente aos ingresos obtidos.

Solución:

Problema 161

$i(x) = 3 + \frac{2}{x+1} \rightarrow x \mapsto \frac{3 \cdot x + 5}{x + 1}$

taboleiro{centro = punto(5000, 1), anchura = 11000, altura = 6}

debuxar(x = 0, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 10000, {cor = negro, anchura_liña = 2})

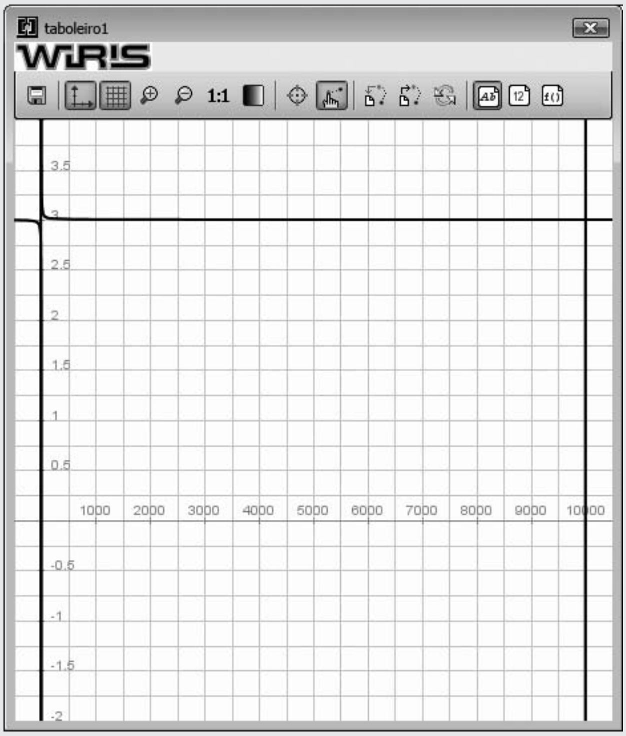
debuxar(i(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow$ {□}

Hai unha única rexión no intervalo [0, 12]

$$\int_{0}^{10000} i(x)\,dx \rightarrow 30018.$$

Ingresos = 30018 €



162. Calcula a área encerrada polas funcións:

$$f(x) = x^3 + 3x^2,\ g(x) = x + 3$$

Solución:

Problema 162

$f(x) = x^3 + 3x^2 \rightarrow x \mapsto x^3 + 3 \cdot x^2$

$g(x) = x + 3 \rightarrow x \mapsto x + 3$

resolver$(f(x) = g(x)) \rightarrow \{\{x=-3\}, \{x=-1\}, \{x=1\}\}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(g(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = −3, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = −1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

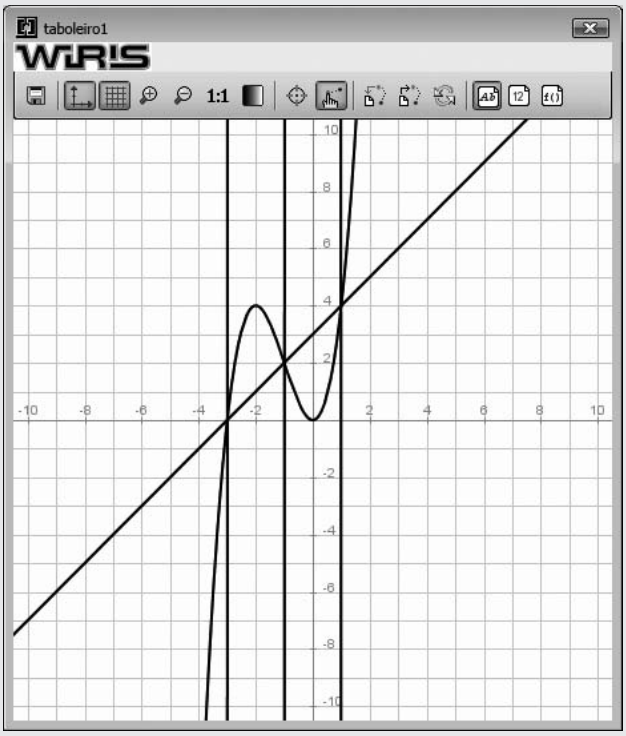
debuxar(x = 1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

$$\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x))\, dx \rightarrow 4$$

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \rightarrow -4$$

Área $= |4| + |-4| \rightarrow 8$

Área= 8 u^2



163. Nunha cidade de 500 000 habitantes, estímase que a velocidade de enfermos por día que hai nunha epidemia de gripe, segue a función:

$$f(x) = 2x + 20$$

onde **x** se mide en días e f(x) en miles de persoas cada día.

Calcula o número de persoas que enfermarán entre o segundo día e o quinto día.

Solución:

Problema 163

$f(x) = 2x + 20 \rightarrow x \mapsto 2 \cdot x + 20$

resolver$(f(x) = 0) \rightarrow \{\{x=-10\}\}$

taboleiro{centro = punto(2.5, 15), anchura = 6, altura = 40}

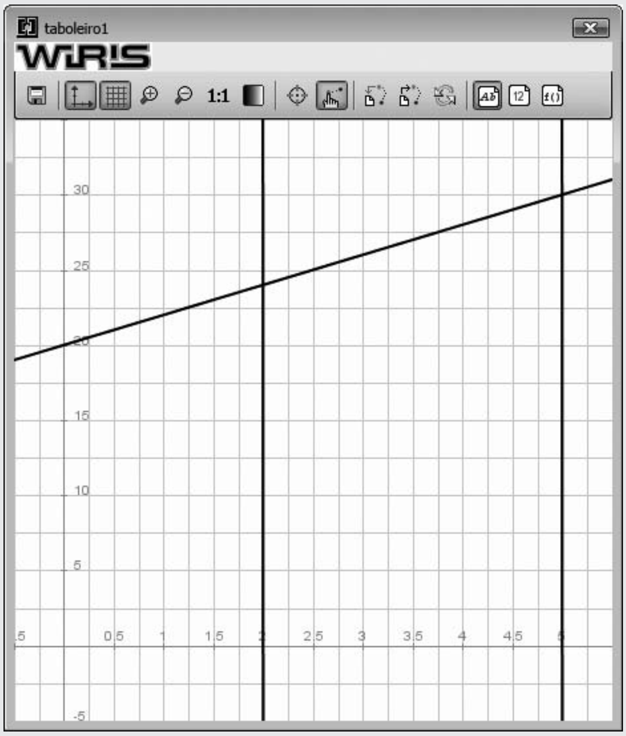
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 5, {cor = negro, anchura_liña = 2})

$$\int_{2}^{5} f(x)\, dx \rightarrow 81$$

Haberá en total 81000 enfermos.



164. O ritmo de crecemento dunha determinada poboación de peixes vén dado pola función:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8$$

onde **x** se mide en meses e f(x) en miles de peixes por cada mes.

Calcula o crecemento de peixes nos tres primeiros meses.

Solución:

Problema 164

$f(x) = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow x \mapsto -x^2+2\cdot x+8$

resolver(f(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=−2}, {x=4}}

taboleiro{centro = punto(1.5, 5), anchura = 4, altura = 12}

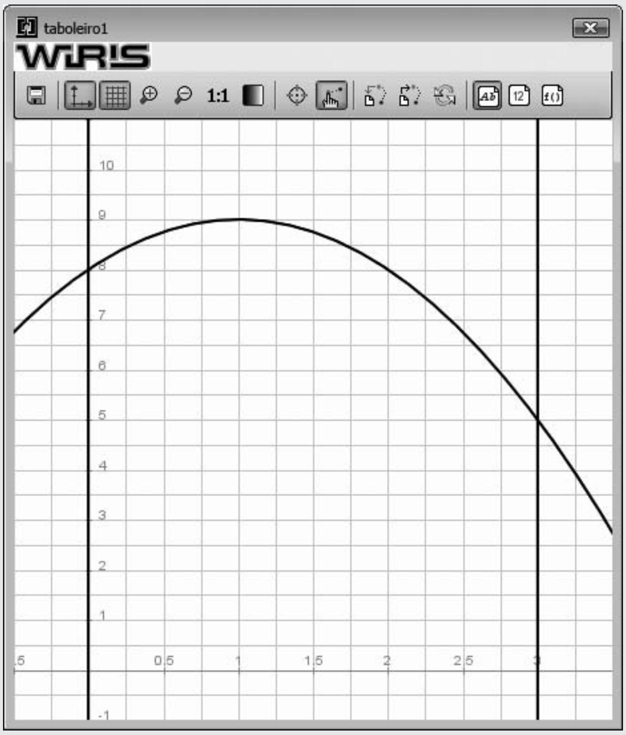
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2}) 2})

debuxar(x = 0, {cor = negro, anchura_liña = 2})2})

debuxar(x = 3, {cor = negro, anchura_liña = 2}) 2})

$\int_0^3 f(x)\,dx \Rightarrow 24$

A poboación creceu en 24000 peixes.



165. Estímase que o ritmo de crecemento dun feto durante o embarazo vén dado pola función:

$$f(x) = -\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}$$

onde **x** se mide en semanas e f(x) en centímetros por semana. Calcula canto creceu o feto nas 30 primeiras semanas.

Solución:

Problema 165

$f(x) = -\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5} \Rightarrow x \mapsto -\frac{1}{200}\cdot x^2 + \frac{1}{5}\cdot x$

resolver(f(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=0}, {x=40}}

taboleiro{centro = punto(15, 1), anchura = 35, altura = 3}

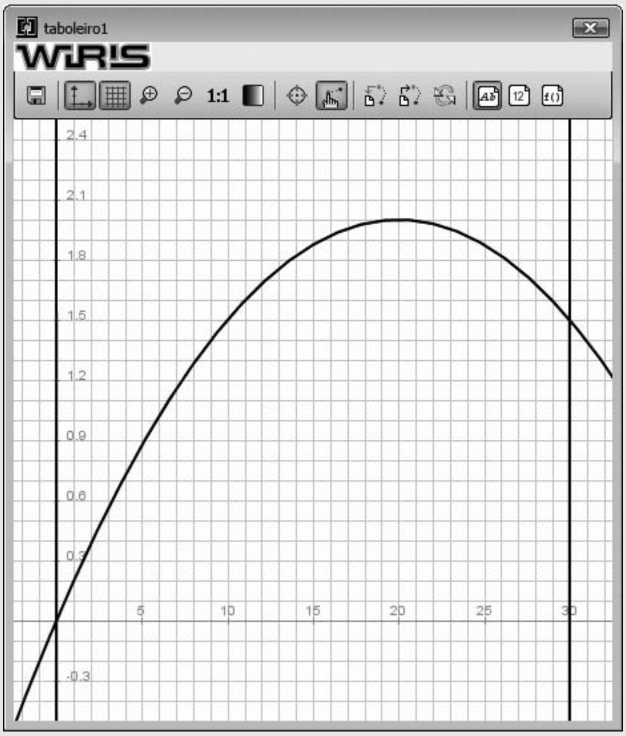
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 0, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 30, {cor = negro, anchura_liña = 2})

$\int_0^{30} f(x)\,dx \Rightarrow 45$

Creceu 45 cm.



1. Dada a función $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$, determina:

a) A monotonía e a curvatura de f(x).

b) Os puntos onde a función alcanza os seus extremos relativos.

c) A ecuación da recta tanxente á gráfica de f(x) no punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

a) Calcúlanse a 1ª derivada para estudar a monotonía e a 2ª derivada para a curvatura:

$f'(x) = -6x + 3x^2$

$f''(x) = -6 + 6x$

Estudo da monotonía:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Se $x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 - 3 \cdot 0^2 + 0^3 = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

Se $x = 2 \Rightarrow f(0) = 4 - 3 \cdot 2^2 + 2^3 = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$ (–)

f'(x)	+		–		+
x		0		2	

Crecente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decrecente: (↘): $(0, 2)$

Estudo da curvatura:

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Se $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 - 3 \cdot 1^2 + 1^3 = 2 \Rightarrow C(1, 2)$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$ (–)

f'(x)	–		+
x	0	1	

Convexa (∪): $(1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$

b) **Extremos relativos:**

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$ (–) $\Rightarrow$ **A(0, 4) é un máximo relativo.**

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$ (+) $\Rightarrow$ **B(2, 0) é un mínimo relativo.**

c) **Ecuación recta tanxente:**

Se $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1)^3 = 0 \Rightarrow P(-1, 0)$

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$

A recta tanxente é:

$y - 0 = 9(x + 1) \Rightarrow y = 9x + 9$

2. Dada a función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{se } x \le -1 \\ k & \text{se } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

a) Atopa o valor de **k** para que a gráfica sexa continua para $x = -1$.

b) Para ese valor de **k**, debuxa a gráfica.

c) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica de f e o eixe de abscisas.

Solución:

a) $$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{se } x \le -2 \\ x+2 & \text{se } -2 < x \le -1 \\ k & \text{se } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

A función está definida por catro funcións polinómicas que son continuas en todo $\mathbb{R}$. Os únicos puntos nos que pode haber problemas son os valores nos que cambia a definición. En concreto, $x = -1, x = 1$.

Para que sexa continua os límites laterais deben coincidir e ser iguais ao valor da función.

En $x = -1$:

$f(-1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+2) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} k = k \end{array}\right\} \Rightarrow k = 1$$

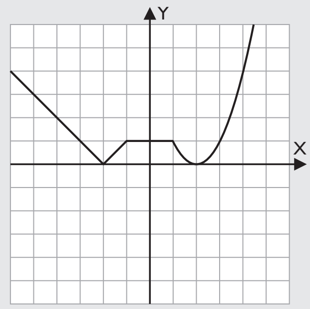
En $x = 1$:

$f(1) = 1$

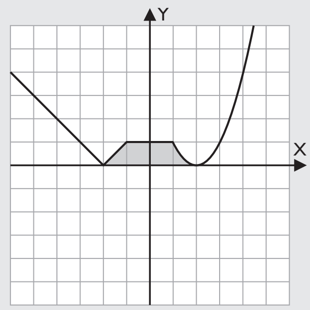
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} k = k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-2)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 1$$

Para $k = 1$ a función é continua.

b)



c)



$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 2$

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x & \text{se } x \le -2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x & \text{se } -2 < x \le -1 \\ x & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

$$A_1 = \left|\int_{-2}^{-1} (x + 2)\, dx\right| = |F(-1) - F(-2)| = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left|\int_{-1}^{1} dx\right| = |F(1) - F(-1)| = 2$$

$$A_3 = \left|\int_{1}^{2} (x - 2)^2\, dx\right| = |F(2) - F(1)| = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}\ u^2$$

3. a) Se f' é a derivada da función dada por:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + \frac{3}{x^4} \quad (x \neq 0), \text{ calcula } f'(-2).$$

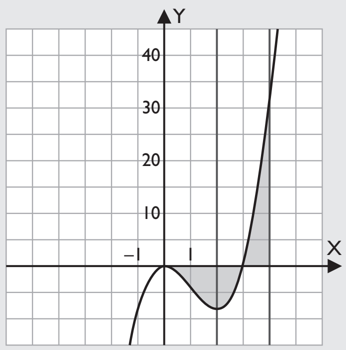
b) Debuxa a función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$. Obtén a área que limitan a curva e o eixe X entre x = 2 e x = 4.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 12x - \dfrac{12}{x^5}$

$f'(-2) = \dfrac{387}{8}$

b)



$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$

$$F(x) = \int (2x^3 - 6x^2)\, dx = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$$

$$F(2) = -8; F(3) = -\frac{27}{2}; F(4) = 0$$

$$A_1 = \left|\int_{2}^{3} (2x^3 - 6x^2)\, dx\right| = |F(3) - F(2)| = \frac{11}{2}$$

$$A_2 = \left|\int_{3}^{4} (2x^3 - 6x^2)\, dx\right| = |F(4) - F(3)| = \frac{27}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{11}{2} + \frac{27}{2} = 19\ u^2$$

4. O custo de fabricación en euros de **x** unidades dun artigo vén dado pola función:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$$

a) Cal é a función que determina o custo de fabricación unitario?

b) Para que produción resulta mínimo o custo unitario? Canto vale este? Xustifica que é mínimo.

Solución:

a) Custo de fabricación unitario.

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 20}{x} = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{20}{x}$$

$$c(x) = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{20}{x}$$

b) Mínimo custo unitario.

$$c'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{20}{x^2} \Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{20}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$x = 400$

$$c''(x) = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3} + \frac{40}{x^3} \Rightarrow c''(400) = 1/6\,400\,000 > 0 \Rightarrow$$

mínimo relativo.

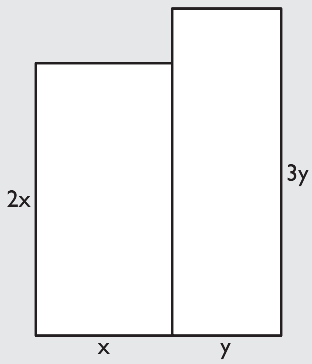
Para x = **400 unidades** é mínimo.

c(400) = **1/6 400 000 € cada unidade.**

5. Supoñamos que temos un arame de lonxitude **a** e querémolo dividir en dúas partes que van servir de base a cadanseu rectángulo. Nun dos rectángulos a súa altura é o dobre da súa base e no outro a súa altura é o triplo da súa base. Determina o punto polo cal debemos cortar o arame para que a suma das áreas dos dous rectángulos sexa mínima.

Solución:

a) Datos, incógnitas e debuxo:



b) Función que hai que maximizar:

$A(x, y) = x \cdot 2x + y \cdot 3y = 2x^2 + 3y^2$

Suxeita ás condicións: $x + y = a \Rightarrow y = a - x$

c) Escríbese a función cunha soa variable:

$A(x) = 2x^2 + 3(a - x)^2$

d) Calcúlanse máximos e mínimos:

$A'(x) = 4x - 6(a - x) = 10x - 6a$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 6a = 0 \Rightarrow x = 3a/5$

e) Compróbase na 2ª derivada:

$A''(x) = 10 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

Hai que cortala polos 3/5.

6. Un taller artesanal está especializado na produción de certo tipo de xoguetes. Os custos de fabricación, C(x), en euros están relacionados co número de xoguetes fabricados, **x**, a través da expresión:

$$C(x) = 10x^2 - 1\,850x + 25\,000$$

O prezo de venda de cada xoguete é de 50 €.

a) Formula a función de ingresos que obtén o taller coa venda dos xoguetes producidos.

b) Formula a función de beneficios, entendidos como diferenza entre ingresos e custos de fabricación.

c) Cantos xoguetes debe fabricar para maximizar beneficios? A canto ascenderán estes beneficios?

Solución:

a) Función ingresos:

$\mathbf{I(x) = 50x}$

b) Función beneficios:

$B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1\,850x + 25\,000)$

$\mathbf{B(x) = -10x^2 + 1\,900x - 25\,000}$

c) Maximizar os beneficios:

$B'(x) = -20x + 1900$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -20x + 1\,900 = 0 \Rightarrow$ **x = 95 xoguetes.**

$B''(x) = -20 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

$B(95) = -10 \cdot 95^2 + 1\,900 \cdot 95 - 25\,000 = 65\,250$ €

Os beneficios ascenden a 65 250 €.

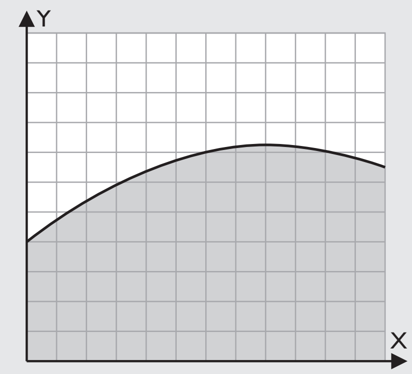
7. O consumo dun motor, nun traballo de 6 horas, vén dado pola expresión:

$C(t) = -t^2 + 8t + 20$, sendo **t** o tempo en horas, $0 \le t \le 6$

a) Que momento é o de maior consumo? Canto é o consumo máximo?

b) Canto consome en total o motor nas 6 horas que dura o traballo?

Solución:



a) Máximo consumo:

$C'(t) = -2t + 8$

$C'(x) = 0 \Rightarrow -2t + 8 = 0 \Rightarrow$ **t = 4 horas.**

$C''(t) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

$C(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 + 20 = 36$

b) Consumo total:

O consumo total é: $\int_0^6 (-t^2 + 8t + 20)\,dx$

$F(t) = \int (-t^2 + 8t + 20)\,dx = -\frac{t^3}{3} + 4t^2 + 20t$

$F(0) = 0$

$F(6) = 192$

Consumo total = 192

8. Estuda a continuidade da función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

e clasifica as descontinuidades que se atopen. É posible definir de novo a función para evitar algunha descontinuidade?

Solución:

Factorizando o numerador e o denominador obtense:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x-2)(x-3)}$$

É descontinua en x = 2, x = 3.

a) x = 2 é unha descontinuidade evitable; evítase definindo f(x) como a función simplificada.

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3}$$

b) x = 3 é unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.

9. O número de prazas ocupadas dun aparcadoiro, ao longo das 24 horas dun día, vén expresado pola seguinte función:

$$f(t) = \begin{cases} 1\,680 + 20t & \text{se } 0 \le t < 8 \\ -10t^2 + 260t + 400 & \text{se } 8 \le t < 16 \\ -10t^2 + 360t + 1\,200 & \text{se } 16 \le t < 24 \end{cases}$$

a) A que hora do día presenta o aparcadoiro unha ocupación máxima? Cantos coches hai a esa hora?

b) Entre que horas a ocupación do aparcadoiro é igual ou superior a 2 000 prazas?

Solución:

a) Máximo:

Hai que atopar o máximo absoluto; para isto, atópanse os máximos relativos en cada un dos intervalos e nos extremos dos intervalos.

O primeiro anaco é unha recta, que imos chamar:

$g(t) = 1\,680 + 20t \Rightarrow$ non ten máximos relativos.

g(0) = 1 680

g(8) = 1 840

O segundo anaco é parte dunha parábola; ímolo chamar:

$h(t) = -10t^2 + 260t + 400$

$h'(t) = -20t + 260, h'(t) = 0 \Rightarrow -20t + 260 = 0 \Rightarrow$

t = 13

h(13) = 2 090

$h''(t) = -20 < 0$ (–) $\Rightarrow$ máximo relativo.

h(8) = 1 840

h(16) = 2 000

O terceiro anaco é parte dunha parábola; ímolo chamar:

$i(t) = -10t^2 + 360t + 1\,200$

$i'(t) = -20t + 360, i'(t) = 0 \Rightarrow -20t + 360 = 0 \Rightarrow t = 18$

i(18) = 4 440

$i''(t) = -20 < 0$ (–) $\Rightarrow$ máximo relativo.

i(16) = 4 400

i(24) = 4 080

O máximo absoluto é para t = 18 horas e nese momento hai 4 440 coches.

b) Ocupación superior a 2 000 prazas:

Hai que resolver as inecuacións:

$1\,680 + 20t > 2\,000 \Rightarrow x > 16$, que non serve.

$-10t^2 + 260t + 400 > 2\,000 \Rightarrow 10 < t < 16$

$-10t^2 + 360t + 1\,200 > 2\,000 \Rightarrow 2{,}38 < t < 33{,}62$, só serve: 16 < t < 24

10. A función:

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$$

representa a concentración de osíxeno nun estanque contaminado por residuos orgánicos nun tempo **t** (medido en semanas).

a) Atopa os intervalos de crecemento e decrecemento de f(t) para $t \geq 0$, así como os instantes nos que a concentración é máxima e mínima.

b) De forma razoada, e conforme aos datos anteriores, representa graficamente a función para $t \geq 0$, estudando con todo detalle as súas asíntotas.

Solución:

a) Máximos, mínimos e crecemento:

$$f'(t) = \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2}$$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = -1; t = -1$ non serve.

f(1) = 1/2

$$f''(t) = \frac{-2t^3 + 6t}{(t^2 + 1)^3}$$

$f''(1) = 1/2 > 0$ (+) $\Rightarrow$ mínimo relativo.

f(0) = 1

O máximo alcánzao no instante inicial, t = 0, e o mínimo en t = 1.

f'(2) = 3/25

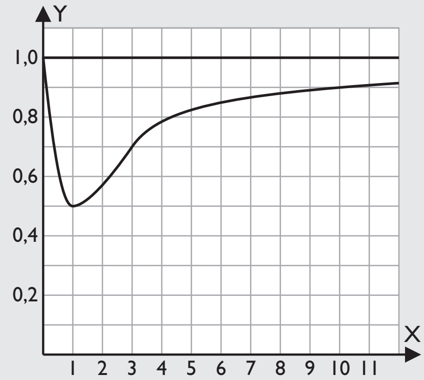
f'(x) – +

x 0 1

Crecente (↗): (1, +∞)

Decrecente: (↘): (0, 1)

b) Asíntotas e gráfica:



Verticais: non ten, porque o denominador nunca se anula.

Horizontais:

$k = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = 1$, é cociente dos coeficientes principais.

Asíntota horizontal: k = 1

Oblicuas: non ten, porque o grao do numerador non é un máis ca o do denominador.