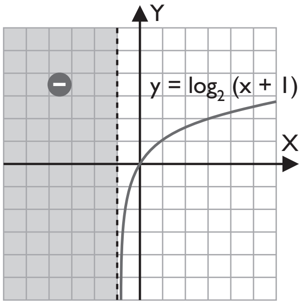
9

Análise de funcións e representación de curvas

1. Análise gráfica dunha función

Aplica a teoría

1. Dada a seguinte gráfica, analiza todas as súas características, é dicir, completa o formulario dos 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: Dom(f) = $(-1, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = -1$
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: O(0, 0)
   - Eixe Y: O(0, 0)

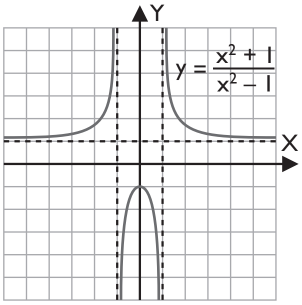
   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 0)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-1, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$
10. Percorrido ou imaxe:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2. Dada a seguinte gráfica, analiza todas as súas características, é dicir, completa o formulario dos 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontais: $y = 1$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: non o corta.
   - Eixe Y: A(0, –1)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, –1)
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   - Decrecente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-1, 1)$
10. Percorrido ou imaxe:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

2. Análise de funcións polinómicas

Pensa e calcula

Atopa os puntos de corte co eixe X da función $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$ e estuda a súa multiplicidade.

Solución:

$$2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow (8 - x^2)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ dobre.} \\ x = 2\sqrt{2} \text{ simple.} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ simple.} \end{cases}$$

Aplica a teoría

Analiza e representa as seguintes funcións completando o formulario dos 10 apartados:

3. $y = x^3 - 4x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 4$

$y'' = 6x$

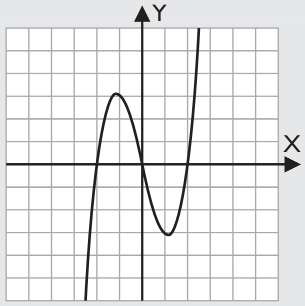
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe $O(0, 0)$.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
   - Eixe Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
   - Mínimo relativo: $B(2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Percorrido ou imaxe:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

4. $y = 3x - x^3$

Solución:

$y' = 3 - 3x^2$

$y'' = -6x$

$y''' = -6$

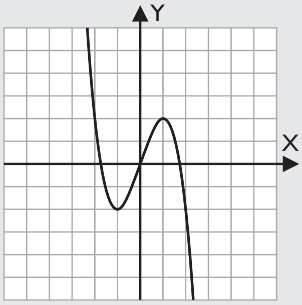
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe $O(0, 0)$.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-\sqrt{3}, 0), O(0, 0), B(\sqrt{3}, 0)$
   - Eixe Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(1, 2)$
   - Mínimo relativo: $B(-1, -2)$

Monotonía:
- Crecente (↗): $(-1, 1)$
- Decrecente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

5. $y = x^3$

Solución:

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$

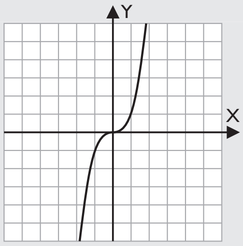
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe $O(0, 0)$.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $O(0, 0)$
   - Eixe Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $\varnothing$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. $y = 4x^2 - x^4$

Solución:

$y' = 8x - 4x^3$

$y'' = 8 - 12x^2$

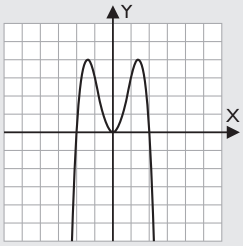
$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eixe Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(-\sqrt{2}, 4)$, $D(\sqrt{2}, 4)$
   - Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
   - Decrecente (↘): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $E(-\sqrt{6}/3, 20/9)$, $F(\sqrt{6}/3, 20/9)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $Im(f) = (-\infty, 4]$

7. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$y' = 4x^3 - 6x^2$

$y'' = 12x^2 - 12x$

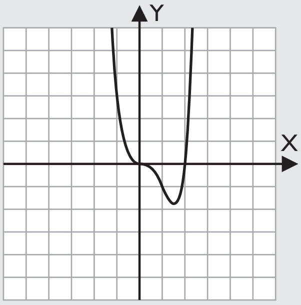
$y''' = 24x - 12$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica nin respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: O(0, 0), A(2, 0)
   - Eixe Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): (0, 2)
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: B(3/2, –27/16)

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(3/2, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: C(0, 0), D(1, –1)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): (0, 1)



10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = $[-27/16, +\infty)$

8. $y = \frac{x^3}{3} - 4x$

Solución:

$y' = x^2 - 4$

$y'' = 2x$

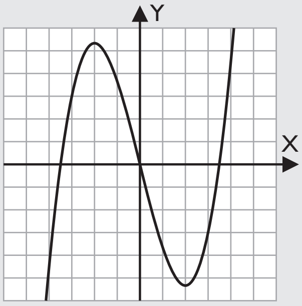
$y''' = 2$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-2\sqrt{3}, 0)$, O(0, 0), $B(2\sqrt{3}, 0)$
   - Eixe Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(–2, 16/3)
   - Mínimo relativo: B(2, –16/3)

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decrecente (↘): (–2, 2)
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Análise de funcións racionais

Pensa e calcula

Atopa mentalmente as raíces do denominador da función: $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Aplica a teoría

9. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

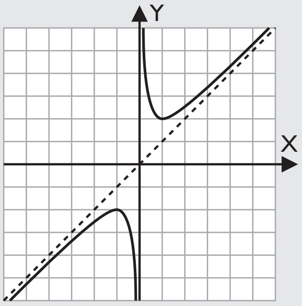
$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = 0$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = 0$
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: non o corta.
   - Eixe Y: non o corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(–1, –2)
   - Mínimo relativo: B(1, 2)

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Percorrido ou imaxe:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

10. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = 0$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = 0$
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: A(–1, 0), B(1, 0)
   - Eixe Y: non o corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

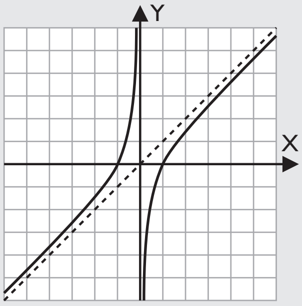
Monotonía:

- Crecente (↗): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Decrecente (↘): $\varnothing$

9. Puntos de inflexión: non ten.

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:

$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = -1$, $x = 1$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontais: $y = 0$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: non o corta.
   - Eixe Y: $A(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -1)$
   - Mínimo relativo: non ten.

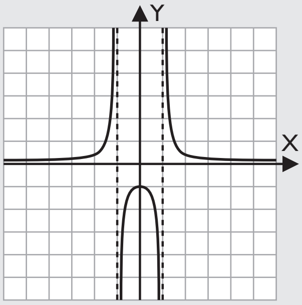
Monotonía:

- Crecente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decrecente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: non ten.

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Percorrido ou imaxe:

$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

12. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

Solución:

$$y' = -\frac{x - 2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2x - 6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{6x - 24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = 0$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica respecto do eixe Y, nin respecto da orixe $O(0, 0)$.
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = 0$
   - Horizontais: $y = 0$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(1, 0)$
   - Eixe Y: non o corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(2, 1/4)$
   - Mínimo relativo: non ten.

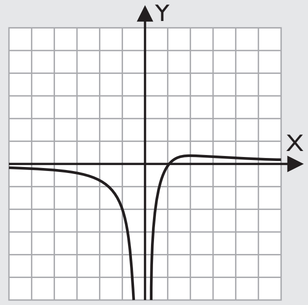
Monotonía:

- Crecente (↗): $(0, 2)$
- Decrecente (↘): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $B(3, 2/9)$

   Curvatura:

   - Convexa (∪): $(3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4]$

13. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{18x^4 - 108x^2 + 18x}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en toda a recta real $\mathbb{R}$.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe $O(0, 0)$.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: $y = 0$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $O(0, 0)$
   - Eixe Y: $O(0, 0)$

   Signo:

   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(1, 3/2)$
   - Mínimo relativo: $B(-1, -3/2)$

Monotonía:

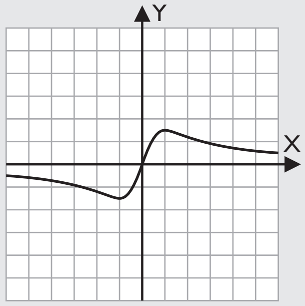
- Crecente (↗): $(-1, 1)$
- Decrecente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:

   $O(0, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4)$, $D(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$

   Curvatura:

   - Convexa (∪): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$



10. Percorrido ou imaxe:

    $\text{Im}(f) = [-3/2, 3/2]$

14. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = -2$, $x = 2$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = -2$, $x = 2$
   - Horizontais: $y = 1$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
   - Eixe Y: $C(0, 1/4)$

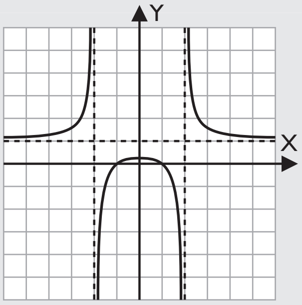
   Signo:

   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, -1) \cup (1, 2)$

8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(0, 1/4)
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
   - Decrecente (↘): $(0, 2) \cup (2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-2, 2)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1/4] \cup (1, +\infty)$

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Dada a función:

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$$

Atopa o dominio de definición e os puntos de corte cos eixes.

☐ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, $A(3, 0)$, $B(0, -3)$
☒ $Dom(f) = \mathbb{R}$, $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(-3, 0)$
☐ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $A(1, 0)$, $B(0, -1)$
☐ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $A(-3, 0)$

2 Na función do exercicio 1, atopa os valores de x para os cales alcanza un máximo ou un mínimo relativo.

☒ $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{13}}{2}$
☐ $x_1 = -2, x_2 = 3$
☐ $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 5$
☐ $x = -1$

3 Na función do exercicio 1, atopa os puntos de inflexión.

☐ $C(1, 0)$
☐ $C(2, 3), D(-2, -3)$
☐ $C(3, 2), D(-3, -2)$
☒ $C(-2/3, -70/27)$

4 Na construción dun túnel, a porcentaxe de rocha fragmentada ou de mala calidade vén dada polo modelo matemático que aparece a continuación. R(x) representa esta porcentaxe cando a distancia á boca do túnel é x (en quilómetros). Se nalgún tramo da perforación a porcentaxe supera o 40%, deberanse reforzar as medidas de sostemento e seguridade da estrutura.

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4{,}5x^2 + 18x + 15; 0 \le x \le 7$$

Indica en que tramos da perforación a porcentaxe crece e en cales decrece.

☒ $(\nearrow): (0, 3) \cup (6, 7); (\searrow): (3, 6)$
☐ $(\nearrow): (0, 2) \cup (5, 7); (\searrow): (2, 5)$
☐ $(\nearrow): (3, 6); (\searrow): (0, 3) \cup (6, 7)$
☐ $(\nearrow): (4, 6); (\searrow): (0, 4) \cup (6, 7)$

5 Na función do exercicio 4, será necesario reforzar as medidas mencionadas?

☐ Si, no intervalo [2, 4].
☐ Si, no intervalo [6, 7].
☐ Si, nos intervalos [3, 4] e [6, 7].
☒ Non, porque en [0, 7] nunca supera o 40%.

6 Os beneficios (en millóns de euros) xerados polo funcionamento dunha industria veñen dados en función do tempo (en anos) por:

$$b(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Cando son os beneficios dun millón de euros?

☒ No ano 1.
☐ No ano 5.
☐ No ano 7.
☐ No ano 23.

7 Na función do exercicio 6, cando son os beneficios máximos?

☐ No ano 5.
☐ No ano 23.
☒ No ano 1.
☐ No ano 7.

8 Sexa a función do exercicio 6. Que ocorre cando pasan moitos anos?

☒ Os beneficios tenden a cero.
☐ Os beneficios tenden a 2 millóns de euros.
☐ Os beneficios tenden a 7,2 millóns de euros.
☐ Os beneficios tenden a 10 millóns de euros.

9 Dada a función:

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 4x + 5}$$

Atopa o dominio e as asíntotas.

☐ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$. Asíntota: $x = 0$
☐ $Dom(f) = \mathbb{R}$. Asíntota: $x = 1, x = 5$
☐ $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Asíntota: $y = 2$
☒ $Dom(f) = \mathbb{R}$. Asíntota: $y = 0$

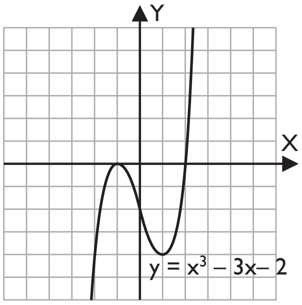
10 Na función do exercicio 9, atopa os máximos e mínimos relativos.

☐ A(0,0) mínimo relativo.
☐ A(5, 7) máximo relativo.
☒ A(2, 5) máximo relativo.
☐ A(1, 2) mínimo relativo.

Exercicios e problemas

1. Análise gráfica dunha función

15. Dada a seguinte gráfica, analiza todas as súas características, é dicir, completa o formulario dos 10 apartados:



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eixe Y: $C(0, -2)$

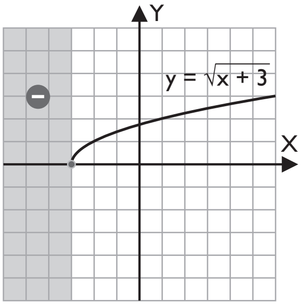
   Signo:
   - Positiva (+): $(2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-1, 0)$
   - Mínimo relativo: $D(1, -4)$

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(-1, 1)$
9. Punto de inflexión: $C(0, -2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$
10. Percorrido ou imaxe:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

16. Dada a seguinte gráfica, analiza todas as súas características, é dicir, completa o formulario dos 10 apartados:



Solución:

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [-3, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio; en $x = -3$ ten unha descontinuidade de 2ª especie.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-3, 0)$
   - Eixe Y: $C(0, \sqrt{3})$

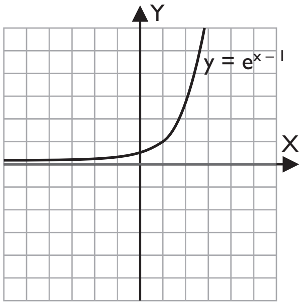
   Signo:
   - Positiva (+): $(-3, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-3, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\varnothing$
   - Cóncava (∩): $(-3, +\infty)$
10. Percorrido ou imaxe:

    $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

17. Dada a seguinte gráfica, analiza todas as súas características, é dicir, completa o formulario dos 10 apartados:



Solución:

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: $y = 0$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: non o corta.
   - Eixe Y: A(e^{-1}, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): O
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$
10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = $(0, +\infty)$

2. Análise de funcións polinómicas

Analiza e representa as seguintes funcións completando o formulario dos 10 apartados:

18. $y = 4x - x^3$

Solución:

$y' = 4 - 3x^2$

$y'' = -6x$

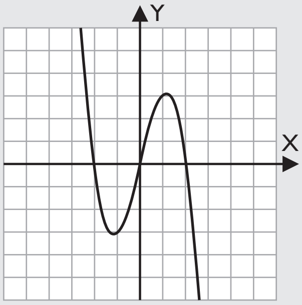
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: A(–2, 0), O(0, 0), B(2, 0)
   - Eixe Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A($2\sqrt{3}/3$, $16\sqrt{3}/9$)
   - Mínimo relativo: B($-2\sqrt{3}/3$, $-16\sqrt{3}/9$)

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
   - Decrecente (↘): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

19. $y = -x^3 - 3x^2$

Solución:

$y' = -3x^2 - 6x$

$y'' = -6x - 6$

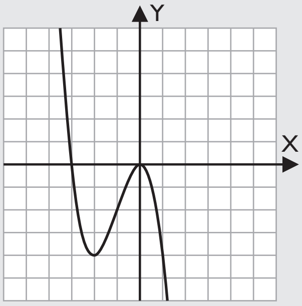
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica nin respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: A(–3, 0), O(0, 0)
   - Eixe Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -3)$
   - Negativa (–): $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: O(0, 0)
   - Mínimo relativo: B(–2, –4)

   Monotonía:
   - Crecente (↗): (–2, 0)
   - Decrecente (↘): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Punto de inflexión: C(–1, –2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

20. $y = x^3 + x$

Solución:

$y' = 3x^2 + 1$

$y'' = 6x$

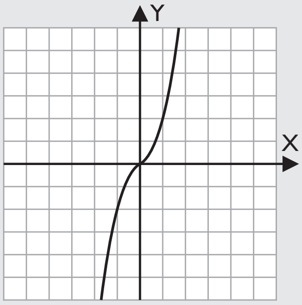
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: O(0, 0)
   - Eixe Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decrecente (↘): ∅
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

21. $y = x^4 - 4x^2$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

$y''' = 24x$

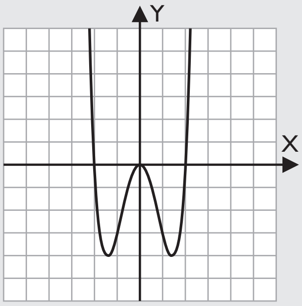
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eixe Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $C(-\sqrt{2}, -4)$, $D(\sqrt{2}, -4)$

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
9. Puntos de inflexión:

   $E(-\sqrt{6}/3, -20/9)$, $F(\sqrt{6}/3, -20/9)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty)$

22. $y = 2x^3 - x^4$

Solución:

$y' = 6x^2 - 4x^3$

$y'' = 12x - 12x^2$

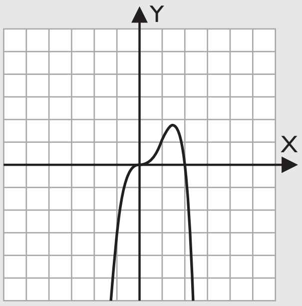
$y''' = 12 - 24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica nin respecto do eixe Y, nin respecto da orixe $O(0, 0)$.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
   - Eixe Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, 2)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $B(3/2, 27/16)$
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, 3/2)$
   - Decrecente (↘): $(3/2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C(0, 0)$, $D(1, 1)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 27/16]$

23. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

Solución:

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$y'' = 6x - 18$

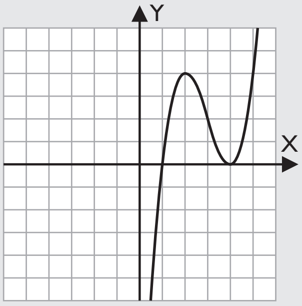
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en todo o dominio.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica nin respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: A(1, 0), B(4, 0)
   - Eixe Y: O(0, –16)

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, 4) \cup (4, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(2, 4)
   - Mínimo relativo: D(4, 0)

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(2, 4)$
9. Punto de inflexión: O(3, 2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 3)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Análise de funcións racionais

Analiza e representa as seguintes funcións completando o formulario dos 10 apartados:

24. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

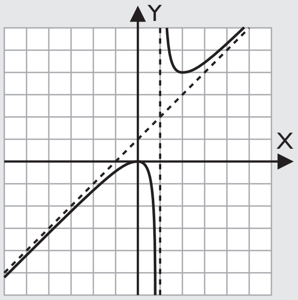
$y''' = -\dfrac{6}{(x-1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en x = 1, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica nin respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: x = 1
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: y = x + 1
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: O(0, 0)
   - Eixe Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: O(0, 0)
   - Mínimo relativo: A(2, 4)

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



10. Percorrido ou imaxe:

    $Im(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

25. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{8}{x^3}$

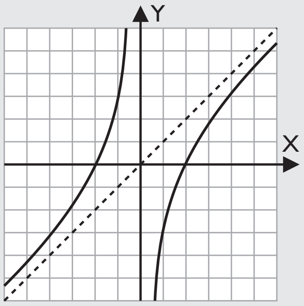
$y''' = \dfrac{24}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = 0$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = 0$
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: A(–2, 0), B(2, 0)
   - Eixe Y: non o corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

26. $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{6x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3}$

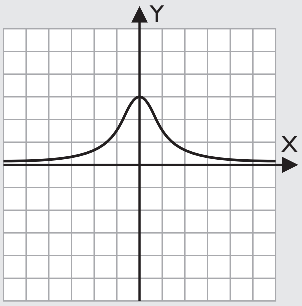
$y''' = -\dfrac{72x^3 - 72x}{(x^2 + 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade: é continua en toda a recta real $\mathbb{R}$.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
6. Asíntotas:
   - Verticais: non ten.
   - Horizontais: $y = 0$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: non o corta.
   - Eixe Y: A(0, 3)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, 3)
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decrecente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: B$(-\sqrt{3}/3, 9/4)$, C$(\sqrt{3}/3, 9/4)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$



10. Percorrido ou imaxe:

    Im(f) = (0, 3]

27. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

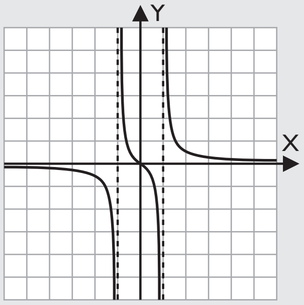
$y''' = -\frac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
   Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = -1$, $x = 1$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontais: $y = 0$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: O(0, 0)
   - Eixe Y: non o corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: non ten.

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $\varnothing$
   - Decrecente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Percorrido ou imaxe:
    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

28. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

Solución:

$y' = \frac{x^3 - 2}{x^3}$

$y'' = \frac{6}{x^4}$

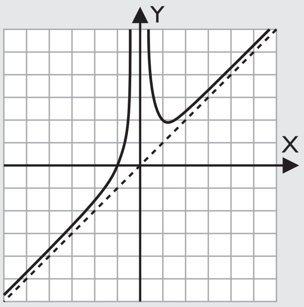
$y''' = -\frac{24}{x^5}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = 0$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: non é simétrica respecto do eixe Y, nin respecto da orixe O(0, 0).
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = 0$
   - Horizontais: non ten.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: A(–1, 0)
   - Eixe Y: non o corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1)$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: B$(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(0, \sqrt[3]{2})$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Percorrido ou imaxe:
    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

29. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = -\dfrac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

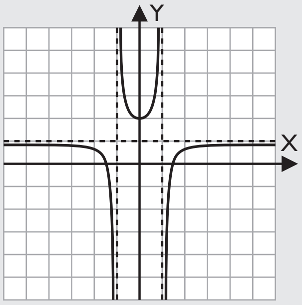
$y''' = \dfrac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidade: é descontinua en $x = -1$, $x = 1$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade: non é periódica.
5. Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
6. Asíntotas:
   - Verticais: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontais: $y = 1$
   - Oblicuas: non ten.
7. Corte cos eixes:
   - Eixe X: $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$
   - Eixe Y: $C(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
8. Máximos e mínimos relativos:
   - Máximo relativo: non ten.
   - Mínimo relativo: $C(0, 2)$

   Monotonía:
   - Crecente (↗): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
   - Decrecente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
9. Puntos de inflexión: non ten.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Percorrido ou imaxe:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

Para ampliar

30. Dada a función: $y = x^3 + 2x$

a) Atopa os puntos de inflexión.

b) Esboza a gráfica.

Solución:

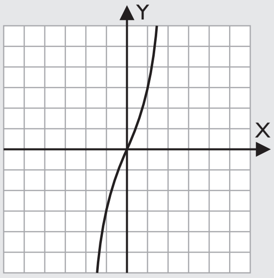
$y' = 3x^2 + 2$

$y'' = 6x$

$y''' = 6 \neq 0$

a) $A(0, 0)$

b) Gráfica:



31. Dada a función: $y = x^4$

a) Atopa e clasifica os puntos singulares.

b) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3$

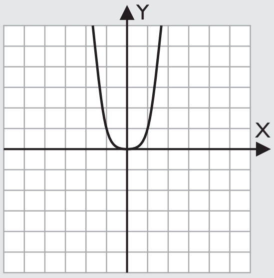
$y'' = 12x^2$

$y''' = 24x$

$y^{IV} = 24 > 0$ (+)

a) $A(0, 0)$ mínimo relativo.

b) Gráfica:



32. Dada a función: $y = \dfrac{1}{x^2}$

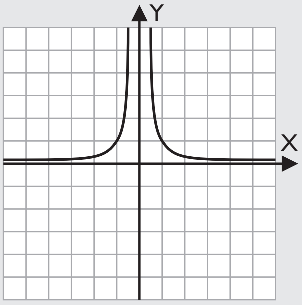
a) Calcula o dominio.
b) Determina as asíntotas.
c) Esboza a gráfica.

Solución:

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:
- Verticais: $x = 0$
- Horizontais: $y = 0$

c) Gráfica:



33. Dada a función: $y = x^4 - 6x^2 + 5$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.
b) Atopa os puntos de inflexión.
c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 12x$

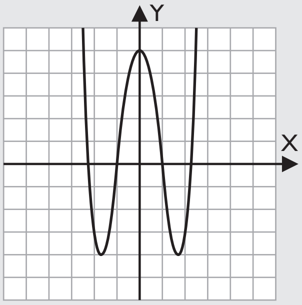
$y'' = 12x^2 - 12$

$y''' = 24x$

a) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(0, 5)
- Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -4)$; $C(\sqrt{3}, -4)$

b) Puntos de inflexión: D(–1, 0); E(1, 0)

c) Gráfica:



34. Sexa a función: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

a) Determina os máximos e mínimos relativos.
b) Atopa os puntos de inflexión.
c) Cos datos obtidos fai un esbozo da función.

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x$

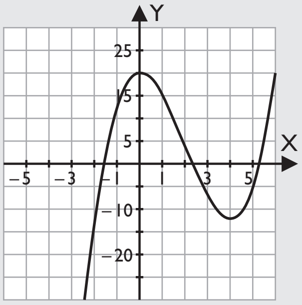
$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

a) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(0, 20)
- Mínimo relativo: B(4, –12)

b) Punto de inflexión: C(2, 4)

c) Gráfica:



35. Dada a función: $y = x^4 - 2x^2$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.
b) Atopa os puntos de inflexión.
c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 4x$

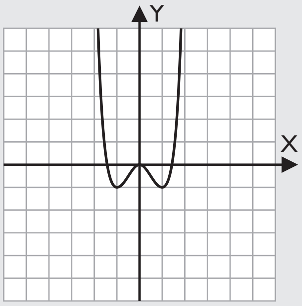
$y'' = 12x^2 - 4$

$y''' = 24x$

a) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: O(0, 0)
- Mínimo relativo: A(–1, –1); B(1, –1)

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, -5/9)$; $D(\sqrt{3}/3, -5/9)$

c) Gráfica:



36. Dada a función: $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

a) Calcula o dominio.
b) Determina as asíntotas.
c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = -\frac{2}{x^3}$

$y'' = \frac{6}{x^4}$

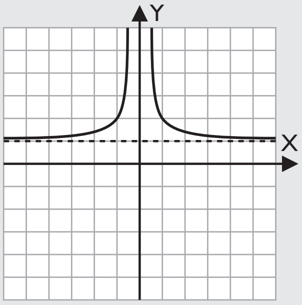
$y''' = -\frac{24}{x^5}$

a) Dom (f) = R – {0} = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticais: $x = 0$
- Horizontais: $y = 1$

c) Gráfica:



37. Dada a función: $y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.

b) Atopa os puntos de inflexión.

c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

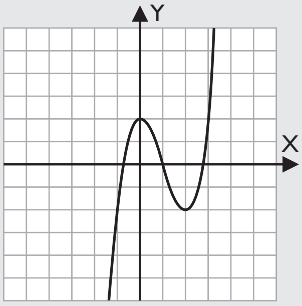
$y''' = 6$

a) Máximos e mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(0, 2)
- Mínimo relativo: B(2, –2)

b) Punto de inflexión: C(1, 0)

c) Gráfica:



38. Dada a función: $y = 6x^2 - 3x^4$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.

b) Atopa os puntos de inflexión.

c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 12x - 12x^3$

$y'' = 12 - 36x^2$

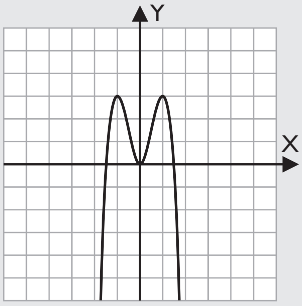
$y''' = -72x$

a) Máximos e mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–1, 3); B(1, 3)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/3)$; $D(\sqrt{3}/3, 5/3)$

c) Gráfica:



Problemas

39. Dada a función: $y = x^3 + 3x^2$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.

b) Atopa os puntos de inflexión.

c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x$

$y'' = 6x + 6$

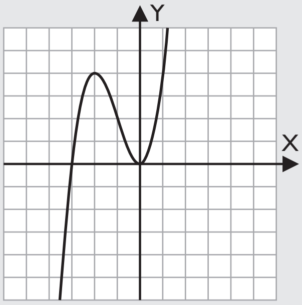
$y''' = 6$

a) Máximos e mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–2, 4)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Punto de inflexión: C(–1, 2)

c) Gráfica:



40. Dada a función: $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcula o dominio.

b) Determina as asíntotas.

c) Atopa os máximos e mínimos relativos.

d) Determina os puntos de inflexión.

e) Esboza a gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$y''' = -\frac{12x+12}{(x-1)^5}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:

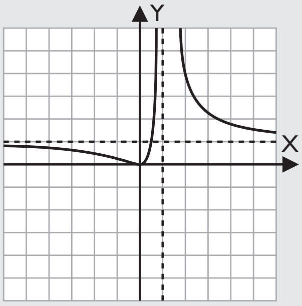
- Verticais: $x = 1$
- Horizontais: $y = 1$

c) Máximos e mínimos relativos:

- Máximo relativo: non ten.
- Mínimo relativo: O(0, 0)

d) Punto de inflexión: A(–1/2, 1/9)

e) Gráfica:



41. Sexa **f:** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a función definida por:

$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

a) Determina os puntos de corte cos eixes.

b) Atopa os máximos e mínimos relativos.

c) Calcula os puntos de inflexión.

d) Esboza a gráfica da función.

Solución:

$y' = -6x^2 - 18x - 12$

$y'' = -12x - 18$

$y''' = -12$

a) Puntos de corte cos eixes:

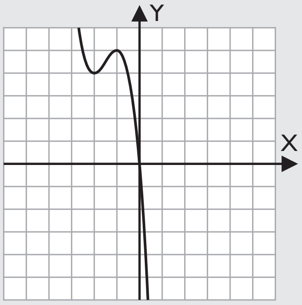
- Eixe X: O(0, 0)
- Eixe Y: O(0, 0)

b) Máximos e mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–1, 5)
- Mínimo relativo: B(–2, 4)

c) Punto de inflexión: C(–3/2, 9/2)

d) Gráfica:



42. Dada a seguinte función, definida nos números reais salvo en x = 0:

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

a) Determina o dominio.

b) Atopa as asíntotas.

c) Calcula as coordenadas dos seus máximos e mínimos relativos.

d) Esboza a gráfica da función.

Solución:

$$y' = \frac{2}{x^2} - 1$$

$$y'' = -\frac{4}{x^3}$$

$$y''' = \frac{12}{x^4}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

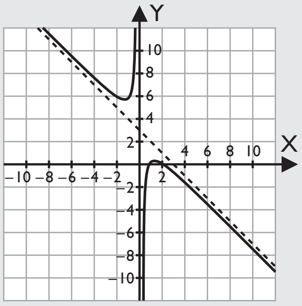
b) Asíntotas:

- Verticais: $x = 0$
- Oblicuas: $y = 3 - x$

c) Máximos e mínimos relativos:

- Máximo relativo: A($\sqrt{2}$, 3 – 2$\sqrt{2}$)
- Mínimo relativo: B(–$\sqrt{2}$, 3 + 2$\sqrt{2}$)

d) Gráfica:



43. Sexa a función: $V(t) = 60\left(\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t\right)$

a) Calcula os máximos e mínimos relativos.

b) Determina os puntos de inflexión.

c) Esboza a gráfica da función.

Solución:

$v'(t) = 60(t^2 - 10t + 16)$

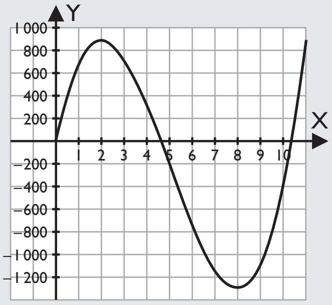
$v''(t) = 60(2t - 10)$

$v'''(t) = 120$

a) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(2, 880)
- Mínimo relativo: B(8, –1 280)

b) Punto de inflexión: C(5, –200)

c) Gráfica:



44. Dada a función: $y = 2x^2 - x^4$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.

b) Atopa os puntos de inflexión.

c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 4x - 4x^3$

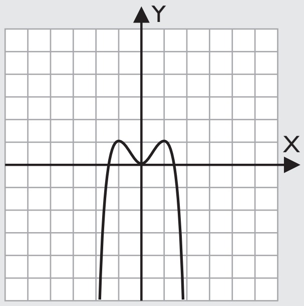
$y'' = 4 - 12x^2$

$y''' = -24x$

a) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(–1, 1), B(1, 1)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/9)$, $D(\sqrt{3}/3, 5/9)$

c) Gráfica:



45. Sexa **f** a función definida para $x \neq -2$ por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$$

a) Atopa as asíntotas da gráfica de **f**.

b) Calcula os extremos locais de **f**.

c) Determina os puntos de inflexión.

d) Tendo en conta os resultados dos apartados anteriores, fai un esbozo da gráfica.

Solución:

$y' = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$

$y'' = \frac{8}{(x + 2)^3}$

$y''' = -\frac{24}{(x + 2)^4}$

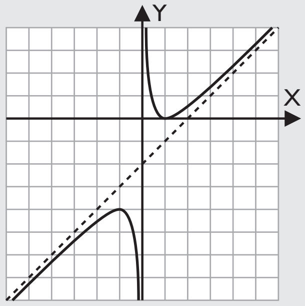
Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

a) Asíntotas:
- Verticais: x = –2
- Oblicuas: y = x – 2

b) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(–4, –8)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) $y'' \neq 0$. Non hai puntos de inflexión.

d) Gráfica:



46. Atopa e clasifica os puntos singulares da función:

$$y = x^4 + x^2$$

Esboza a gráfica.

Solución:

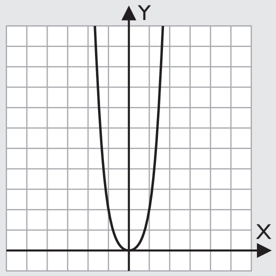
$y' = 4x^3 + 2x$

$y'' = 12x^2 + 2$

$y''' = 24x$

a) Punto singular: A(0, 0) é un mínimo relativo.

b) Gráfica:



47. Dada a curva: $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) Determina o dominio de definición.
b) Atopa as simetrías.
c) Atopa os puntos de corte cos eixes.
d) Calcula as asíntotas.
e) Atopa os máximos e mínimos relativos.
f) Fai unha representación aproximada.

Solución:

$y' = -\dfrac{14x}{(x^2 - 4)^2}$

$y'' = \dfrac{42x^2 + 56}{(x^2 - 4)^3}$

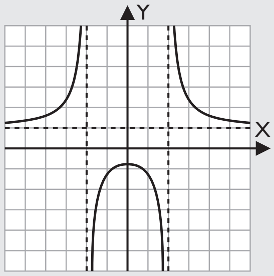
$y''' = -\dfrac{168x^3 + 672x}{(x^2 - 4)^4}$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (-2, +\infty)$
b) Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
c) Corte cos eixes:
- Eixe X: non o corta.
- Eixe Y: $A(0, -3/4)$

d) Asíntotas:
- Verticais: $x = -2, x = 2$
- Horizontais: $y = 1$

e) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: $A(0, -3/4)$
- Mínimo relativo: non ten.

f) Gráfica:



48. Dada a función: $y = x^4 + 4x$

a) Atopa e clasifica os puntos singulares.
b) Calcula os puntos de inflexión.
c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 + 4$

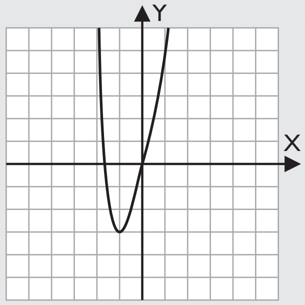
$y'' = 12x^2$

$y''' = 24x$

a) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: non ten.
- Mínimo relativo: $A(-1, -3)$

b) Puntos de inflexión: non ten.

c) Gráfica:



49. Dada a función: $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

a) Calcula o dominio.
b) Atopa as simetrías.
c) Determina as asíntotas.
d) Atopa os puntos de corte cos eixes.
e) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x^3}$

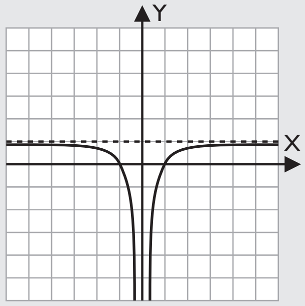
$y'' = -\dfrac{6}{x^4}$

$y''' = \dfrac{24}{x^5}$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
b) Simetrías: é simétrica respecto do eixe Y.
c) Asíntotas:
- Verticais: $x = 0$
- Horizontais: $y = 1$

d) Corte cos eixes:
- Eixe X: $A(-1, 0)$; $B(1, 0)$
- Eixe Y: non o corta.

e) Gráfica:



50. Dada a función: $y = \dfrac{x(x + 2)}{x^2 - 1}$

a) Calcula o dominio.
b) Determina as asíntotas.
c) Atopa os puntos de corte cos eixes.
d) Esboza a gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 + 6x^2 + 12x + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

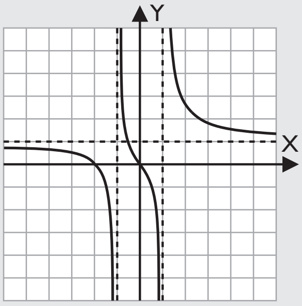
$$y''' = -\frac{12x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 24x + 12}{(x^2 - 1)^4}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:
- Verticais: $x = -1, x = 1$
- Horizontais: $y = 1$

c) Corte cos eixes:
- Eixe X: A(–2, 0); O(0, 0)
- Eixe Y: O(0, 0)

d) Gráfica:



51. Dada a función: $y = 3x^5 - 5x^3$
   a) Determina as simetrías.
   b) Calcula os puntos de corte cos eixes.
   c) Atopa os máximos e mínimos relativos.
   d) Atopa os puntos de inflexión.
   e) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 15x^4 - 15x^2$

$y'' = 60x^3 - 30x$

$y''' = 180x^2 - 30$

a) Simetrías: é simétrica respecto da orixe O(0, 0).

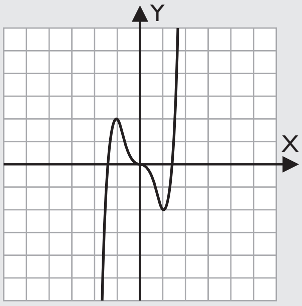
b) Corte cos eixes:
- Eixe X: A($-\sqrt{15}/3$, 0); O(0, 0); B($\sqrt{15}/3$, 0)
- Eixe Y: O(0, 0)

c) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(–1, 2)
- Mínimo relativo: B(1, –2)

d) Puntos de inflexión:

C($-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8$); O(0, 0); D($\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8$)

e) Gráfica:



Para profundar

52. Dada a función: $y = x^3 + 3x$
   a) Atopa os puntos de corte cos eixes.
   b) Calcula os máximos e mínimos relativos.
   c) Determina os puntos de inflexión.
   d) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 + 3$

$y'' = 6x$

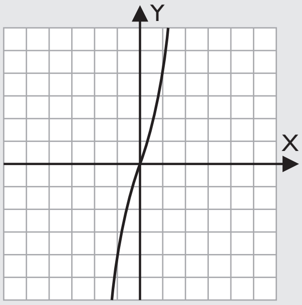
$y''' = 6$

a) Corte cos eixes:
- Eixe X: O(0, 0)
- Eixe Y: O(0, 0)

b) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: non ten.
- Mínimo relativo: non ten.

c) Punto de inflexión: O(0, 0)

d) Gráfica:



53. Dada a función: $y = x^4 + 2x^2$
   a) Atopa os puntos de corte cos eixes.
   b) Calcula os máximos e mínimos relativos.
   c) Determina os puntos de inflexión.
   d) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

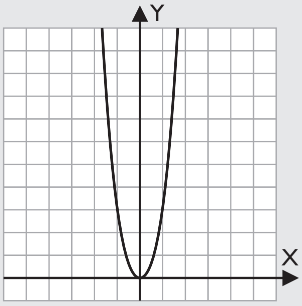
$y^{IV} = 24$

a) Corte cos eixes:
  - Eixe X: O(0, 0)
  - Eixe Y: O(0, 0)

b) Máximos e mínimos relativos:
  - Máximo relativo: non ten.
  - Mínimo relativo: O(0, 0)

c) Puntos de inflexión: non ten.

d) Gráfica:



54. Dada a función: $y = \dfrac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

a) Calcula o dominio.

b) Determina as asíntotas.

c) Calcula os puntos de corte cos eixes.

d) Atopa os máximos e mínimos relativos.

e) Determina os puntos de inflexión.

f) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = -\dfrac{4x - 2}{(x - 2)^3}$

$y'' = \dfrac{8x + 2}{(x - 2)^4}$

$y''' = -\dfrac{24x + 24}{(x - 2)^5}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

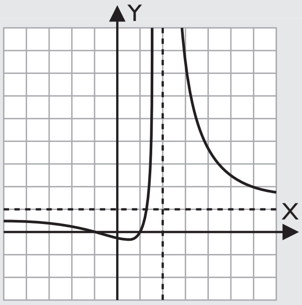
b) Asíntotas:
  - Verticais: x = 2
  - Horizontais: y = 1

c) Corte cos eixes:
  - Eixe X: A(– 1, 0); B(1, 0)
  - Eixe Y: C(0, – 1/4)

d) Máximos e mínimos relativos:
  - Máximo relativo: non ten.
  - Mínimo relativo: D(1/2, – 1/3)

e) Punto de inflexión: O(– 1/4, –5/27)

f) Gráfica:



55. Considérase a seguinte función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$$

a) Calcula os máximos e mínimos relativos.

b) Determina os intervalos de concavidade e convexidade.

c) Represéntaa graficamente.

Solución:

$y' = 6x^2 - 42x + 60$

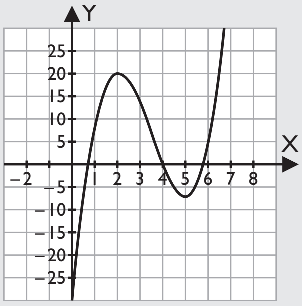
$y'' = 12x - 42$

$y''' = 12$

a) Máximos e mínimos relativos:
  - Máximo relativo: A(2, 20)
  - Mínimo relativo: B(5, –7)

b) Punto de inflexión: C(7/2, 13/2)

c) Gráfica:



56. Dada a función: $y = 3x^2 - x^3$

a) Calcula os puntos de corte cos eixes.

b) Atopa os máximos e mínimos relativos.

c) Atopa os puntos de inflexión.

d) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 6x - 3x^2$

$y'' = 6 - 6x$

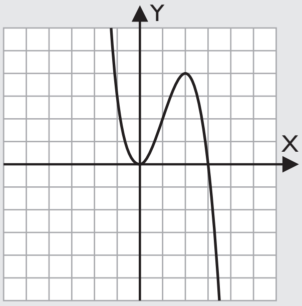
$y''' = -6$

a) Corte cos eixes:
  - Eixe X: O(0, 0); A(3, 0)
  - Eixe Y: O(0, 0)

b) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: $B(2, 4)$
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

c) Punto de inflexión: $C(1, 2)$

d) Gráfica:



57. Dada a función: $y = e^x - e^{-x}$

a) Determina as simetrías.

b) Calcula os puntos de corte cos eixes.

c) Atopa os máximos e mínimos relativos.

d) Atopa os puntos de inflexión.

e) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = e^x + e^{-x}$

$y'' = e^x - e^{-x}$

$y''' = e^x + e^{-x}$

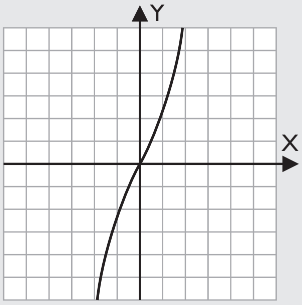
a) Simetrías: é simétrica respecto da orixe $O(0, 0)$.

b) Corte cos eixes:
- Eixe X: $O(0, 0)$
- Eixe Y: $O(0, 0)$

c) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: non ten.
- Mínimo relativo: non ten.

d) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

e) Gráfica:



58. Dada a función: $y = 5x^3 - 3x^5$

a) Determina as simetrías.

b) Calcula os puntos de corte cos eixes.

c) Atopa os máximos e mínimos relativos.

d) Atopa os puntos de inflexión.

e) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 15x^2 - 15x^4$

$y'' = 30x - 60x^3$

$y''' = 30 - 180x^2$

a) Simetrías: é simétrica respecto da orixe $O(0, 0)$.

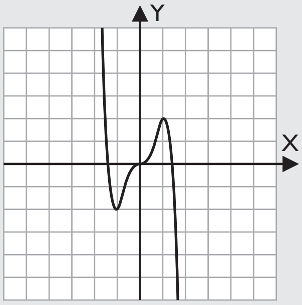
b) Corte cos eixes:
- Eixe X: $A(-\sqrt{15}/3, 0)$; $O(0, 0)$; $B(\sqrt{15}/3, 0)$
- Eixe Y: $O(0, 0)$

c) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: $A(1, 2)$
- Mínimo relativo: $B(-1, -2)$

d) Puntos de inflexión:

$C(-\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$; $O(0, 0)$; $D(\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8)$

e) Gráfica:



59. Dada a función: $y = x^4 - 4x$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.

b) Atopa os puntos de inflexión.

c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 4$

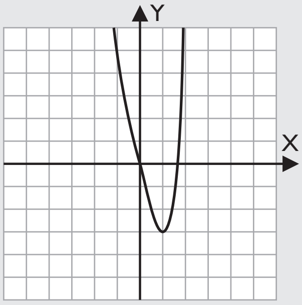
$y'' = 12x^2$

$y''' = 24x$

a) Máximos e mínimos relativos:
- Máximo relativo: non ten.
- Mínimo relativo: $A(1, -3)$

b) Puntos de inflexión: non ten.

c) Gráfica:



60. Dada a función: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

a) Atopa os máximos e mínimos relativos.

b) Atopa os puntos de inflexión.

c) Esboza a gráfica.

Solución:

$y' = 6x^2 - 18x + 12$

$y'' = 12x - 18$

$y''' = 12$

a) Corte cos eixes:

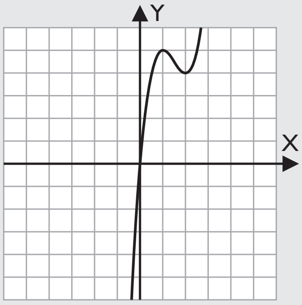
- Eixe X: O(0, 0)
- Eixe Y: O(0, 0)

b) Máximos e mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(1, 5)
- Mínimo relativo: B(2, 4)

c) Punto de inflexión: C(3/2, 9/2)

d) Gráfica:



Paso a paso

61. Representa e analiza a función:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

62. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

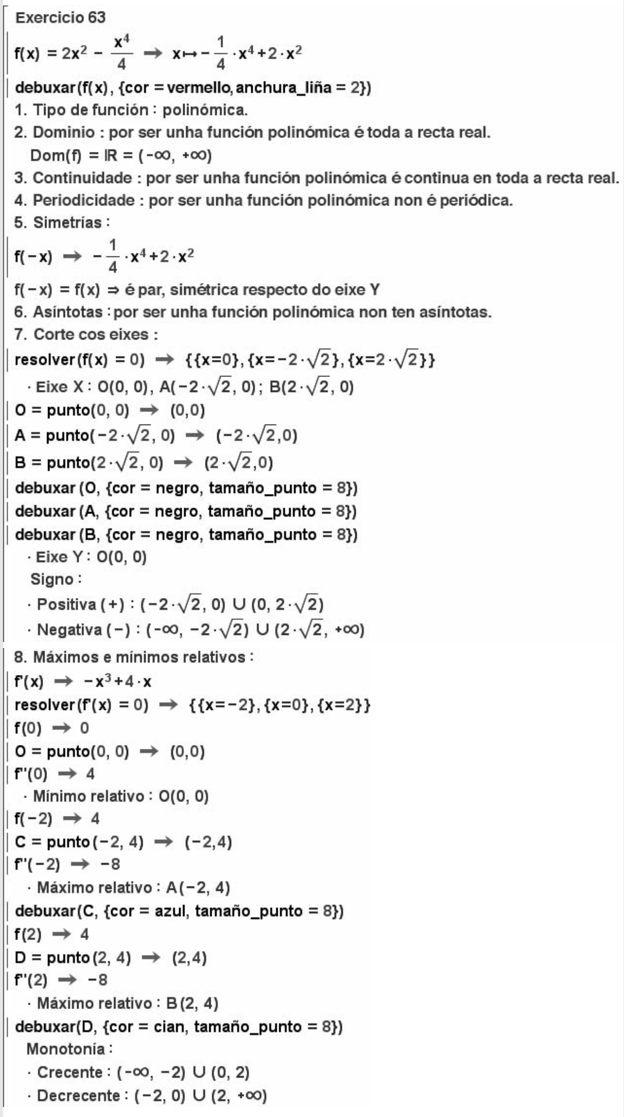
Practica

Representa as seguintes funcións completando para cada unha delas o formulario dos 10 apartados:

63. Representa e analiza a función:

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

Solución:



Exercicio 63

$f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} \rightarrow x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$

debuxar(f(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

1. Tipo de función : polinómica.
2. Dominio : por ser unha función polinómica é toda a recta real.
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidade : por ser unha función polinómica é continua en toda a recta real.
4. Periodicidade : por ser unha función polinómica non é periódica.
5. Simetrías :

$f(-x) \rightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ é par, simétrica respecto do eixe Y

6. Asíntotas : por ser unha función polinómica non ten asíntotas.
7. Corte cos eixes :

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow \{\{x=0\}, \{x=-2\cdot\sqrt{2}\}, \{x=2\cdot\sqrt{2}\}\}$

· Eixe X : $O(0, 0)$, $A(-2\cdot\sqrt{2}, 0)$; $B(2\cdot\sqrt{2}, 0)$

O = **punto**(0, 0) $\rightarrow$ (0,0)

A = **punto**$(-2\cdot\sqrt{2}, 0) \rightarrow (-2\cdot\sqrt{2},0)$

B = **punto**$(2\cdot\sqrt{2}, 0) \rightarrow (2\cdot\sqrt{2},0)$

debuxar (O, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar (A, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar (B, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

· Eixe Y : O(0, 0)

Signo :

· Positiva (+) : $(-2\cdot\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\cdot\sqrt{2})$

· Negativa (−) : $(-\infty, -2\cdot\sqrt{2}) \cup (2\cdot\sqrt{2}, +\infty)$

8. Máximos e mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow -x^3 + 4\cdot x$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow \{\{x=-2\}, \{x=0\}, \{x=2\}\}$

$f(0) \rightarrow 0$

O = **punto**(0, 0) $\rightarrow$ (0,0)

$f''(0) \rightarrow 4$

· Mínimo relativo : O(0, 0)

$f(-2) \rightarrow 4$

C = **punto**(−2, 4) $\rightarrow$ (−2,4)

$f''(-2) \rightarrow -8$

· Máximo relativo : A(−2, 4)

debuxar(C, {cor = azul, tamaño_punto = 8})

$f(2) \rightarrow 4$

D = **punto**(2, 4) $\rightarrow$ (2,4)

$f''(2) \rightarrow -8$

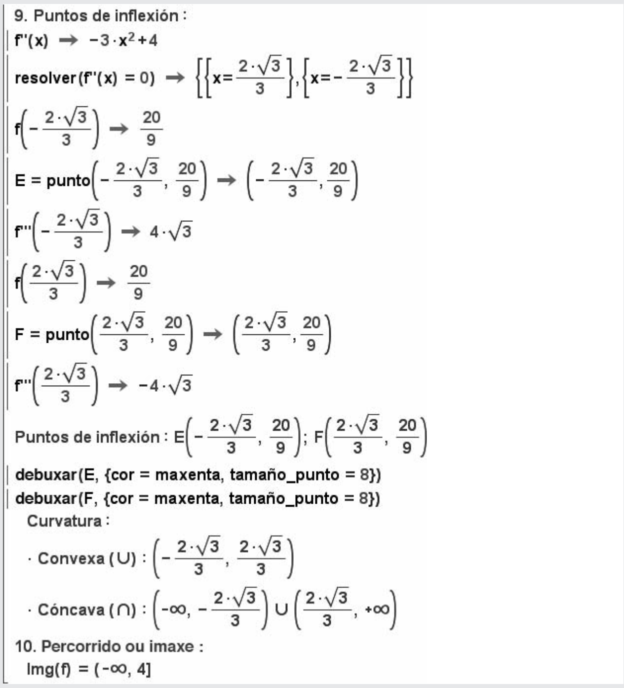
· Máximo relativo : B(2, 4)

debuxar(D, {cor = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

· Crecente : $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

· Decrecente : $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow -3\cdot x^2 + 4$

resolver(f''(x) = 0) $\rightarrow \left\{\left[\left\{x=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}\right], \left[\left\{x=-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}\right]\right\}$

$f\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{20}{9}$

E = **punto**$\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \rightarrow \left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

$f'''\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow 4\cdot\sqrt{3}$

$f\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{20}{9}$

F = **punto**$\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \rightarrow \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

$f'''\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow -4\cdot\sqrt{3}$

Puntos de inflexión : $E\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$; $F\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

debuxar(E, {cor = maxenta, tamaño_punto = 8})

debuxar(F, {cor = maxenta, tamaño_punto = 8})

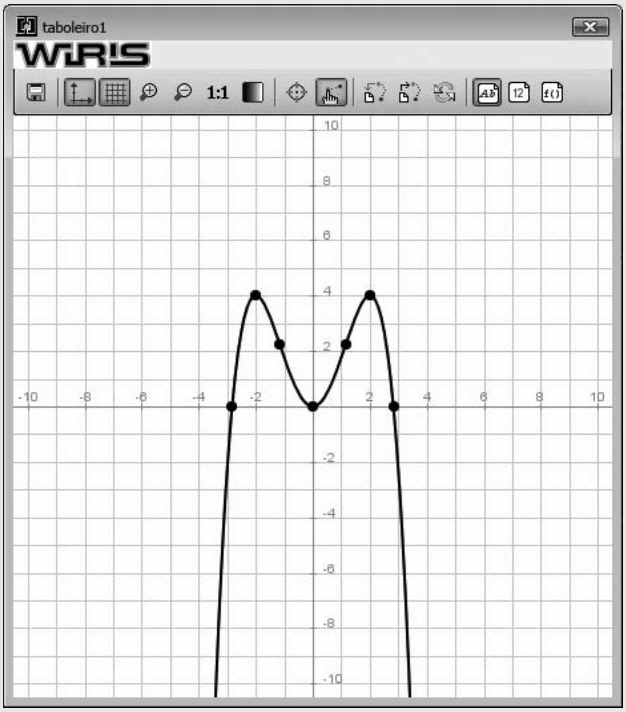
Curvatura :

· Convexa (∪) : $\left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)$

· Cóncava (∩) : $\left(-\infty, -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

10. Percorrido ou imaxe :

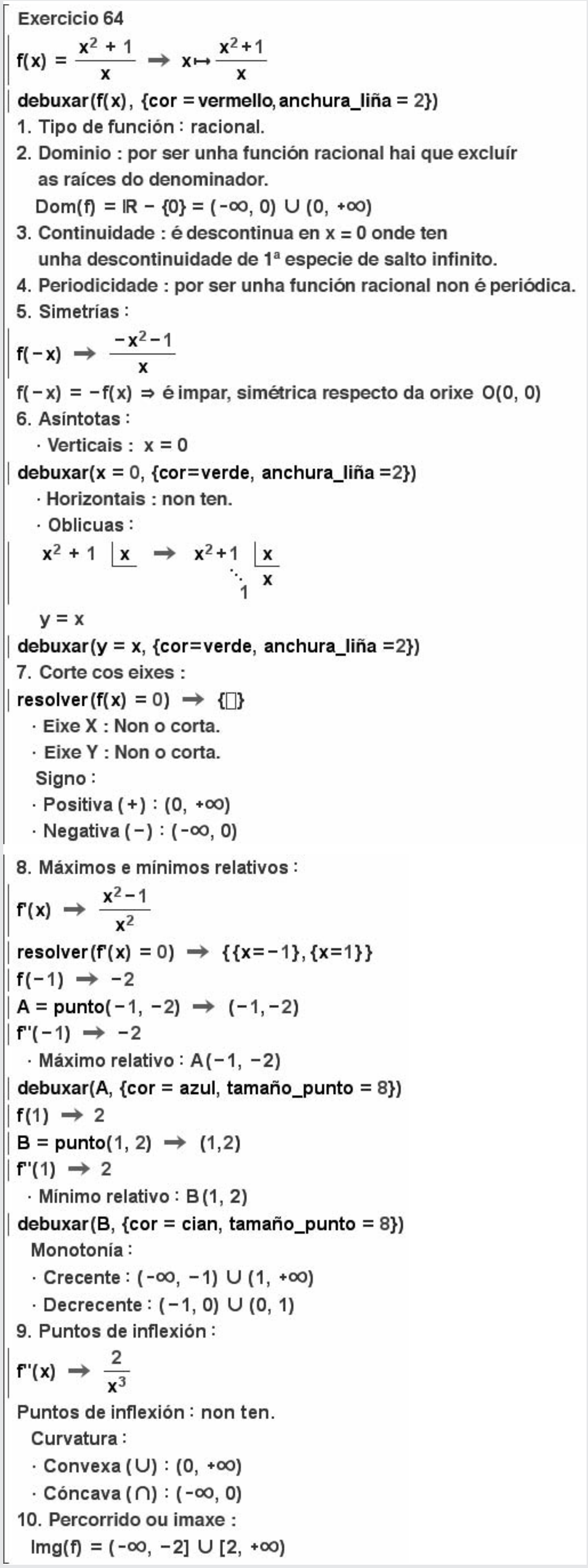
$\text{Img}(f) = (-\infty, 4]$



64. Representa e analiza a función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:



Exercicio 64

$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+1}{x}$

debuxar(f(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

1. Tipo de función : racional.
2. Dominio : por ser unha función racional hai que excluír as raíces do denominador.
   Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidade : é descontinua en x = 0 onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidade : por ser unha función racional non é periódica.
5. Simetrías :

$f(-x) \rightarrow \frac{-x^2-1}{x}$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ é impar, simétrica respecto da orixe O(0, 0)

6. Asíntotas :
   - · Verticais : x = 0

debuxar(x = 0, {cor=verde, anchura_liña =2})

   - · Horizontais : non ten.
   - · Oblicuas :

$$x^2 + 1 \;\underline{|\,x} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l|l} x^2+1 & x \\ \quad\;\; 1 & x \end{array}$$

y = x

debuxar(y = x, {cor=verde, anchura_liña =2})

7. Corte cos eixes :

resolver(f(x) = 0) → {□}

- · Eixe X : Non o corta.
- · Eixe Y : Non o corta.

Signo :

- · Positiva (+) : $(0, +\infty)$
- · Negativa (−) : $(-\infty, 0)$

8. Máximos e mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}$

resolver(f'(x) = 0) → {{x=−1}, {x=1}}

f(−1) → −2

A = punto(−1, −2) → (−1,−2)

f''(−1) → −2

· Máximo relativo : A(−1, −2)

debuxar(A, {cor = azul, tamaño_punto = 8})

f(1) → 2

B = punto(1, 2) → (1,2)

f''(1) → 2

· Mínimo relativo : B(1, 2)

debuxar(B, {cor = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

- · Crecente : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- · Decrecente : $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$

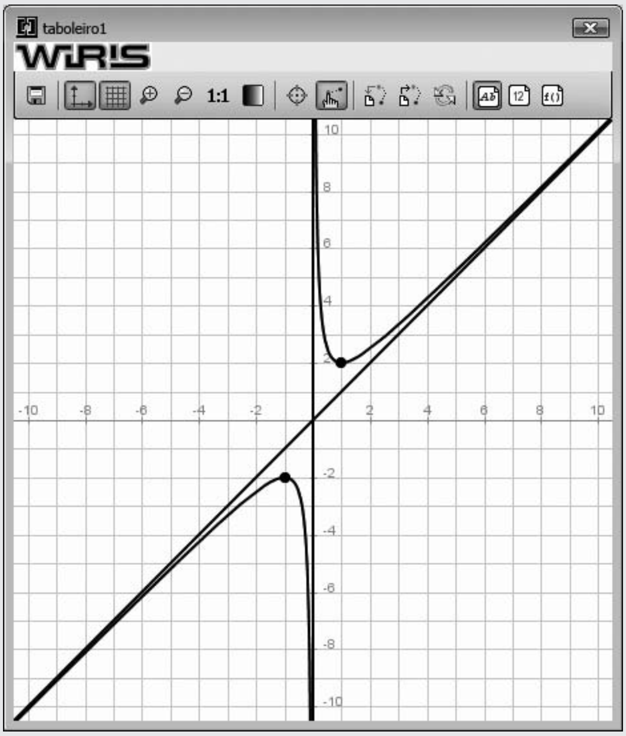
Puntos de inflexión : non ten.

Curvatura :

- · Convexa (∪) : $(0, +\infty)$
- · Cóncava (∩) : $(-\infty, 0)$

10. Percorrido ou imaxe :

Img(f) = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



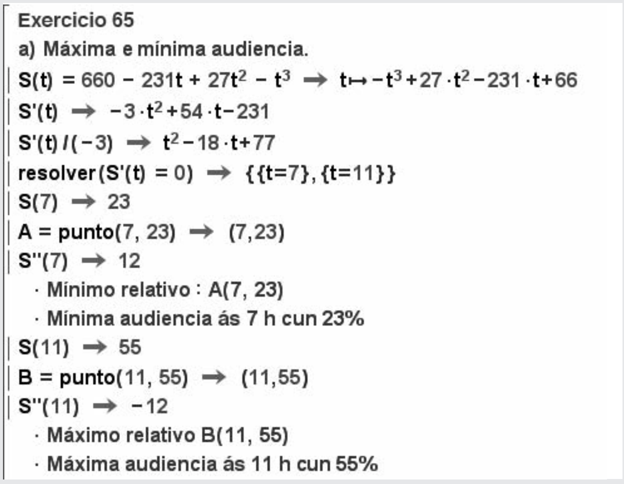
65. Unha cadea local de TV determinou, por medio de enquisas, que a porcentaxe de cidadáns que a ven entre as 6 da tarde e as 12 da noite vén dada pola función:

$$S(t) = 660 - 23lt + 27t^2 - t^3$$

onde **t** indica as horas transcorridas dende as 12 en punto da mañá.

a) A que hora ten máxima e mínima audiencia a cadea entre as 6 da tarde e as 12 da noite? Calcula tamén que porcentaxe de cidadáns ven a cadea de TV a esas horas de máxima e mínima audiencia?

b) Debuxa a gráfica da función S(t) para **t** comprendido entre as 6 da tarde e as 12 da noite.



Exercicio 65

a) Máxima e mínima audiencia.

$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \rightarrow t \mapsto -t^3+27\cdot t^2-231\cdot t+66$

$S'(t) \rightarrow -3\cdot t^2+54\cdot t-231$

$S'(t)/(-3) \rightarrow t^2-18\cdot t+77$

resolver(S'(t) = 0) → {{t=7}, {t=11}}

S(7) → 23

A = punto(7, 23) → (7,23)

S''(7) → 12

· Mínimo relativo : A(7, 23)

· Mínima audiencia ás 7 h cun 23%

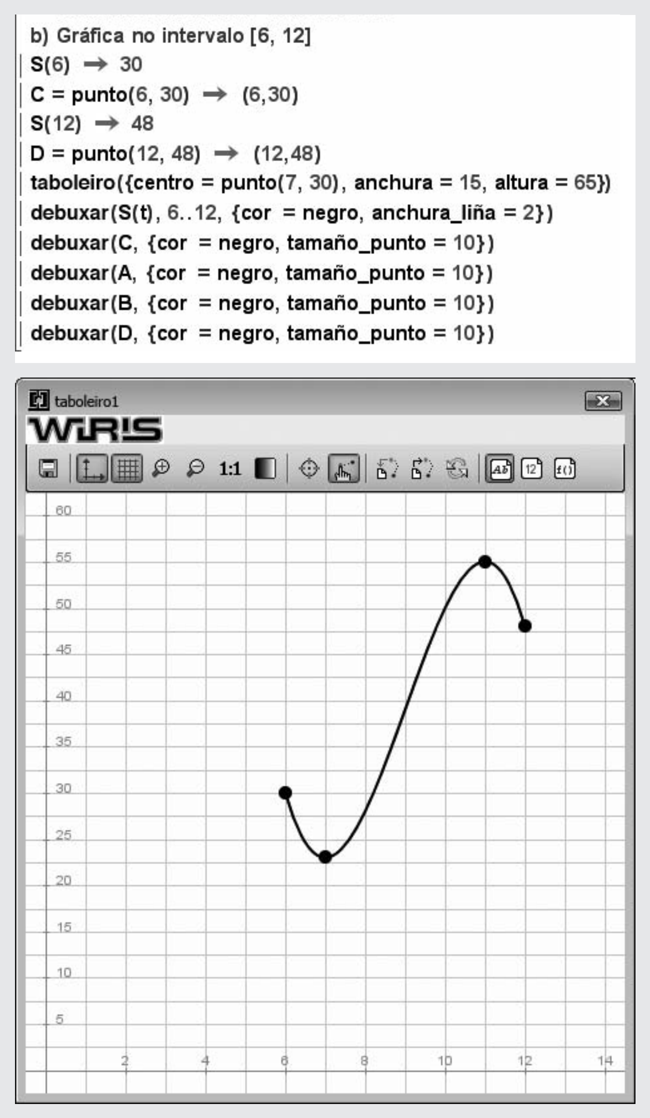
S(11) → 55

B = punto(11, 55) → (11,55)

S''(11) → −12

· Máximo relativo B(11, 55)

· Máxima audiencia ás 11 h cun 55%



b) Gráfica no intervalo [6, 12]

S(6) → 30

C = punto(6, 30) → (6,30)

S(12) → 48

D = punto(12, 48) → (12,48)

taboleiro({centro = punto(7, 30), anchura = 15, altura = 65})

debuxar(S(t), 6..12, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(C, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

debuxar(B, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

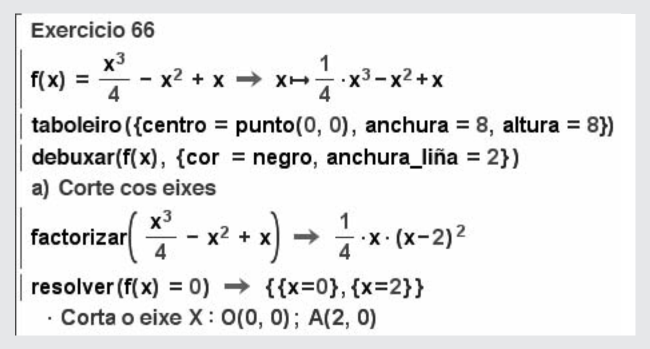
debuxar(D, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

66. Nunha rexión, un río ten a forma da curva:

$$y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

e é cortada por un camiño segundo o eixe X.

Debes facer un esquema da posición do río e do camiño, calculando para a curva o corte cos eixes de coordenadas, extremos relativos e intervalos de crecemento.



Exercicio 66

$f(x) = \frac{x^3}{4} - x^2 + x \rightarrow x \mapsto \frac{1}{4}\cdot x^3 - x^2 + x$

taboleiro({centro = punto(0, 0), anchura = 8, altura = 8})

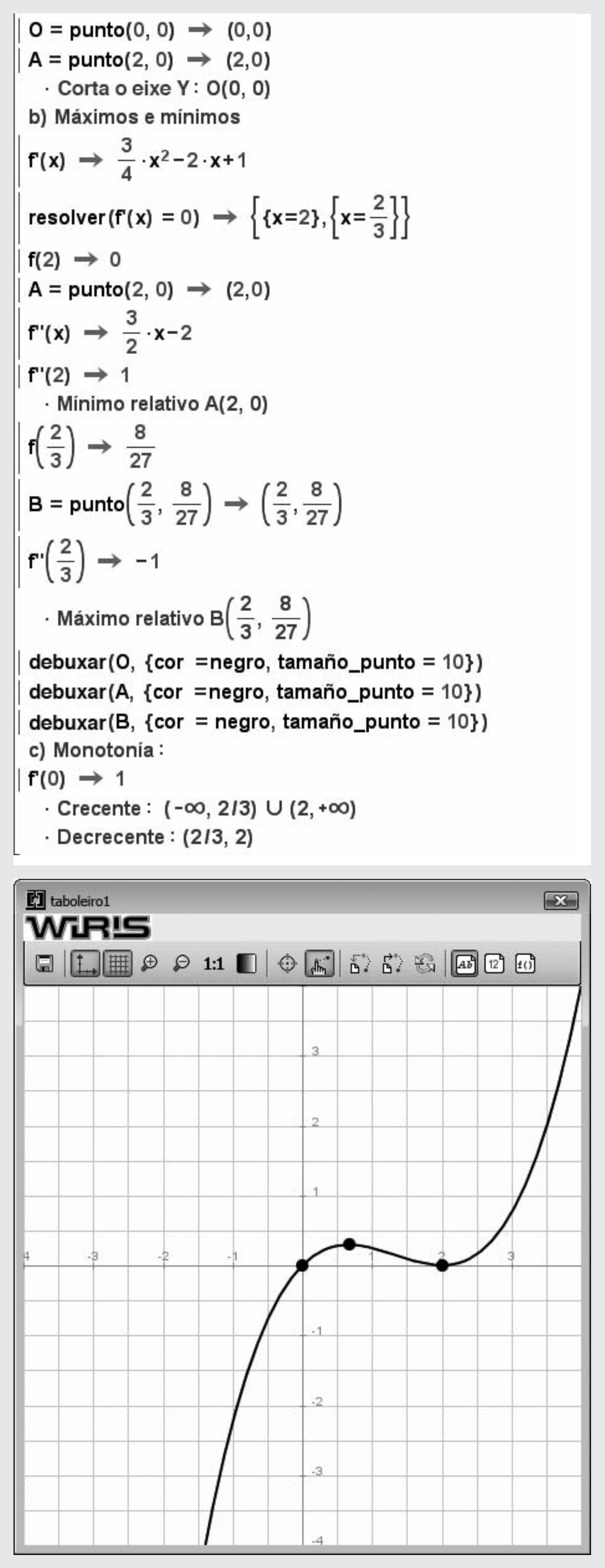
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

a) Corte cos eixes

$\text{factorizar}\left(\frac{x^3}{4} - x^2 + x\right) \rightarrow \frac{1}{4}\cdot x\cdot(x-2)^2$

resolver(f(x) = 0) → {{x=0}, {x=2}}

· Corta o eixe X : O(0, 0) ; A(2, 0)



O = punto(0, 0) → (0,0)

A = punto(2, 0) → (2,0)

· Corta o eixe Y : O(0, 0)

b) Máximos e mínimos

$f'(x) \rightarrow \frac{3}{4}\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$

$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \left\{\{x=2\}, \left\{x=\frac{2}{3}\right\}\right\}$

f(2) → 0

A = punto(2, 0) → (2,0)

$f''(x) \rightarrow \frac{3}{2}\cdot x - 2$

f''(2) → 1

· Mínimo relativo A(2, 0)

$f\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow \frac{8}{27}$

$B = \text{punto}\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right) \rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$

$f''\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow -1$

· Máximo relativo $B\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$

debuxar(O, {cor =negro, tamaño_punto = 10})

debuxar(A, {cor =negro, tamaño_punto = 10})

debuxar(B, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

c) Monotonía :

f'(0) → 1

· Crecente : (−∞, 2/3) ∪ (2, +∞)

· Decrecente : (2/3, 2)

67. Dada a función:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

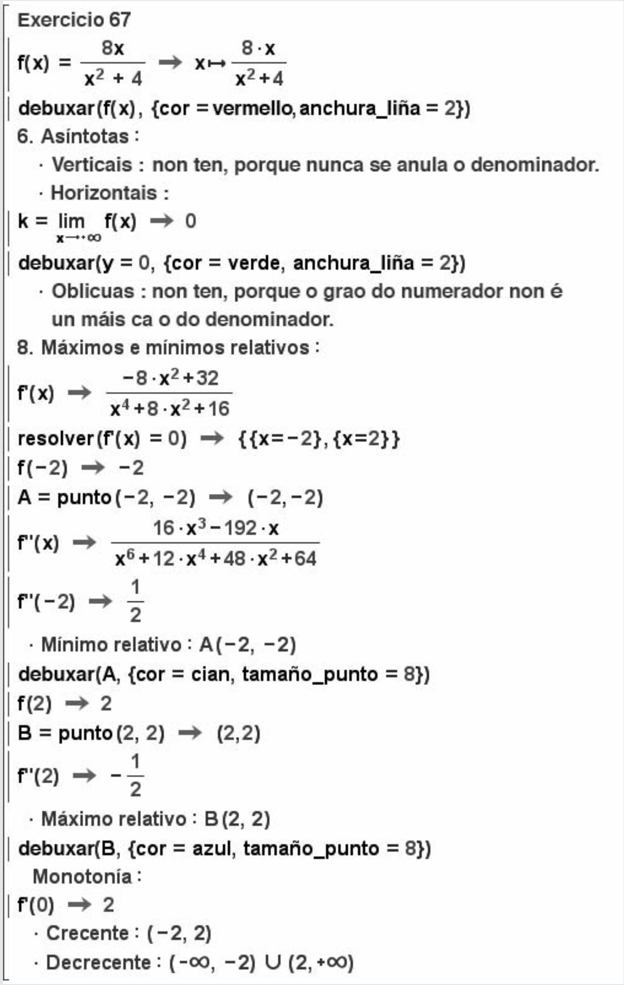
Pídese:

a) Asíntotas.

b) Máximos e mínimos relativos, intervalos de crecemento e decrecemento.

c) Esboza a súa gráfica.

Solución:



Exercicio 67

$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4} \rightarrow x \mapsto \frac{8 \cdot x}{x^2+4}$

debuxar(f(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

6. Asíntotas :

· Verticais : non ten, porque nunca se anula o denominador.

· Horizontais :

$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow 0$

debuxar(y = 0, {cor = verde, anchura_liña = 2})

· Oblicuas : non ten, porque o grao do numerador non é un máis ca o do denominador.

8. Máximos e mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow \frac{-8 \cdot x^2+32}{x^4+8 \cdot x^2+16}$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=−2}, {x=2}}

$f(-2) \rightarrow -2$

A = punto(−2, −2) $\rightarrow$ (−2, −2)

$f''(x) \rightarrow \frac{16 \cdot x^3-192 \cdot x}{x^6+12 \cdot x^4+48 \cdot x^2+64}$

$f''(-2) \rightarrow \frac{1}{2}$

· Mínimo relativo : A(−2, −2)

debuxar(A, {cor = cian, tamaño_punto = 8})

$f(2) \rightarrow 2$

B = punto(2, 2) $\rightarrow$ (2,2)

$f''(2) \rightarrow -\frac{1}{2}$

· Máximo relativo : B(2, 2)

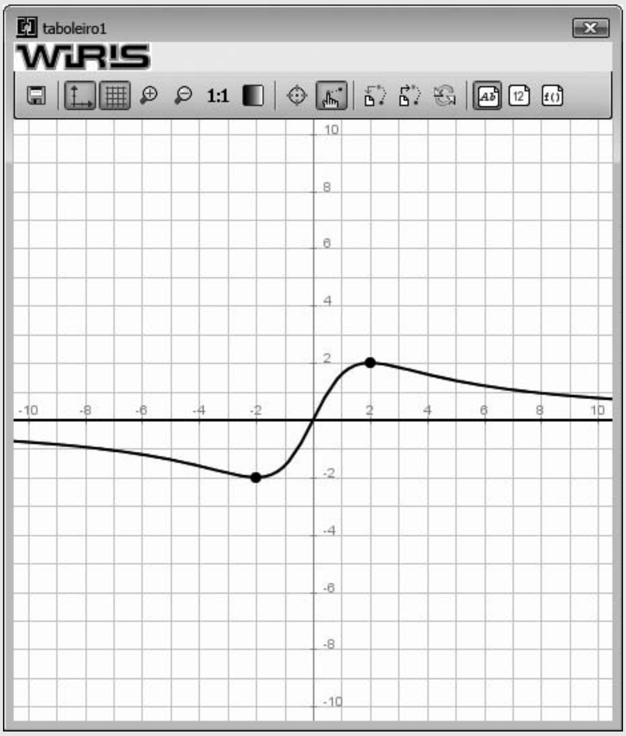
debuxar(B, {cor = azul, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

$f'(0) \rightarrow 2$

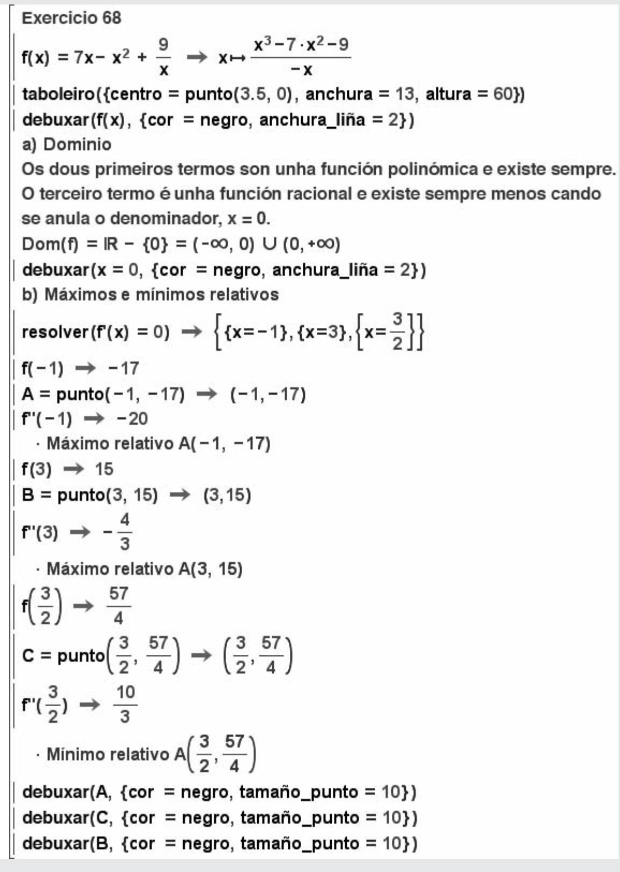
· Crecente : (−2, 2)

· Decrecente : (−∞, −2) ∪ (2, +∞)



68. Dada a función: $f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x}$

Razoa a que é igual o dominio da función f(x) e di os puntos nos que alcanza máximo ou mínimo relativo.



Exercicio 68

$f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3-7 \cdot x^2-9}{-x}$

taboleiro({centro = punto(3.5, 0), anchura = 13, altura = 60})

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

a) Dominio

Os dous primeiros termos son unha función polinómica e existe sempre. O terceiro termo é unha función racional e existe sempre menos cando se anula o denominador, x = 0.

Dom(f) = ℝ − {0} = (−∞, 0) ∪ (0, +∞)

debuxar(x = 0, {cor = negro, anchura_liña = 2})

b) Máximos e mínimos relativos

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow \left[\{x=-1\}, \{x=3\}, \left\{x=\frac{3}{2}\right\}\right]$

$f(-1) \rightarrow -17$

A = punto(−1, −17) $\rightarrow$ (−1, −17)

$f''(-1) \rightarrow -20$

· Máximo relativo A(−1, −17)

$f(3) \rightarrow 15$

B = punto(3, 15) $\rightarrow$ (3,15)

$f''(3) \rightarrow -\frac{4}{3}$

· Máximo relativo A(3, 15)

$f\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow \frac{57}{4}$

C = punto$\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right) \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$

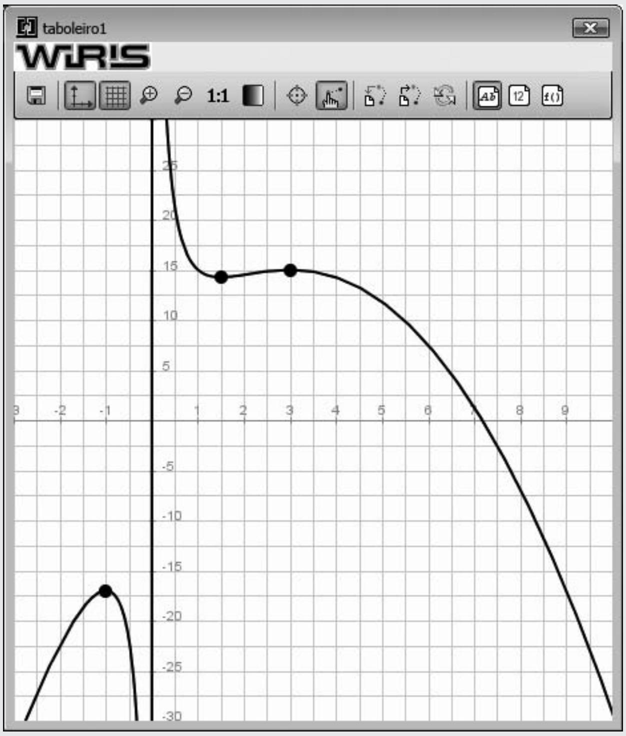
$f''\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow \frac{10}{3}$

· Mínimo relativo A$\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$

debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

debuxar(C, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

debuxar(B, {cor = negro, tamaño_punto = 10})



69. Dada a función: $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

Debuxa a gráfica estudando:

a) Dominio e puntos de corte cos eixes de coordenadas.

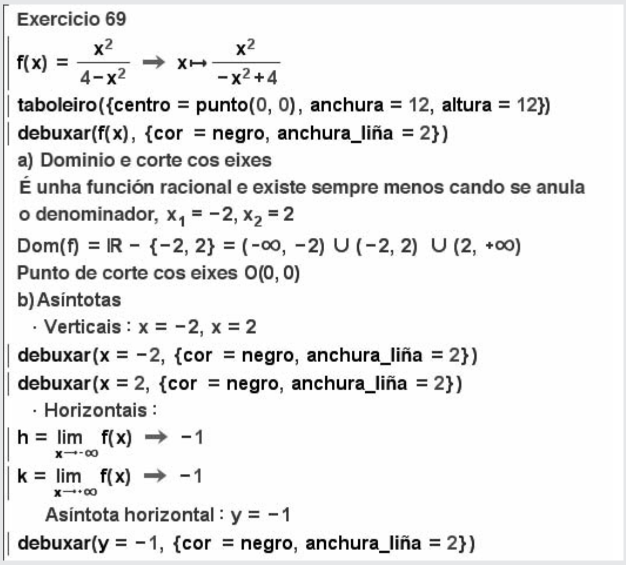
b) Ecuación das súas asíntotas.

c) Máximos e mínimos relativos.

d) Intervalos de crecemento e decrecemento.

e) Utiliza a información anterior para representala graficamente.

Solución:



Exercicio 69

$f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2}{-x^2+4}$

taboleiro({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12})

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

a) Dominio e corte cos eixes

É unha función racional e existe sempre menos cando se anula o denominador, $x_1 = -2, x_2 = 2$

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Punto de corte cos eixes O(0, 0)

b) Asíntotas

· Verticais : x = −2, x = 2

debuxar(x = −2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(x = 2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

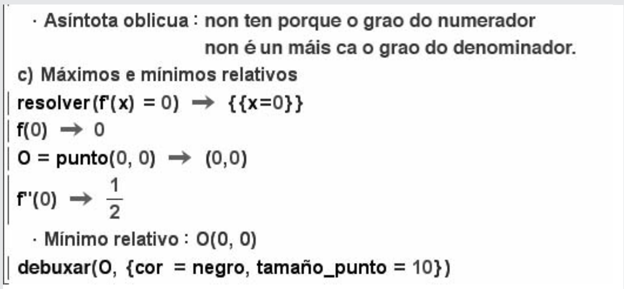
· Horizontais :

$h = \lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow -1$

$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow -1$

Asíntota horizontal : y = −1

debuxar(y = −1, {cor = negro, anchura_liña = 2})



· Asíntota oblicua : non ten porque o grao do numerador non é un máis ca o grao do denominador.

c) Máximos e mínimos relativos

resolver(f'(x) = 0) → {{x=0}}

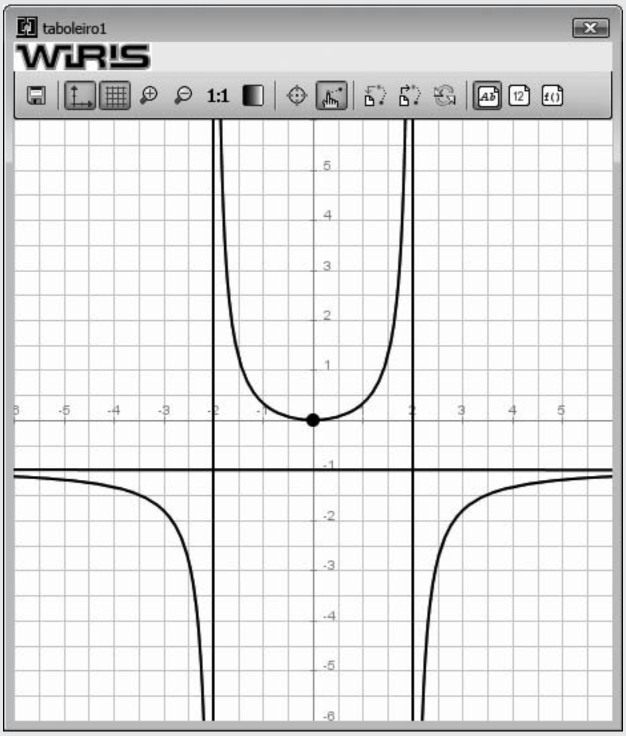
f(0) → 0

O = punto(0, 0) → (0,0)

$f''(0) \rightarrow \dfrac{1}{2}$

· Mínimo relativo : O(0, 0)

debuxar(O, {cor = negro, tamaño_punto = 10})

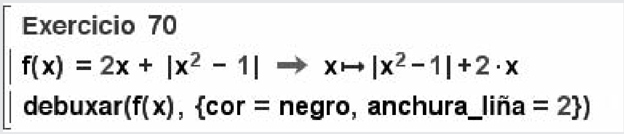


70. Dada a función:

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

esboza a gráfica de f(x).

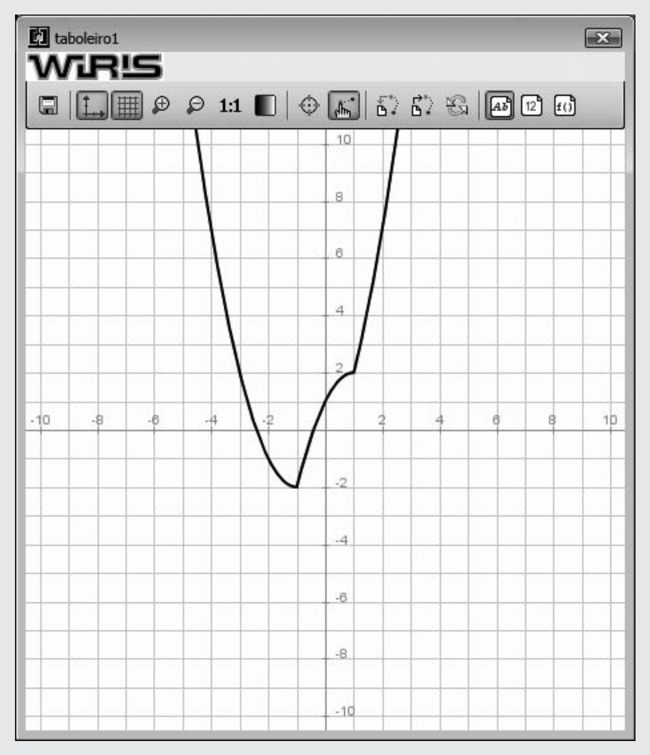
Solución:

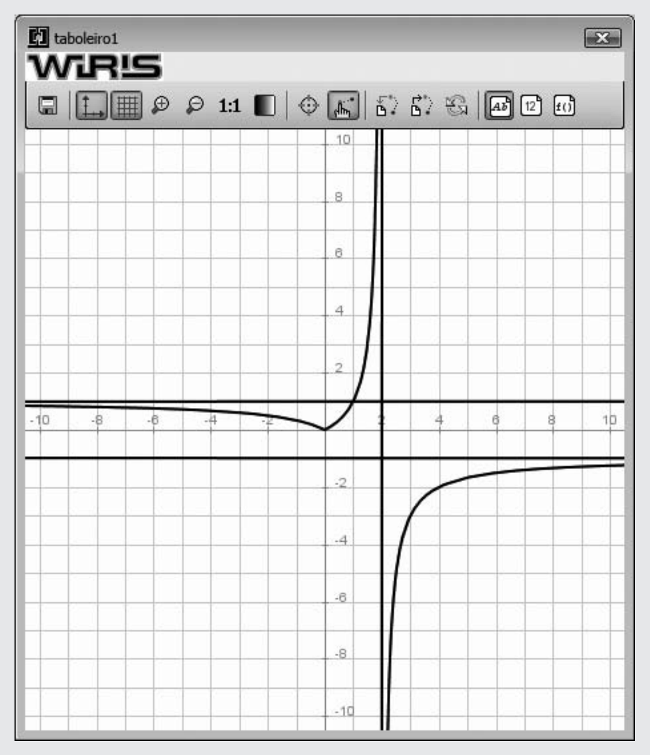


Exercicio 70

$f(x) = 2x + |x^2 - 1| \rightarrow x \mapsto |x^2-1| + 2 \cdot x$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})



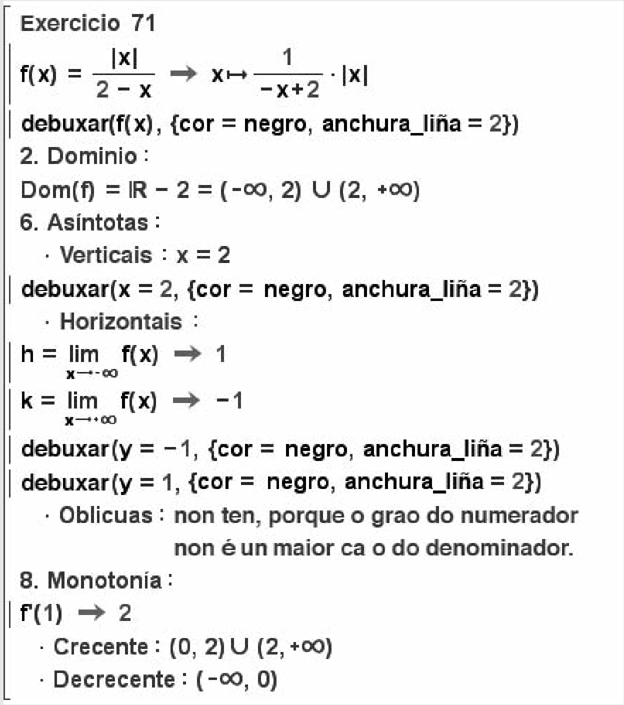


71. Debuxa a gráfica da función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$$

e indica o seu dominio, asíntotas e intervalos de crecemento e decrecemento.

Solución:



Exercicio 71

$f(x) = \dfrac{|x|}{2 - x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{-x+2} \cdot |x|$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

2. Dominio :

Dom(f) = $\mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

6. Asíntotas :

· Verticais : $x = 2$

debuxar(x = 2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

· Horizontais :

$h = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow 1$

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow -1$

debuxar(y = −1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(y = 1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

· Oblicuas : non ten, porque o grao do numerador non é un maior ca o do denominador.

8. Monotonía :

$f'(1) \Rightarrow 2$

· Crecente : $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

· Decrecente : $(-\infty, 0)$