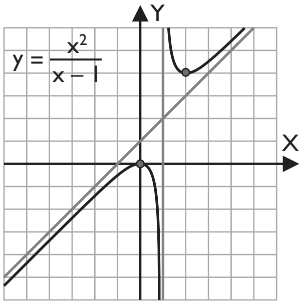
8 Aplicacións das derivadas

1. Máximos, mínimos e monotonía

Pensa e calcula

Dada a gráfica da función $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ representada na marxe, atopa os máximos e os mínimos relativos e os intervalos de crecemento e decrecemento.



Solución:

Máximo relativo: O(0, 0)

Mínimo relativo: B(2, 4)

Crecente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decrecente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

Aplica a teoría

1. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía das seguintes funcións:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ b) $y = 3x^4 - 4x^3$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Máximo relativo: A(0, 3)

Mínimo relativo: B(2, –1)

Crecente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decrecente (↘): $(0, 2)$

b) $y' = 12x^3 - 12x^2$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

Máximo relativo: non ten.

Mínimo relativo: A(1, –1)

Crecente (↗): $(1, +\infty)$

Decrecente (↘): $(-\infty, 1)$

2. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía da seguinte función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: A(–1, –2)

Mínimo relativo: B(1, 2)

Crecente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decrecente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

3. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía da seguinte función:

$$y = \frac{3}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: A(0, 3)

Mínimo relativo: non ten.

Crecente (↗): $(-\infty, 0)$

Decrecente (↘): $(0, +\infty)$

4. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía da seguinte función: $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: non ten.

Mínimo relativo: A(0, 2)

Crecente (↗): $(0, +\infty)$

Decrecente (↘): $(-\infty, 0)$

5. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía da seguinte función: $y = (2 - x)e^x$

Solución:

$y' = (1 - x)e^x$ $\quad$ $y' = 0 \Rightarrow x = 1$

Máximo relativo: A(1, e)

Mínimo relativo: non ten.

Crecente (↗): $(-\infty, 1)$

Decrecente (↘): $(1, +\infty)$

2. Puntos de inflexión e curvatura

Pensa e calcula

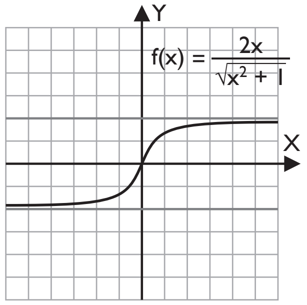
Dada $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ representada na marxe, atopa os puntos de inflexión e os intervalos de concavidade e convexidade.

Solución:

Punto de inflexión: O(0, 0)

Convexa (∪): $(-\infty, 0)$

Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



Aplica a teoría

6. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura das seguintes funcións:

a) $y = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$ $\qquad$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 18x + 27$

$y'' = 6x - 18$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 3$

$y''' = 6$

$y'''(3) = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: A(3, 1)

Convexa (∪): $(3, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 3)$

b) $y' = -3x^2 + 6x$

$y'' = -6x + 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1$

$y''' = -6$

$y'''(1) = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: A(1, 0)

Convexa (∪): $(-\infty, 1)$

Cóncava (∩): $(1, +\infty)$

7. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da seguinte función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$

$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

$y'''(0) = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: O(0, 0)

Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

8. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da seguinte función:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{3(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{6x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

$y''' = -\dfrac{18(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$

$y'''(-\sqrt{3}) = 9/16 \neq 0$

$y'''(0) = -18 \neq 0$

$y'''(\sqrt{3}) = 9/16 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$A(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4), O(0, 0), B(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$

Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

9. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da función: $y = xe^x$

Solución:

$y' = (x + 1)e^x$

$y'' = (x + 2)e^x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -2$

$y''' = (x + 3)e^x$

$y'''(-2) = 1/e^2 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-2, -2/e^2)$

Convexa ($\cup$): $(-2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2)$

10. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da función: $y = L\,(x^2 + 4)$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$

$y'' = -\dfrac{2(x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^2}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$

$y''' = \dfrac{4x(x^2 - 12)}{(x^2 + 4)^3}$

$y'''(-2) = 1/8 \neq 0$

$y'''(2) = -1/8 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(-2, 3\,L\,2), B(2, 3\,L\,2)$

Convexa ($\cup$): $(-2, 2)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

3. Problemas de derivadas

■ Pensa e calcula

A función $f(x) = x^2 + ax + b$ pasa polo punto $A(0, 4)$ e ten un mínimo no punto $B(2, 0)$. Calcula mentalmente o valor de **a** e **b**.

Solución:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$

● Aplica a teoría

11. Obtén os valores dos parámetros **a**, **b** e **c** para que a función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase polo punto $O(0, 0)$ e teña un mínimo local en $A(1, -1)$.

Solución:

a) Pasa por $O(0,0)$:

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

b) Pasa por $A(1, -1)$:

$f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1$

c) Ten un mínimo local en $A(1, -1)$.

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

Resólvese o sistema:

$$\left.\begin{array}{r} c = 0 \\ 3a + b \quad = 0 \\ a + b + c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1/2, b = -3/2, c = 0$$

A función é: $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$

12. Calcula dous números cuxa suma sexa 100 e o seu produto sexa máximo.

Solución:

a) Incógnitas e datos.

x = primeiro número.

y = segundo número.

$x + y = 100$

b) Función que hai que maximizar.

$f(x, y) = xy$

Suxeito a: $x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

c) Escríbese a función cunha soa variable.

$f(x) = x(100 - x)$

$f(x) = 100x - x^2$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos.

$f'(x) = 100 - 2x$

$100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$

Se $x = 50 \Rightarrow y = 50$

e) Compróbase na segunda derivada.

$f''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) O primeiro número é x = 50; o segundo, y = 50.

13. Calcula as dimensións dun rectángulo cuxo perímetro mida 64 m e a súa área sexa máxima.

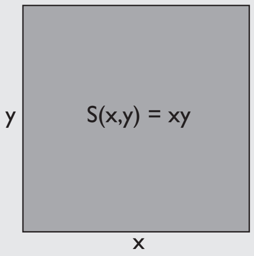
Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.

x = lonxitude da base.

y = altura.

Perímetro = 64 m



b) Función que hai que maximizar.

$S(x, y) = xy$

Suxeita ás condicións:

Perímetro = 64 m $\Rightarrow x + y = 32$

c) Escríbese a ecuación cunha soa variable.

$x + y = 32 \Rightarrow y = 32 - x$

$S(x) = x(32 - x)$

$S(x) = 32x - x^2$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos derivando.

$S'(x) = 32 - 2x$

$32 - 2x = 0 \Rightarrow x = 16$

Se $x = 16 \Rightarrow y = 16$

e) Compróbase na segunda derivada.

$S''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) O recinto mide 16 m por 16 m.

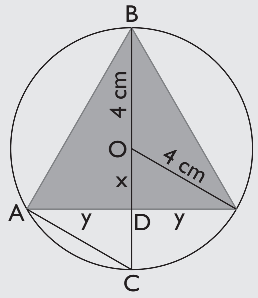
14. Calcula a área do maior triángulo isóscele inscrito nun círculo de raio 4 cm.

Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.

2y = base do triángulo

h = altura do triángulo = BD



Sexa: x = OD

O triángulo ABC é rectángulo en A.

Polo teorema da altura:

$y^2 = BD \cdot DC = (4 + x) \cdot (4 - x) = 16 - x^2$

b) Función que hai que minimizar.

$A(y, h) = \frac{1}{2} 2yh$

Suxeita ás condicións:

$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$

$h = 4 + x$

c) Escríbese a ecuación cunha soa variable.

$A(x) = \sqrt{16 - x^2}(4 + x)$

$A(x) = (4 + x)\sqrt{16 - x^2}$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos derivando.

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} - (4 + x)\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{4x + x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$\sqrt{16 - x^2} - \frac{4x + x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = -4, x = 2$$

Se x = –4, non ten sentido no problema.

Se $x = 2$ cm $\Rightarrow y = \sqrt{12}$ cm ; $h = 6$ cm

e) Compróbase na segunda derivada.

$$A''(x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + \frac{x^3 - 32x - 64}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$$

$A''(2) = -2\sqrt{3} < 0$ (–) $\Rightarrow$ máximo relativo.

f) O triángulo ten unha área de:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{12} \cdot 6 = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3} \ \text{cm}^2$$

15. Calcula a altura e o raio que debe ter un bote cilíndrico cuxa área total, incluíndo as dúas tapas, é de 150 cm^2, para que o seu volume sexa máximo.

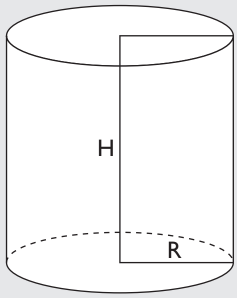
Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.

R = raio do cilindro.

H = altura do cilindro.

Superficie = 150 cm^2



b) Función que hai que maximizar.

$V(R, H) = \pi R^2 H$

Suxeita ás condicións:

Superficie = 150 cm^2 $\Rightarrow 2\pi R^2 + 2\pi RH = 150$

c) Escríbese a ecuación cunha soa variable.

$$2\pi R^2 + 2\pi RH = 150 \Rightarrow H = \frac{150 - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{75}{\pi R} - R$$

$$V(R) = \pi R^2\left(\frac{75}{\pi R} - R\right)$$

$$V(R) = 75R - \pi R^3$$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos derivando.

$V'(R) = 75 - 3\pi R^2$

$$75 - 3\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{\pi}} = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$\text{Se } R = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi} \Rightarrow H = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$$

e) Compróbase na segunda derivada.

$$V''(R) = -6\pi R \Rightarrow V''\left(\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}\right) < 0 \ (–) \Rightarrow \text{máximo relativo.}$$

f) O cilindro mide $\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm de raio e $\frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm de altura.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 A gráfica da función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ pasa polo punto (0, 0) e ten un máximo local no punto (1, 2). Obtén os valores dos coeficienes **a**, **b** e **c**.

☐ $a = 2, b = -2, c = 0$
☐ $a = 4, b = -6, c = 0$
☒ $a = -4, b = 6, c = 0$
☐ $a = -4, b = 0, c = 6$

2 Atopa os valores de **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

teña un extremo relativo no punto (1, 2).

☐ $a = -1, b = -1$
☒ $a = 1, b = 1$
☐ $a = 0, b = 1$
☐ $a = 2, b = -2$

3 Descompón o número 25 en dous sumandos tales que o dobre do cadrado do primeiro máis o triplo do cadrado do segundo sexa mínimo.

☐ 12 e 13
☒ 15 e 10
☐ 14 e 11
☐ O problema non ten solución.

4 Determinouse que o custo total (en euros) que lle supón a certa empresa a produción de **n** unidades dun determinado artigo varía segundo a función:

$$c(n) = 2n^3 + 270n + 2\,048$$

Calcula o número de unidades que debe producirse para facer mínimo o custo por unidade.

☐ 7
☒ 8
☐ 45
☐ 2

5 Calcula os puntos de inflexión da función:

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

☐ (0, –2)
☐ (–1, 0)
☐ (3, 1)
☒ Non ten puntos de inflexión.

6 Calcula os intervalos de concavidade e convexidade da función f(x) do exercicio anterior.

☐ Convexa (∪): $(-1, +\infty)$
Cóncava (∩): $(-\infty, -1)$

☒ Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$

☐ Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
Cóncava (∩): $(0, +\infty)$

☐ Convexa (∪): $\mathbb{R}$
Cóncava (∩): $\varnothing$

7 Atopa o valor de $b \in \mathbb{R}$ para que a función:

$$f(x) = x^2 + \frac{b}{x}$$

teña un mínimo cando x = 1.

☐ –2
☐ 1
☐ –1
☒ 2

8 Unha institución de beneficencia estatal quere determinar cantos analistas debe contratar para o procesamento de solicitudes da Seguridade Social. Estímase que o custo (en euros) C(x) de procesar unha solicitude é unha función do número de analistas **x** dada por:

$$C(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}216 \text{ L } x + 5$$

sendo x > 0 (L = logaritmo neperiano).

Se o obxectivo é minimizar o custo por solicitude C(x), determina o número de analistas que deberían contratarse.

☐ 5 analistas
☒ 6 analistas
☐ 7 analistas
☐ 8 analistas

9 Un comerciante estivo vendendo plumas estilográficas a 20 € a unidade e as vendas mensuais foron de 35 unidades. Quere subir o prezo e calcula que por cada euro de aumento no prezo, venderá dúas unidades menos. Por outro lado, cada pluma cústalle á tenda 10 €. A que prezo debe vender as plumas para que o beneficio sexa máximo?

☐ 24 €
☐ 30 €
☐ 21,25 €
☒ 23,75 €

10 Unha parábola ten a forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$

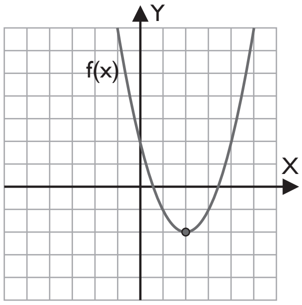
Sábese que no punto (1,3) ten un máximo ou un mínimo. Calcula o valor de **a** e **b**. Determina se o punto (1,3) corresponde a un máximo ou a un mínimo.

☒ a = –1, b = 2. O punto é un máximo.
☐ a = –1, b = 2. O punto é un mínimo.
☐ a = 2, b = 1. O punto é un máximo.
☐ a = –2, b = 1. O punto é un máximo.

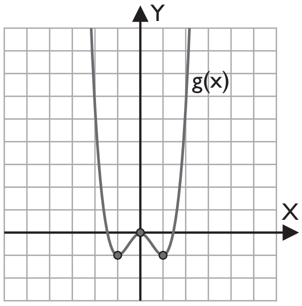
1. Máximos, mínimos e monotonía

16. Identifica nas seguintes gráficas os máximos e os mínimos relativos e os intervalos onde a función é crecente e decrecente:

a)



b)



Solución:

a) Máximo relativo: non ten.
Mínimo relativo: A(2, –2)
Crecente (↗): (2, +∞)
Decrecente (↘): (–∞, 2)

b) Máximo relativo: O(0, 0)
Mínimo relativo: A(–1, –1), B(1, –1)
Crecente (↗): (–1, 0) ∪ (1, +∞)
Decrecente (↘): (–∞, –1) ∪ (0, 1)

17. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía das seguintes funcións:

a) $y = \frac{1}{5}x^5 - x$ b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Solución:

a) $y' = x^4 - 1$
$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$
Máximo relativo: A(–1, 4/5)
Mínimo relativo: B(1, –4/5)
Crecente (↗): (–∞, –1) ∪ (1, +∞)
Decrecente (↘): (–1, 1)

b) $y' = 6x^2 + 6x - 12$
$y' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$
Máximo relativo: A(–2, 20)
Mínimo relativo: B(1, –7)
Crecente (↗): (–∞, –2) ∪ (1, +∞)
Decrecente (↘): (–2, 1)

18. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía das seguintes funcións:

a) $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $y' = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$
$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$
Máximo relativo: non ten.
Mínimo relativo: A(–1, 2), B(1, 2)
Crecente (↗): (–1, 0) ∪ (1, +∞)
Decrecente (↘): (–∞, –1) ∪ (0, 1)

b) $y' = -\frac{18x}{(x^2 - 9)^2}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$
Máximo relativo: O(0, 0)
Mínimo relativo: non ten.
Crecente (↗): (–∞, –3) ∪ (–3, 0)
Decrecente (↘): (0, 3) ∪ (3, +∞)

19. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía da seguinte función:

$$y = \frac{e^x}{x}$$

Solución:

$y' = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 1$
Máximo relativo: non ten.
Mínimo relativo: A(1, e)
Crecente (↗): (1, +∞)
Decrecente (↘): (–∞, 0) ∪ (0, 1)

20. Calcula os máximos e os mínimos relativos e determina a monotonía da seguinte función:

$$y = L\,(x^2 + 1)$$

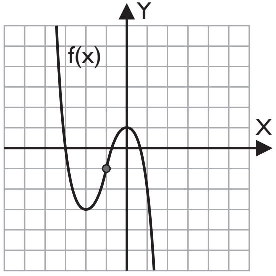
Solución:

$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$
Máximo relativo: non ten.
Mínimo relativo: O(0, 0)
Crecente (↗): (0, +∞)
Decrecente (↘): (–∞, 0)

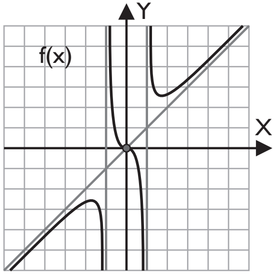
2. Puntos de inflexión e curvatura

21. Identifica nas seguintes gráficas os puntos de inflexión e os intervalos de concavidade e convexidade:

a)



b)



Solución:

a) Punto de inflexión: $A(1, -1)$

Convexa (∪): $(-\infty, -1)$

Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$

b) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

22. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura das seguintes funcións:

a) $y = 3x^5 - 5x^3$ b) $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2$

Solución:

a) $y' = 15x^4 - 15x^2$

$y'' = 60x^3 - 30x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}/2, x = 0, x = \sqrt{2}/2$

$y''' = 180x^2 - 30$

$y'''(-\sqrt{2}/2) = 60 \neq 0$

$y'''(0) = -30 \neq 0$

$y'''(\sqrt{2}/2) = 60 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$A(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8), O(0, 0), B(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$

Convexa (∪): $(-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2)$

b) $y' = x^3 - 3x^2$

$y'' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$y''' = 6x - 6$

$y'''(0) = -6 \neq 0$

$y'''(2) = 6 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(0, -2), B(2, -6)$

Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Cóncava (∩): $(0, 2)$

23. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da seguinte función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = -\frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}/3, x = \sqrt{3}/3$

$y''' = \frac{24x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4}$

$y'''(-\sqrt{3}/3) = 27\sqrt{3}/16 \neq 0$

$y'''(\sqrt{3}/3) = -27\sqrt{3}/16 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$A(-\sqrt{3}/3, 1/4), B(\sqrt{3}/3, 1/4)$

Convexa (∪): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$

24. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da seguinte función:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = -\frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$

$y'' \neq 0$

Puntos de inflexión: non ten.

Convexa (∪): $(-1, 1)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

25. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da seguinte función:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Solución:

$y' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$y'' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$

$y'' \neq 0$

Puntos de inflexión: non ten.

Convexa (∪): $\varnothing$

Cóncava (∩): $(-2, 2)$

26. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da seguinte función:

$$y = e^{-x^2}$$

Solución:

$y' = -2x\, e^{-x^2}$

$y'' = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}/2, x = \sqrt{2}/2$

$y''' = 4x(3 - 2x^2)\, e^{-x^2}$

$y'''(-\sqrt{2}/2) = 4\sqrt{2}/\sqrt{e} \neq 0$

$y'''(\sqrt{2}/2) = -4\sqrt{2}/\sqrt{e} \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e}), B(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$

Convexa ($\cup$): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

27. Calcula os puntos de inflexión e determina a curvatura da seguinte función:

$$y = \frac{x}{L\, x}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-1 + L\, x}{L^2\, x}$

$y'' = \dfrac{2 - L\, x}{x\, L^3\, x}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = e^2$

$y''' = \dfrac{-6 + L^2\, x}{x^2\, L^4\, x}$

$y'''(e^2) = -\dfrac{1}{8e^4} \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(e^2, e^2/2)$

Convexa ($\cup$): $(1, e^2)$

Cóncava ($\cap$): $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$

3. Problemas de derivadas

28. Para cada valor de **a**, considérase a función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$$

Calcula o valor de **a** para que f(x) teña un mínimo relativo en x = 2.

Solución:

$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 12x - 2a}{(x + 2)^2}$

Deberase ter un mínimo en x = 2.

$f'(2) = 0$

$\dfrac{18 - a}{8} = 0 \Rightarrow a = 18$

$f''(x) = \dfrac{4(a + 6)}{(x + 2)^3}$

$f''(2) = \dfrac{a + 6}{16} > 0$ para $a = 18$

Efectivamente, é un mínimo.

29. Expresa o número 60 como suma de tres enteiros positivos, de forma que o segundo sexa o dobre do primeiro e o seu produto sexa máximo. Determina o valor deste produto.

Solución:

a) Incógnitas e datos.

x = primeiro número

y = segundo número

z = terceiro número

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 60 \\ y &= 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 60 - 3x$$

b) Función que hai que maximizar.

$f(x, y, z) = xyz$

Suxeito a:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 60 \\ y &= 2x \end{aligned}\right\}$$

c) Escríbese a función cunha soa variable.

$f(x) = x \cdot 2x \cdot (60 - 3x)$

$f(x) = 120x^2 - 6x^3$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos.

$f'(x) = 240x - 18x^2$

$240x - 18x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 40/3$

Se $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 60$

Se $x = 40/3 \Rightarrow y = 80/3 \Rightarrow z = 20$

e) Compróbase na segunda derivada.

$f''(x) = 240 - 36x$

$f''(0) = 240 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

$f''(40/3) = -240 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) O máximo alcánzase en x = 40/3, pero o enunciado do problema pide que os números sexan enteiros positivos. Como $40/3 \in [13, 14]$, débese buscar a solución nos extremos do intervalo pechado:

$f(x) = 120x^2 - 6x^3$

$f(13) = 120 \cdot 13^2 - 6 \cdot 13^3 = 7\,098$

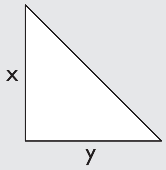
$f(14) = 120 \cdot 14^2 - 6 \cdot 14^3 = 7\,056$

A solución entón é: x = 13, y = 26, z = 21

30. Calcula a área máxima que pode ter un triángulo rectángulo tal que a suma das lonxitudes dos seus catetos valla 4 cm.

Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.



x = lonxitude dun cateto.

y = lonxitude do outro cateto.

$x + y = 4$

b) Función que hai que maximizar.

$f(x, y) = \frac{xy}{2}$

Suxeito a:

$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

c) Escríbese a función cunha soa variable.

$f(x) = \frac{x(4-x)}{2} = 2x - \frac{x^2}{2}$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos.

$f'(x) = 2 - x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Se $x = 2 \Rightarrow y = 2$

e) Compróbase na segunda derivada.

$f''(x) = -1$

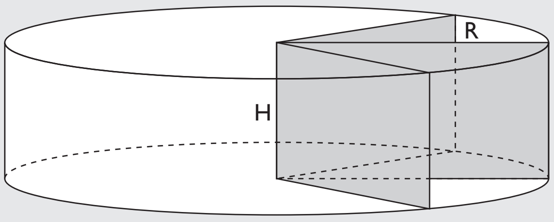
$f''(2) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) O máximo alcánzase en $x = 2$ cm, $y = 2$ cm, que é un triángulo rectángulo isóscele cuxa área é 2 cm^2.

31. Atopa a base **x** e a altura **y** dunha cartolina rectangular de 60 cm de perímetro que, ao dar unha volta completa arredor dun lado vertical, xera un cilindro de volume máximo.

Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.



R = raio do cilindro.

H = altura do cilindro.

$R + H = 30$ cm

b) Función que hai que maximizar.

$V(R, H) = \pi R^2 H$

Suxeita ás condicións:

$R + H = 30$

c) Escríbese a ecuación cunha soa variable.

$H = 30 - R$

$V(R) = \pi R^2(30 - R)$

$V(R) = 30\pi R^2 - \pi R^3$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos derivando.

$V'(R) = 60\pi R - 3\pi R^2$

$60\pi R - 3\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = 0, R = 20$

Se $R = 20 \Rightarrow H = 10$

A solución $R = 0$ non ten sentido.

e) Compróbase na segunda derivada.

$V''(R) = 60\pi - 6\pi R$

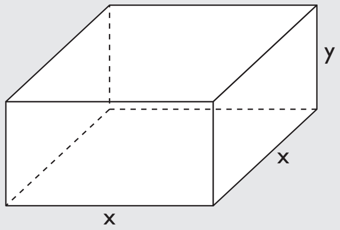
$V''(20) = -60\pi < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) O cilindro mide 20 cm de raio e 10 cm de altura.

32. Unha empresa fabrica caixas de latón sen tapa que teñen 500 cm^3 de volume, para almacenar un líquido colorante. As caixas teñen a base cadrada. Atopa a altura e o lado da base de cada caixa para que a cantidade de latón empregada en fabricalas sexa a menor posible.

Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.



x = lonxitude da aresta da base.

y = altura da caixa.

Volume $= x^2y = 500$

b) Función que hai que minimizar.

$A(x, y) = x^2 + 4xy$

Suxeita ás condicións:

$x^2y = 500$

c) Escríbese a función cunha soa variable.

$A(x, y) = x^2 + 4xy$

$y = \frac{500}{x^2}$

$A(x) = x^2 + 4x\frac{500}{x^2}$

$A(x) = x^2 + \frac{2\,000}{x}$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos derivando.

$$A'(x) = 2x - \frac{2\,000}{x^2}$$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

Se $x = 10 \Rightarrow y = 5$

e) Compróbase na segunda derivada.

$$A''(x) = \frac{4\,000}{x^3} + 2$$

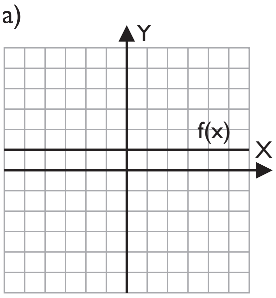
$A''(10) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) A caixa mide 10 cm de aresta da base e 5 cm de alto. A área é: $A = 300\ \text{cm}^2$

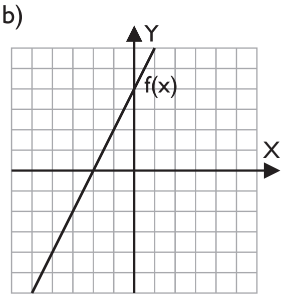
Para ampliar

33. Dada a gráfica da función f(x), fai en cada caso un debuxo aproximado da gráfica da función derivada f'(x):

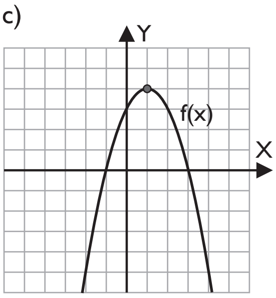
a)



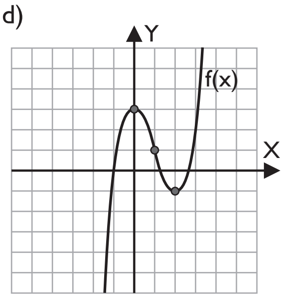
b)



c)

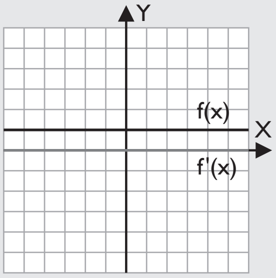


d)

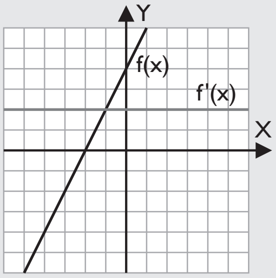


Solución:

a) A derivada dunha función constante é cero.

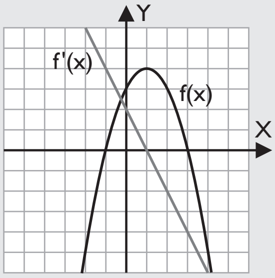


b) A derivada dunha función de primeiro grao é unha constante que coincide coa pendente da recta.

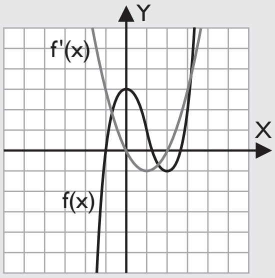


c) A derivada dunha parábola é unha recta.

A función ten en x = 1 un máximo. Logo f'(1) = 0. Así, á esquerda do máximo f é crecente (f' > 0), e á dereita, f é decrecente (f' < 0).



d) A derivada dunha cúbica é unha parábola.



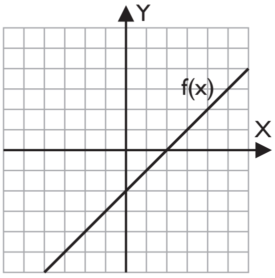
En x = 0 hai un máximo, f'(0) = 0, f' > 0 á esquerda de x = 0, e f' < 0 á dereita de x = 0.

En x = 2 hai un mínimo, f'(2) = 0, f' < 0 á esquerda de x = 2, e f' > 0 á dereita de x = 2.

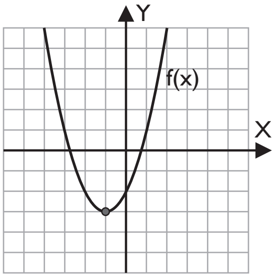
En x = 1 hai un punto de inflexión. A función f' pasa de decrecente a crecente, é dicir, f' ten un mínimo.

34. Dada a gráfica da función $f(x)$, fai en cada caso un debuxo aproximado da gráfica da función derivada $f'(x)$ e da gráfica da segunda derivada $f''(x)$:

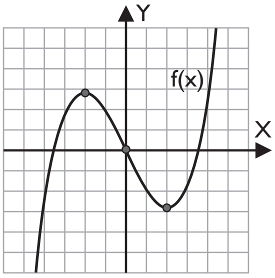
a)



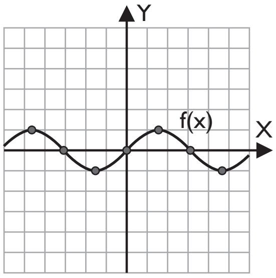
b)



c)



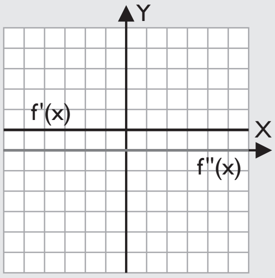
d)



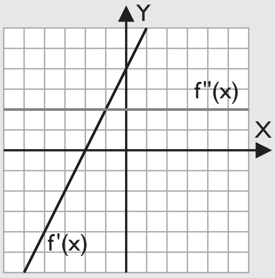
Solución:

a) f': A derivada dunha función de primeiro grao é unha constante que coincide coa pendente da recta.

f'': A derivada dunha constante é cero.



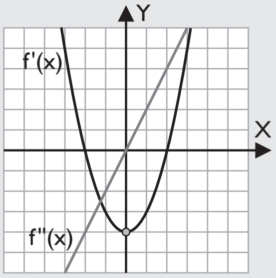
b) A derivada dunha parábola é unha recta.



f': A función ten en $x = -1$ un mínimo. Logo $f'(-1) = 0$. Entón, á esquerda do mínimo, f é decrecente ($f' < 0$), e á dereita, f é crecente ($f' > 0$).

f'': A derivada dunha función de primeiro grao é unha constante que coincide coa pendente da recta. Como f é cóncava, $f'' > 0$.

c) A derivada dunha cúbica é unha parábola.



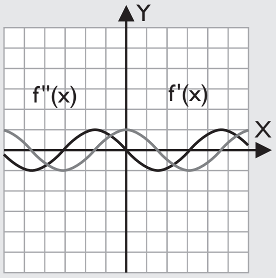
f': En $x = -2$ hai un máximo, $f'(-2) = 0$, $f' > 0$ á esquerda de $x = -2$ e $f' < 0$ á dereita de $x = -2$.

En $x = 2$ hai un mínimo, $f'(2) = 0$, $f' < 0$ á esquerda de $x = 2$ e $f' > 0$ á dereita de $x = 2$.

En $x = 0$ hai un punto de inflexión. A función f' pasa de decrecente a crecente, é dicir, f' ten un mínimo.

f'': En $x = 0$, $f''(0) = 0$, e á dereita de cero a función é cóncava ($f'' > 0$) e á esquerda de cero a función é convexa ($f'' < 0$).

d) A derivada do seno é o coseno.



f: Nos puntos de máximo relativo, $f' = 0$, e á esquerda do valor $f' > 0$, e á dereita do valor $f' < 0$.

f'': Nos puntos de inflexión, $f'' = 0$, e nos intervalos de concavidade $f'' > 0$, e nos intervalos de convexidade $f'' < 0$.

35. Considérase a curva de ecuación: $y = x^3 - 6x$

Atopa, se existen, as coordenadas dos seus máximos e mínimos relativos.

Solución:

$y' = 3x^2 - 6$

$y'' = 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Máximo relativo: $A(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

Mínimo relativo: $B(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

36. Dada a función: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

a) Determina os seus máximos e mínimos relativos.

b) Calcula os seus puntos de inflexión.

Solución:

$f'(x) = x^2 + x - 2$

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$

Máximo relativo: $A(-2, 13/3)$

Mínimo relativo: $B(1, -1/6)$

b) $f''(x) = 2x + 1$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1/2$

$f'''(x) = 2$

Punto de inflexión: $C(-1/2, 25/12)$

37. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento da función seguinte:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

Solución:

$f'(x) = 2 - \frac{1}{2x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1/2, x = 1/2$

Crecente (↗): $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$

Decrecente (↘): $(-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$

38. Dada a curva seguinte:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Calcula os máximos e mínimos relativos e os intervalos de crecemento e decrecemento da función.

Solución:

$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: non ten.

Mínimo relativo: $A(0, -1)$

Crecente (↗): $(0, +\infty)$

Decrecente (↘): $(-\infty, 0)$

39. Dada a función seguinte:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Determina os seus máximos e mínimos relativos.

Solución:

$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: $A(1, 1/2)$

Mínimo relativo: $B(-1, -1/2)$

40. Sexa a función: $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$

Calcula:

a) As coordenadas dos seus máximos e mínimos relativos.

b) Os intervalos onde é crecente e decrecente.

Solución:

$f'(x) = 4x - x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

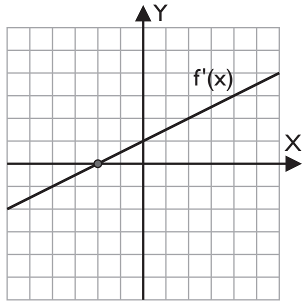
Máximo relativo: $A(4, 32/3)$

Mínimo relativo: $O(0, 0)$

Crecente (↗): $(0, 4)$

Decrecente (↘): $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

41. A gráfica seguinte corresponde á función $f'(x)$, primeira derivada dunha certa función $f(x)$:



a) Estuda o crecemento e decrecemento da función $f(x)$ interpretando a gráfica de $f'(x)$.

b) Estuda a concavidade, convexidade e puntos de inflexión da función $f(x)$ utilizando unicamente a gráfica de $f'(x)$.

Solución:

a) A función derivada faise cero en $x = -2$.

Á esquerda de $x = -2$, $f'(x) < 0$; logo $f(x)$ é decrecente en $(-\infty, -2)$.

Á dereita de $x = -2$, $f'(x) > 0$; logo $f(x)$ é crecente en $(-2, +\infty)$.

En $x = -2$ a función $f(x)$ ten un mínimo.

b) $f'(x)$ é crecente en $\mathbb{R}$. Polo tanto, a función $f(x)$ é convexa en $\mathbb{R}$; logo non ten puntos de inflexión.

42. Calcula dous números positivos tales que o seu produto sexa 192 e a suma de tres veces o primeiro máis o segundo sexa mínima.

Solución:

a) Incógnitas e datos.

x = primeiro número.

y = segundo número.

$xy = 192$

b) Función que hai que minimizar.

$f(x, y) = 3x + y$

Suxeito a: $xy = 192 \Rightarrow y = \frac{192}{x}$

c) Escríbese a función cunha soa variable.

$$f(x) = 3x + \frac{192}{x}$$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos relativos derivando.

$$f'(x) = 3 - \frac{192}{x^2}$$

$$3 - \frac{192}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -8, x = 8$$

Se $x = 8 \Rightarrow y = 24$

O valor $x = -8$ non é válido, xa que se piden números positivos.

e) Compróbase na segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{384}{x^3}$$

$f''(8) = 3/4 > 0$ (+) $\Rightarrow$ mínimo relativo.

f) O primeiro número é $x = 8$; o segundo, $y = 24$, e a suma pedida, $f(x) = 48$.

43. Sexa P(x) un polinomio de grao catro tal que verifica as tres condicións seguintes:

- P(x) é unha función par.
- Dúas das súas raíces son: $x = 1, x = -\sqrt{5}$
- $P(0) = 5$

Atopa os seus puntos de inflexión.

Solución:

a) Se é función par:

$P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

b) Se $x = 1$ é raíz e $x = -\sqrt{5}$ é raíz:

$P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

$P(-\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow 25a + 5b + c = 0$

c) Se $P(0) = 5$:

$c = 5$

Resólvese o sistema:

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 25a + 5b + c &= 0 \\ c &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$a = 1, b = -6, c = 5$

A función é:

$P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

Os seus puntos de inflexión serán:

$P'(x) = 4x^3 - 12x$

$P''(x) = 12x^2 - 12$

$P''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$P'''(x) = 24x$

$P'''(-1) = -24 \neq 0$

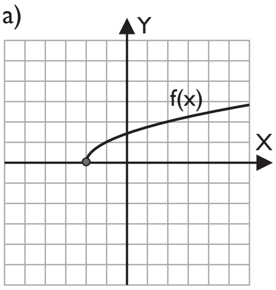
$P'''(1) = 24 \neq 0$

Puntos de inflexión: A(– 1, 0), B(1, 0)

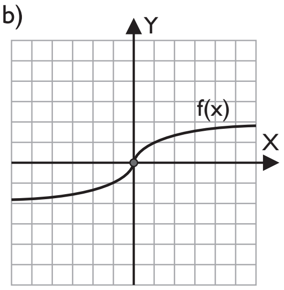
Problemas

44. Dada a gráfica da función f(x), fai, en cada caso, un debuxo aproximado da gráfica da función derivada f'(x):

a)

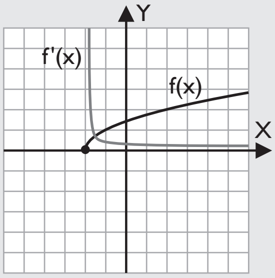


b)



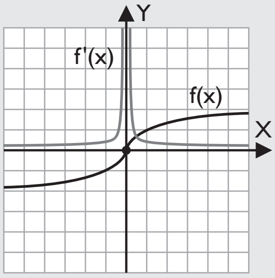
Solución:

a)



Como f(x) é crecente, $f'(x) > 0$. Como f(x) é cóncava, f'(x) é decrecente, e cando x tende a –2 pola dereita, f'(x) debe tender a infinito, é dicir, a recta tanxente debe ser unha recta vertical.

b)



Como f(x) é crecente, $f'(x) > 0$. En $(-\infty, 0)$ a función é convexa, polo que f'(x) debe ser crecente, e en $(0, +\infty)$ a función f(x) é cóncava, logo f'(x) é decrecente. En $x = 0$ a tanxente á gráfica sería vertical e as derivadas laterais tenderían a infinito.

45. Sexa a función: $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ con $x \neq 0$

a) Atopa as coordenadas dos seus máximos e mínimos relativos. Estuda a monotonía.

b) Determina os intervalos de concavidade e convexidade.

Solución:

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: $A(-1, -2)$

Mínimo relativo: $B(1, 2)$

Crecente (↗):$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decrecente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

b) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Punto de inflexión: non ten.

Convexa (∪): $(0, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$

46. Dada a función:

$$f(x) = \frac{9x - 3}{x^2 - 2x} \text{ para } x \neq 0 \text{ e } x \neq 2,$$

Determina os intervalos de crecemento e decrecemento da función.

Solución:

$f'(x) = -\dfrac{3(3x^2 - 2x + 2)}{x^2(x - 2)^2}$

$f'(x) \neq 0$ para todo x.

Máximo relativo: non ten.

Mínimo relativo: non ten.

Crecente (↗): $\varnothing$

Decrecente (↘): $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

47. Dada a función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, calcula:

a) Os máximos e os mínimos relativos.

b) Os puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

Máximo relativo: $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}/9)$

Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}/9)$

b) $f''(x) = \dfrac{2(x^2 - 6)}{x^5}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

$f'''(x) = \dfrac{6(10 - x^2)}{x^6}$

$f'''(-\sqrt{6}) = 1/9 \neq 0$

$f'''(\sqrt{6}) = 1/9 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$C(-\sqrt{6}, -5\sqrt{6}/36), D(\sqrt{6}, 5\sqrt{6}/36)$

48. Calcula os máximos e mínimos relativos de:

$$f(x) = -x\,L\,x$$

Solución:

$f'(x) = -1 - L\,x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/e$

Máximo relativo: $A(1/e, 1/e)$

Mínimo relativo: non ten.

49. Dada a función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$

Atopa os intervalos de crecemento e decrecemento da función.

Solución:

$f'(x) = \dfrac{x(x - 4)}{(x^2 + x - 2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

Máximo relativo: $O(0, 0)$

Mínimo relativo: $A(4, 8/9)$

Crecente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty)$

Decrecente (↘): $(0, 1) \cup (1, 4)$

50. Sexa $f(x) = e^{-x}(x^2 + 6x + 9)$. Atopa os intervalos de crecemento e decrecemento.

Solución:

$f'(x) = -(x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$

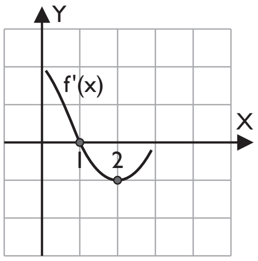
Máximo relativo: $A(-1, 4e)$

Mínimo relativo: $B(-3, 0)$

Crecente (↗): $(-3, 1)$

Decrecente (↘): $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

51. A gráfica seguinte corresponde á derivada f'(x) dunha certa función f(x). Determina a partir da gráfica se existen máximos relativos, mínimos relativos ou puntos de inflexión nos puntos de abscisa x = 1 e x = 2.

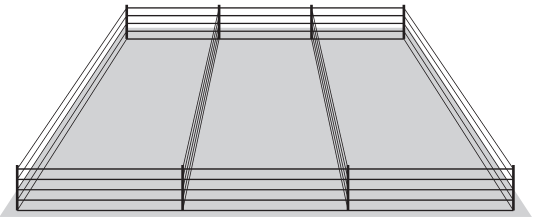


Solución:

En $x = 1$, $f'(x) = 0$. Á esquerda de $x = 1$, $f'(x) > 0$ e a función $f(x)$ é crecente; e á dereita de $x = 1$, $f'(x) < 0$ e a función $f(x)$ é decrecente. Logo $f(x)$ en $x = 1$ ten un máximo relativo.

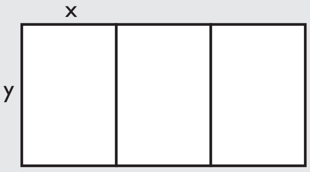
En $x = 2$, $f'(x)$ ten un mínimo relativo. Logo á esquerda de $x = 2$ a función derivada, $f'(x)$, é decrecente e, polo tanto, a función $f(x)$ é cóncava; e á dereita de $x = 2$, $f'(x)$ é crecente, polo que $f(x)$ é convexa. Polo tanto, a función $f(x)$ ten un punto de inflexión en $x = 2$.

52. Unha leira rectangular de 11 250 m^2 divídese en tres zonas rectangulares para vendela como amosa a figura. Válase o bordo do campo e a separación entre as zonas. Calcula as dimensións da leira para que a lonxitude do valado utilizado sexa mínima.



Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.



y = longo da leira.

x = ancho dunha parcela.

b) Función que hai que maximizar.

$L(x, y) = 6x + 4y$

Suxeita ás condicións:

$$3xy = 11\,250 \Rightarrow y = \frac{3\,750}{x}$$

c) Escríbese a función cunha soa variable.

$$L(x) = 6x + 4 \cdot \frac{3\,750}{x}$$

$$L(x) = 6x + \frac{15\,000}{x}$$

d) Calcúlanse os máximos e mínimos derivando.

$$L'(x) = 6 - \frac{15\,000}{x^2}$$

$L'(x) = 0 \Rightarrow x = -50, x = 50$

Se $x = 50 \Rightarrow y = 75$

O valor negativo non ten sentido.

e) Compróbase na segunda derivada.

$$L''(x) = \frac{30\,000}{x^3}$$

$L''(50) = 6/25 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) A lonxitude faise mínima para $x = 50$ m, $y = 75$ m.

53. Hai que construír un gran depósito cilíndrico de $81\pi\ m^3$ de volume. A superficie lateral terá que ser construída cun material que custa 30 €/m^2, e as dúas bases cun material que custa 45 €/m^2.

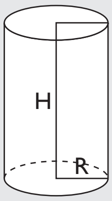
a) Determina a relación que hai entre o raio, R, das bases circulares e a altura, H, do cilindro, e dá o custo, C(R), do material necesario para construír o depósito en función de R.

b) Que dimensións deberá ter o depósito para que o custo dos materiais necesarios sexa o mínimo posible?

c) Cal será, neste caso, o custo do material?

Solución:

a)



R = raio do cilindro.

H = altura do cilindro.

Volume = $\pi R^2 H = 81\pi\ m^3$

$C(R) = 30 \cdot 2\pi RH + 2 \cdot 45 \cdot \pi R^2$

$$C(R) = 60\pi R \frac{81}{R^2} + 90\pi R^2$$

$$C(R) = \frac{4\,860\pi}{R} + 90\pi R^2$$

b) Para calcular o custo mínimo, derívase:

$$C'(R) = -\frac{4\,860\pi}{R^2} + 180\pi R$$

$$-\frac{4\,860\pi}{R^2} + 180\pi R = 0 \Rightarrow R = 3$$

Se $R = 3$ m $\Rightarrow H = 9$ m

Compróbase na segunda derivada:

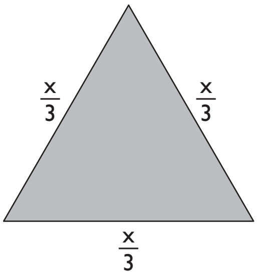
$$C''(R) = \frac{9\,720\pi}{R^3} + 180\pi$$

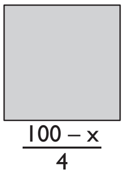
$C''(3) = 540\pi > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

c) $C(3) = 2\,430\pi$ € = 7 634,07 €

Exercicios e problemas

54. Divídese un arame de 100 m de lonxitude en dous segmentos de lonxitude **x** e 100 – x. Co de lonxitude **x** fórmase un triángulo equilátero e co outro segmento fórmase un cadrado. Sexa f(x) a suma das áreas do triángulo e do cadrado.





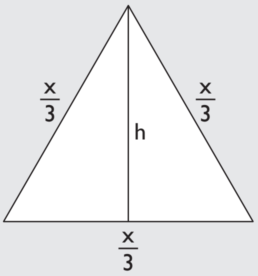
a) Determina o dominio da función **f**, é dicir, os valores que pode tomar **x**.

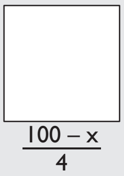
b) Co estudo da derivada de **f** obtén cando **f** é crecente e cando é decrecente.

c) Obtén de forma razoada para que valor de **x** se obtén que a suma das áreas do triángulo e o cadrado é mínima.

Solución:

a)





$$f(x, h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot h + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$$

A altura do triángulo:

$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$$

Dom (f) = (0, 100)

b) $f'(x) = \frac{x\sqrt{3}}{18} + \frac{x - 100}{8}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{900}{9 + 4\sqrt{3}}$$

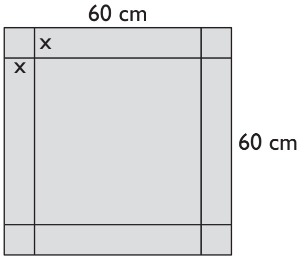
Crecente (↗): $\left(\frac{900}{9 + 4\sqrt{3}}, 100\right)$

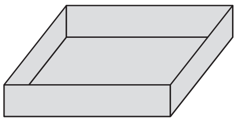
Decrecente (↘): $\left(0, \frac{900}{9 + 4\sqrt{3}}\right)$

c) $f''(x) = \frac{4\sqrt{3} + 9}{72} > 0$ para todo **x** do dominio.

Logo a área será mínima.

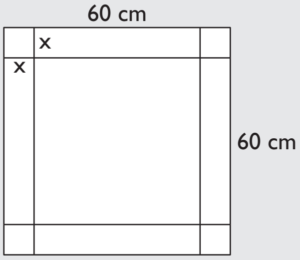
55. A partir dunha cartolina cadrada de 60 cm de lado vaise construír unha caixa de base cadrada, sen tapa, a base de recortar catro cadrados iguais nas esquinas da cartolina e dobrando despois da maneira axeitada. Un observador indica que a caixa de máis capacidade se obterá se os cadrados eliminados teñen 10 cm de lado. Decide se a observación é correcta ou non.





Solución:

a) Incógnitas, datos e debuxo.



b) Función que hai que maximizar.

$V(x) = (60 - 2x)^2x$

$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3\,600x$

c) Calcúlanse os máximos e mínimos derivando.

$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3\,600$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 30$

d) Compróbase na segunda derivada.

$V''(x) = 24x - 480$

$V''(10) = -240 < 0$ (–) ⇒ máximo relativo.

$V''(30) = 240 > 0$ (+) ⇒ mínimo relativo.

e) Como o máximo se obtén para x = 10, a observación é correcta.

56. Considérase a función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Atopa a ecuación cartesiana da recta tanxente no punto de inflexión de abscisa positiva.

Solución:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$$f'''(x) = \frac{24x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$$

$f'''(1) = 3/16 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(1, 1/4)$

Recta tanxente en A:

$y - 1/4 = f'(1)(x - 1)$

$$y - 1/4 = -\frac{1}{8}(x - 1)$$

$$y = \frac{3 - x}{8}$$

57. Considérase a función seguinte:

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) Atopa os extremos relativos da función f(x) e os seus intervalos de concavidade e convexidade.

b) Atopa o máximo e o mínimo absolutos no intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{(4 - x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{1}{8} > 0$$

Máximo relativo: non ten.

Mínimo relativo: $A(0, 1/4)$

Punto de inflexión: non ten.

Convexa ($\cup$): $(-2, 2)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Para calcular os máximos e mínimos absolutos, obsérvase que a función é continua en $[-1, 1]$, é decrecente en $(-1, 0)$ e é crecente en $(0, 1)$.

Como:

$f(-1) = 1/3$

$f(1) = 1/3$

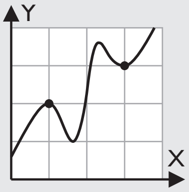
temos:

o mínimo absoluto é $A(0, 1/4)$, que coincide co mínimo relativo, e o máximo absoluto alcánzase nos extremos do intervalo.

Para profundar

58. Se é posible, debuxa de forma clara a gráfica dunha función continua no intervalo $[0, 4]$ que teña polo menos un máximo relativo no punto $(1, 2)$ e un mínimo relativo no punto $(3, 3)$. Se a función fose polinómica, cal sería como mínimo o seu grao?

Solución:



Obsérvase que f ten polo menos 4 extremos. Polo tanto, f' anúlase 4 veces, é dicir, é de grao catro. Se a función é polinómica, para que f' sexa de grao catro, f debe ser de grao 5.

59. Para cada valor de **a** considérase a función:

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4 \, L \, x$$

a) Calcula o valor do parámetro real **a**, sabendo que a función ten un extremo relativo no punto de abscisa $x = 1$. Clasifica o extremo.

b) Estuda os intervalos de crecemento e decrecemento para $a = 3$.

Solución:

a) $f'(x) = 2 + 2ax - \dfrac{4}{x}$

Temos un extremo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

$2 + 2a - 4 = 0$

$2a - 2 = 0$

$a = 1$

$$f''(x) = 2a + \frac{4}{x^2}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{4}{x^2}$$

$f''(1) = 6 > 0 \ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

Para $x = 1$ temos un mínimo relativo.

b) $f'(x) = 2 + 6x - \dfrac{4}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2/3, x = -1$

$x = -1$ non pertence ao dominio de f(x).

Se: $x = 2/3, f(2/3) = 8/3 - 4 \, L(2/3)$

Máximo relativo: non ten.

Mínimo relativo: $(2/3, 8/3 - 4 \, L(2/3))$

Crecente ($\nearrow$): $(2/3, +\infty)$

Decrecente ($\searrow$): $(0, 2/3)$

60. Sábese que a función $f(x) = x^3 + ax + b$ corta a súa función derivada en $x = 1$ e que ademais, neste punto, **f** ten un extremo.

a) Determina os valores de **a** e **b**.

b) Determina a natureza do extremo que **f** ten no punto $x = 1$.

c) Ten **f** algún outro extremo?

Solución:

a) Se f e f'se cortan en $x = 1$:

$f'(x) = 3x^2 + a$

$3 + a = 1 + a + b$

Se en $x = 1$ hai un extremo, $f'(1) = 0$.

$3 + a = 0$

Resólvese o sistema: $\left.\begin{array}{l} 3 + a = 0 \\ 3 + a = 1 + a + b \end{array}\right\}$

$a = -3, b = 2$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$f''(-1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

61. Dada a función $f(x) = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula os valores de **a** e **b** sabendo que a función ten dous puntos de inflexión, un en $x = 1$ e outro en $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 12a + 18b - 6 = 0 \Rightarrow 2a + 3b = 1$

$f''(1/2) = 0 \Rightarrow 3a + 9b - 6 = 0 \Rightarrow a + 3b = 2$

Resólvese o sistema: $a = -1, b = 1$

62. Da función $f(x) = ax^3 + bx$ sábese que ten unha gráfica que pasa por (1, 1) e que nese punto ten unha tanxente paralela a $3x + y = 0$. Atopa **a** e **b**.

Solución:

Pásase por: $(1, 1) \Rightarrow f(1) = 1$

$a + b = 1$

Se en (1, 1) a tanxente é paralela a $y = -3x$, $f'(1) = -3$.

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$3a + b = -3$

Resólvese o sistema:

$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{array}\right\}$

$a = -2, b = 3$

63. A función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ e $f(x)$ non ten un extremo relativo en $x = 1$. Calcula **a**, **b** e **c**.

Solución:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$

Se non hai extremo relativo e $f'(1) = -3$, hai un punto de inflexión:

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$

Resólvese o sistema das tres ecuacións:

$a = -3, b = 3, c = 0$

64. O número total de bacterias (en miles) presentes nun cultivo despois de **t** horas vén dado por:

$$N(t) = 2t(t - 10)^2 + 50$$

a) Calcula a función derivada.

b) Durante as 10 primeiras horas, en que instante se alcanza a poboación máxima e a mínima?

Solución:

$N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100)$

$N'(t) = 0 \Rightarrow t = 10/3, t = 10$

Máximo relativo: A(10/3, 9 350/27)

Mínimo relativo: B(10, 50)

Compróbanse os extremos do intervalo [0, 10].

$f(0) = 50$

O mínimo alcánzase nos extremos, é dicir, en $t = 0$ e $t = 10$ con 50 000 bacterias, e o máximo alcánzase en $t = 10/3$ con 9 350/27 = 346 296 bacterias.

65. A capacidade de concentración dunha saltadora de altura nunha reunión atlética de tres horas de duración vén dada pola función $f(t) = 300t(3 - t)$, onde **t** mide o tempo en horas.

a) Calcula os intervalos nos cales a capacidade de concentración aumenta e os intervalos nos que diminúe. Cando é nula?

b) Cal é o mellor momento, en termos da súa capacidade de concentración, para que a saltadora poida bater a súa propia marca?

Solución:

a) $f'(t) = -600\,t + 900$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 3/2$

Máximo relativo: A(3/2, 675)

Mínimo relativo: non ten.

Crecente (↗): (0, 3/2)

Decrecente (↘): (3/2, 3)

É nula en: $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ e $t = 3$

b) Cando se alcanza o máximo de concentración en $t = 3/2$.

66. Sexa a función: $f(x) = x^2 - 4x + 2$

a) Determina os extremos relativos da función.

b) Atopa as ecuacións das rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ que pasan polo punto $(3, -5)$.

Solución:

a) $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Máximo relativo: non ten.

Mínimo relativo: $A(2, -2)$

b) Unha recta que pasa polo punto $(3, -5)$ é:

$y + 5 = m(x - 3) \Rightarrow y = mx - 3m - 5$

Para que a recta sexa tanxente á parábola, esta e a recta só deben ter un punto en común, é dicir, o sistema formado pola ecuación da función e a recta debe ter solución única.

Obsérvase que o punto $(3, -5)$ non está na parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = mx - 3m - 5 \end{array}\right\}$$

$x^2 - (4 + m)x + 3m + 7 = 0$

Para que teña unha solución, o discriminante debe ser cero:

$(4 + m)^2 - 4(3m + 7) = 0$

$m^2 - 4m - 12 = 0$

$m = -2, m = 6$

As rectas tanxentes son:

$y = -2x + 1$

$y = 6x - 23$

Paso a paso

67. Dada a función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) Debuxa a función.
b) Calcula os máximos e os mínimos relativos.
c) Determina a monotonía.
d) Calcula os puntos de inflexión.
e) Atopa a curvatura.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

68. Calcula o valor dos coeficientes **a**, **b** e **c** para que a función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ corte o eixe X no punto A(1, 0) e teña un punto de inflexión no punto B(3, 2).

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

Formula o problema que aparece a continuación e resólveo coa axuda de Wiris e Derive:

69. Deséxase fabricar unha caixa aberta con base cadrada e cunha área de 300 dm^2. Que dimensións debe ter a caixa para que o volume sexa máximo?

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

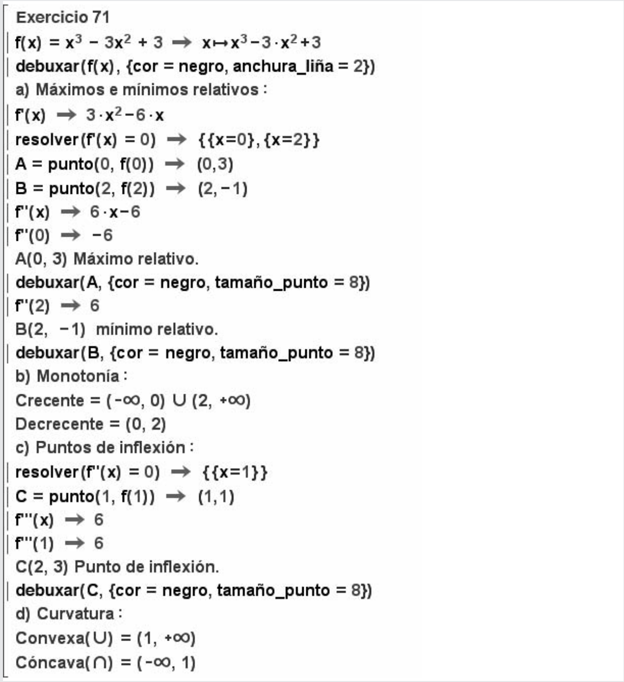
70. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

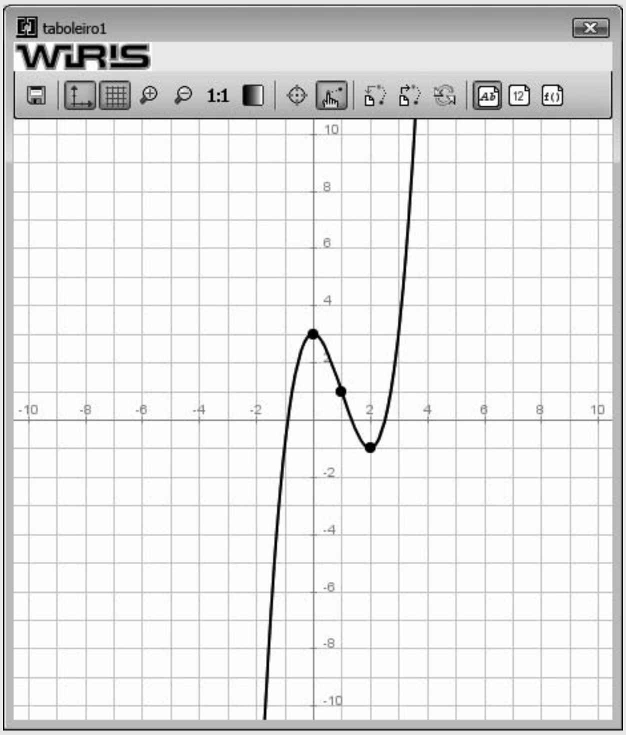
Dada as seguintes funcións:
a) Debuxa a función.
b) Calcula os máximos e os mínimos relativos.
c) Determina a monotonía.
d) Calcula os puntos de inflexión.
e) Atopa a curvatura.

71. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

Solución:

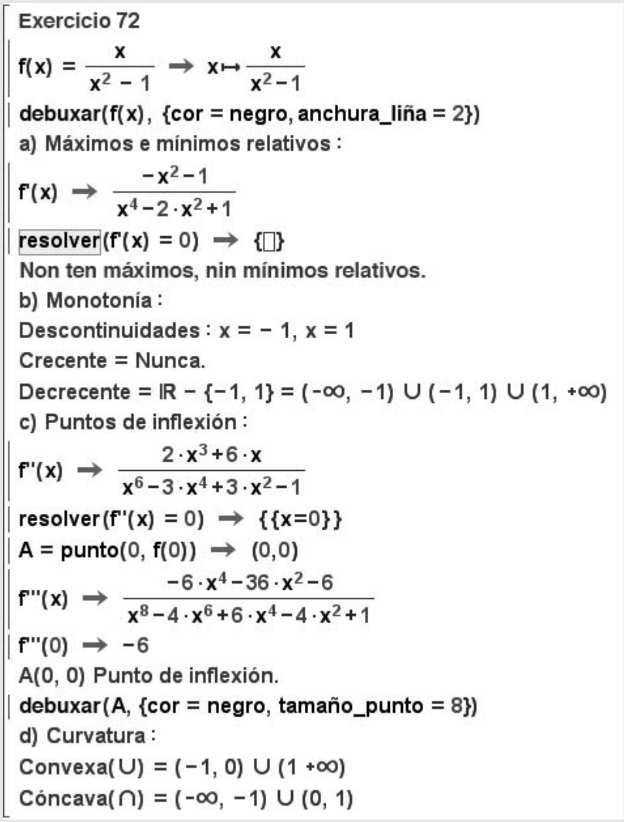


```
Exercicio 71
f(x) = x³ − 3x² + 3  ➞  x↦x³−3·x²+3
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})
a) Máximos e mínimos relativos :
f'(x)  ➞  3·x²−6·x
resolver(f'(x) = 0)  ➞  {{x=0}, {x=2}}
A = punto(0, f(0))  ➞  (0,3)
B = punto(2, f(2))  ➞  (2,−1)
f''(x)  ➞  6·x−6
f''(0)  ➞  −6
A(0, 3) Máximo relativo.
debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 8})
f''(2)  ➞  6
B(2,  −1)  mínimo relativo.
debuxar(B, {cor = negro, tamaño_punto = 8})
b) Monotonía :
Crecente = (-∞, 0) ∪ (2, +∞)
Decrecente = (0, 2)
c) Puntos de inflexión :
resolver(f''(x) = 0)  ➞  {{x=1}}
C = punto(1, f(1))  ➞  (1,1)
f'''(x)  ➞  6
f'''(1)  ➞  6
C(2, 3) Punto de inflexión.
debuxar(C, {cor = negro, tamaño_punto = 8})
d) Curvatura :
Convexa(∪) = (1, +∞)
Cóncava(∩) = (-∞, 1)
```



72. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Solución:



Exercicio 72

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

a) Máximos e mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow \dfrac{-x^2-1}{x^4-2\cdot x^2+1}$

resolver(f'(x) = 0) → $\{\square\}$

Non ten máximos, nin mínimos relativos.

b) Monotonía :

Descontinuidades : x = − 1, x = 1

Crecente = Nunca.

Decrecente = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

c) Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow \dfrac{2\cdot x^3+6\cdot x}{x^6-3\cdot x^4+3\cdot x^2-1}$

resolver(f''(x) = 0) → {{x=0}}

A = punto(0, f(0)) → (0,0)

$f'''(x) \rightarrow \dfrac{-6\cdot x^4-36\cdot x^2-6}{x^8-4\cdot x^6+6\cdot x^4-4\cdot x^2+1}$

f'''(0) → −6

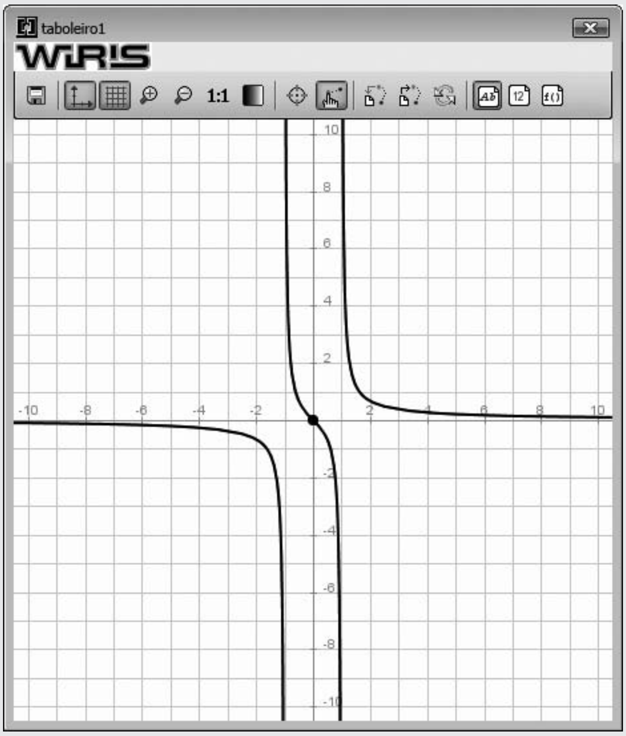
A(0, 0) Punto de inflexión.

debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

d) Curvatura :

Convexa(∪) = $(-1, 0) \cup (1 +\infty)$

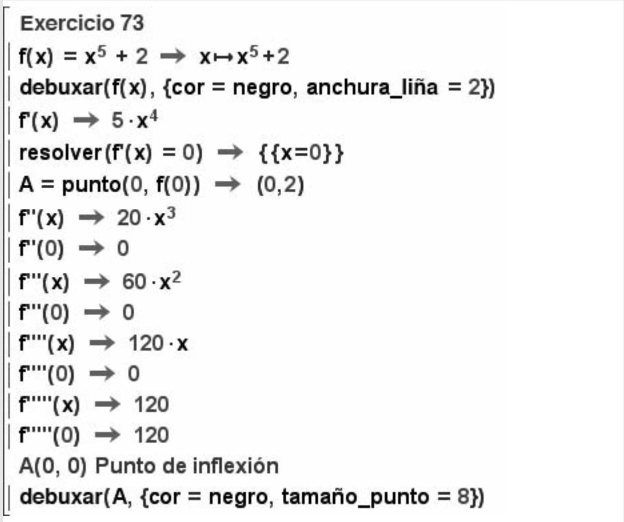
Cóncava(∩) = $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



73. Atopa os puntos singulares da función:

$f(x) = x^5 + 2$

Solución:



Exercicio 73

$f(x) = x^5 + 2 \rightarrow x \mapsto x^5+2$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

$f'(x) \rightarrow 5\cdot x^4$

resolver(f'(x) = 0) → {{x=0}}

A = punto(0, f(0)) → (0,2)

$f''(x) \rightarrow 20\cdot x^3$

f''(0) → 0

$f'''(x) \rightarrow 60\cdot x^2$

f'''(0) → 0

$f''''(x) \rightarrow 120\cdot x$

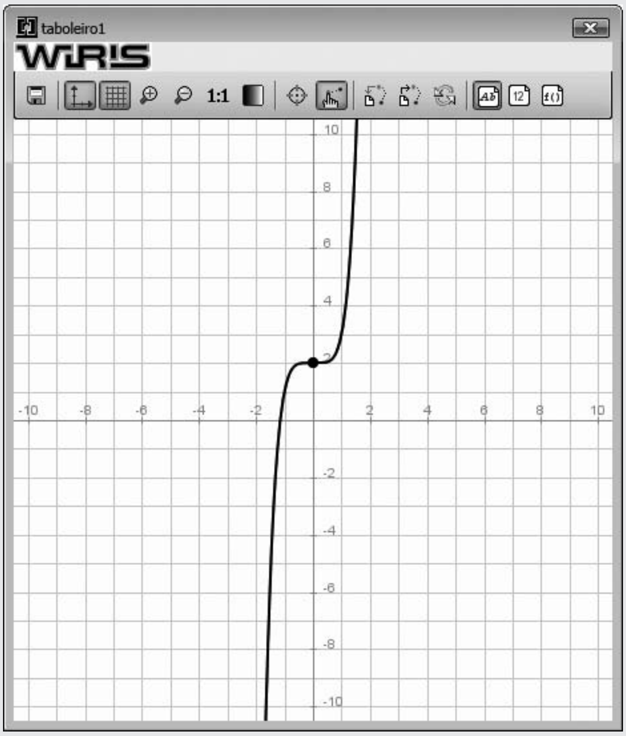
f''''(0) → 0

f'''''(x) → 120

f'''''(0) → 120

A(0, 0) Punto de inflexión

debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

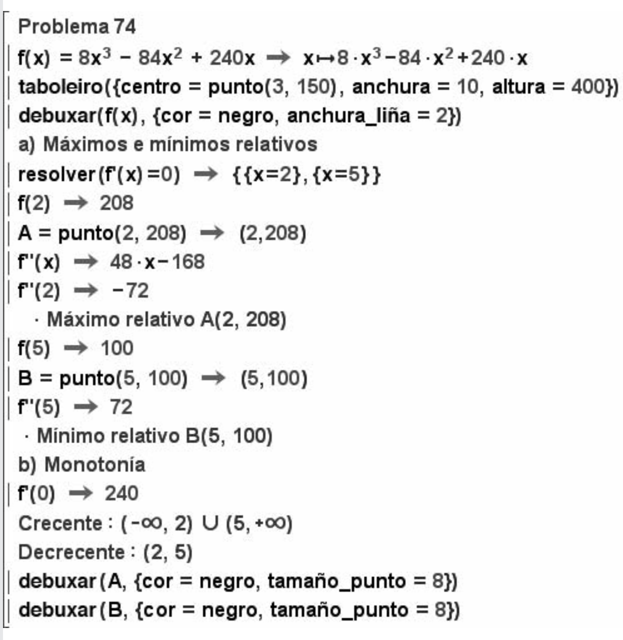


74. Para a función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da forma:

$$f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$$

Determina a súa monotonía e extremos relativos.

Solución:



Problema 74

$f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x \rightarrow x \mapsto 8 \cdot x^3 - 84 \cdot x^2 + 240 \cdot x$

taboleiro({centro = punto(3, 150), anchura = 10, altura = 400})

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

a) Máximos e mínimos relativos

resolver(f'(x)=0) → {{x=2}, {x=5}}

f(2) → 208

A = punto(2, 208) → (2,208)

f''(x) → 48·x−168

f''(2) → −72

· Máximo relativo A(2, 208)

f(5) → 100

B = punto(5, 100) → (5,100)

f''(5) → 72

· Mínimo relativo B(5, 100)

b) Monotonía

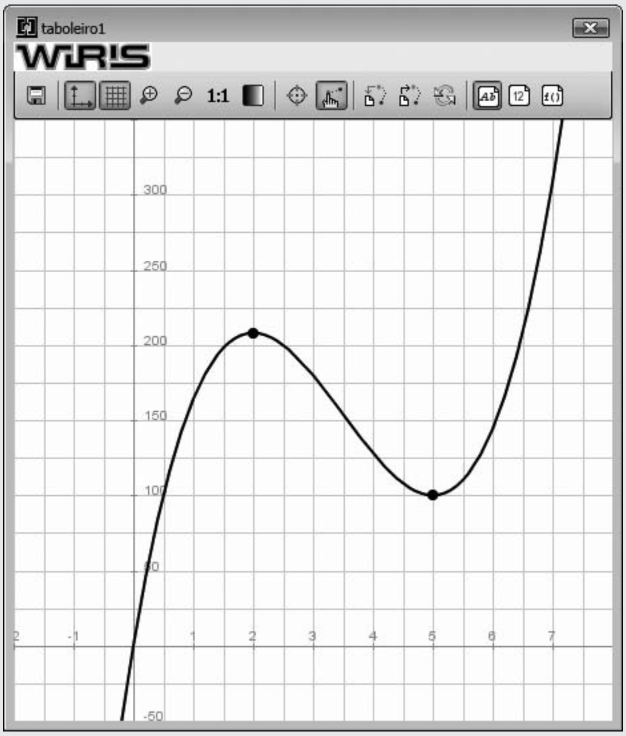
f'(0) → 240

Crecente : $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$

Decrecente : (2, 5)

debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar(B, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

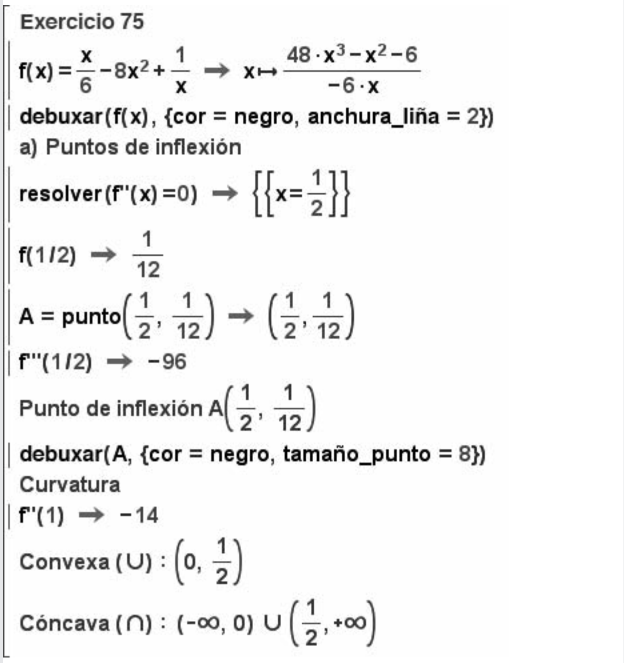


75. Dada a función:

$$f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x}$$

Calcula os intervalos de concavidade e convexidade e os puntos de inflexión da función.

Solución:



Exercicio 75

$f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{48 \cdot x^3 - x^2 - 6}{-6 \cdot x}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

a) Puntos de inflexión

resolver(f''(x)=0) → $\left\{\left[x = \frac{1}{2}\right]\right\}$

f(1/2) → $\frac{1}{12}$

A = punto$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$

f'''(1/2) → −96

Punto de inflexión A$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$

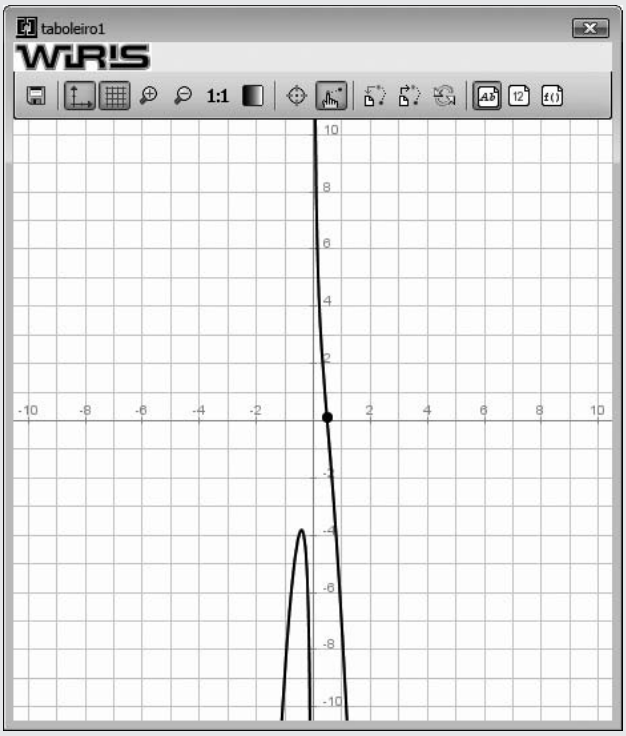
debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

Curvatura

f''(1) → −14

Convexa (∪) : $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Cóncava (∩) : $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

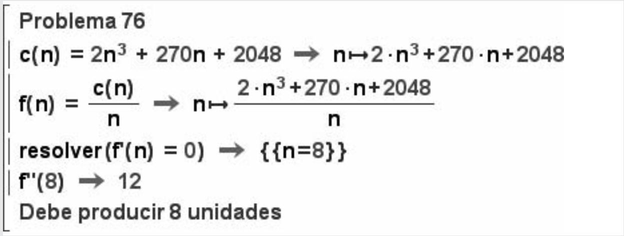


76. Determinouse que o custo total (en euros) que lle supón a certa empresa a produción de **n** unidades de determinado artigo varía segundo a función:

$$c(n) = 2n^3 + 270n + 2\,048$$

Calcula o número de unidades que debe producirse para facer mínimo o custo por unidade.

Solución:



Problema 76

$c(n) = 2n^3 + 270n + 2048 \rightarrow n \mapsto 2 \cdot n^3 + 270 \cdot n + 2048$

$f(n) = \dfrac{c(n)}{n} \rightarrow n \mapsto \dfrac{2 \cdot n^3 + 270 \cdot n + 2048}{n}$

resolver$(f'(n) = 0) \rightarrow \{\{n=8\}\}$

$f''(8) \rightarrow 12$

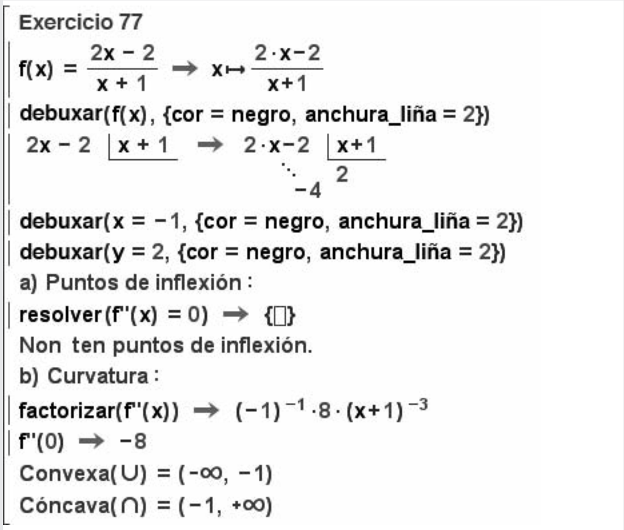
Debe producir 8 unidades

77. Calcula os puntos de inflexión da función:

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

e os intervalos de concavidade e convexidade.

Solución:



Exercicio 77

$f(x) = \dfrac{2x - 2}{x + 1} \rightarrow x \mapsto \dfrac{2 \cdot x - 2}{x + 1}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

$2x - 2 \;\underline{|\,x + 1} \rightarrow 2 \cdot x - 2 \;\underline{|\,x+1}$ $\;\ddots\; -4 \quad 2$

debuxar(x = −1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(y = 2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

a) Puntos de inflexión :

resolver$(f''(x) = 0) \rightarrow \{\square\}$

Non ten puntos de inflexión.

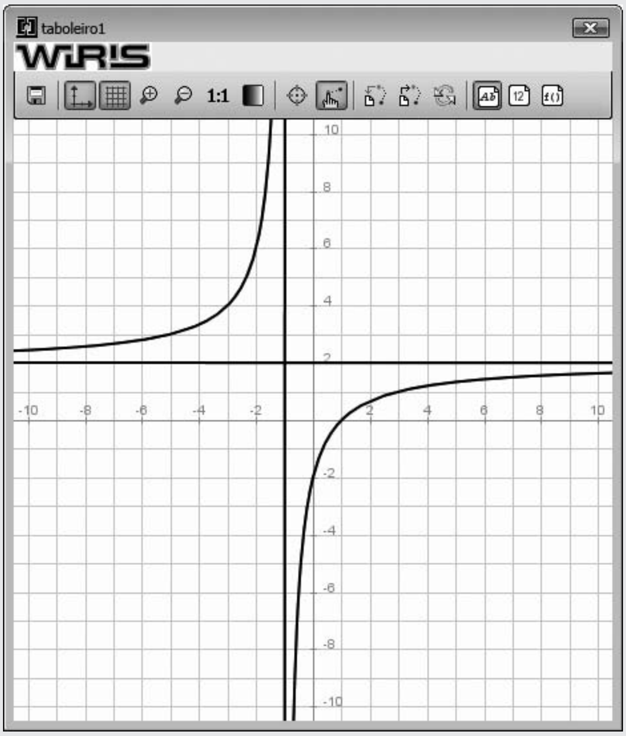
b) Curvatura :

factorizar$(f''(x)) \rightarrow (-1)^{-1} \cdot 8 \cdot (x+1)^{-3}$

$f''(0) \rightarrow -8$

Convexa(∪) = (−∞, −1)

Cóncava(∩) = (−1, +∞)

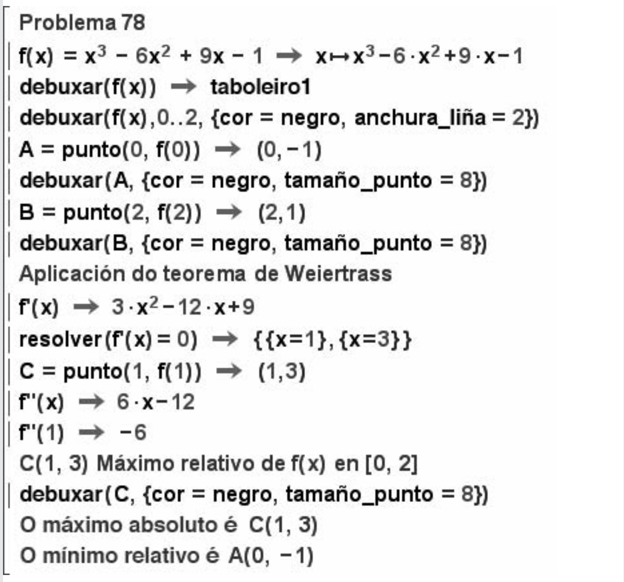


78. Atopa o máximo e o mínimo absolutos da seguinte función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

no intervalo [1, 2].

Solución:



Problema 78

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \rightarrow x \mapsto x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 1$

debuxar(f(x)) → taboleiro1

debuxar(f(x),0..2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

A = punto(0, f(0)) → (0, −1)

debuxar(A, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

B = punto(2, f(2)) → (2,1)

debuxar(B, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

Aplicación do teorema de Weiertrass

$f'(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$

resolver$(f'(x) = 0) \rightarrow \{\{x=1\}, \{x=3\}\}$

C = punto(1, f(1)) → (1,3)

$f''(x) \rightarrow 6 \cdot x - 12$

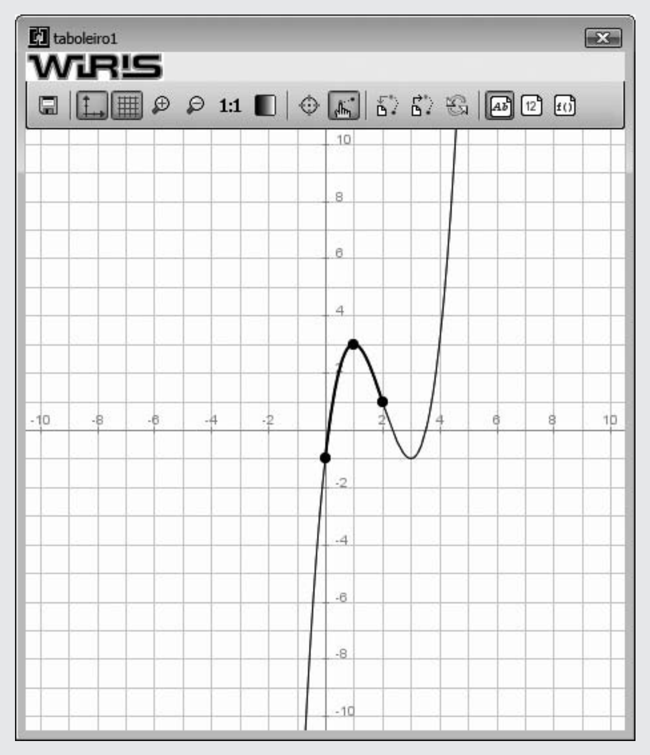
$f''(1) \rightarrow -6$

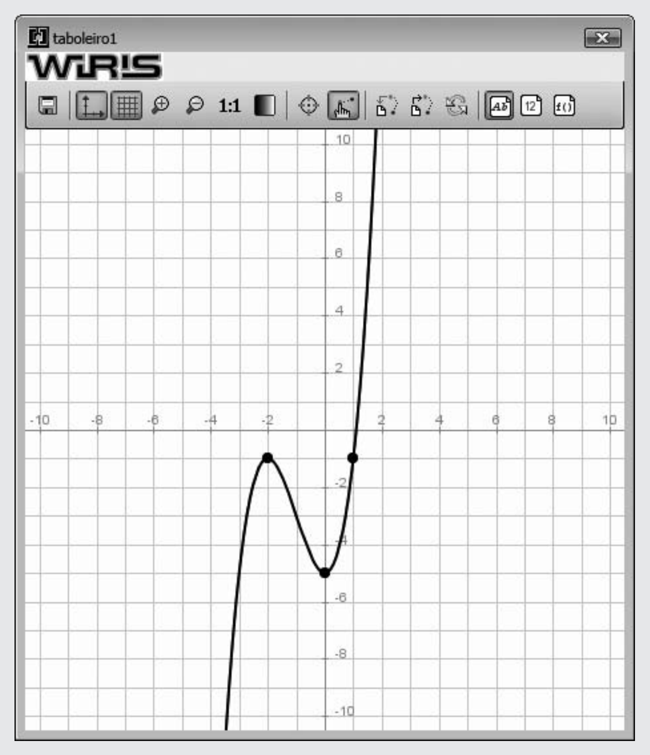
C(1, 3) Máximo relativo de f(x) en [0, 2]

debuxar(C, {cor = negro, tamaño_punto = 8})

O máximo absoluto é C(1, 3)

O mínimo relativo é A(0, −1)



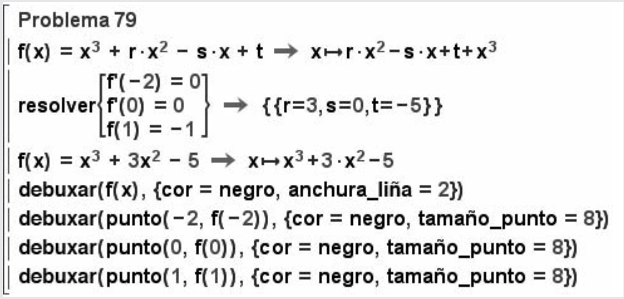


79. Obtén os parámetros **r**, **s** e **t** para que a función:

$$f(x) = x^3 + rx^2 - sx + t$$

teña un máximo en $x = -2$, un mínimo en $x = 0$ e pase polo punto $(1, -1)$.

Solución:



Problema 79

$f(x) = x^3 + r\cdot x^2 - s\cdot x + t \Rightarrow x\mapsto r\cdot x^2 - s\cdot x + t + x^3$

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\{r=3, s=0, t=-5\}\}$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5 \Rightarrow x\mapsto x^3 + 3\cdot x^2 - 5$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(−2, f(−2)), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar(punto(0, f(0)), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

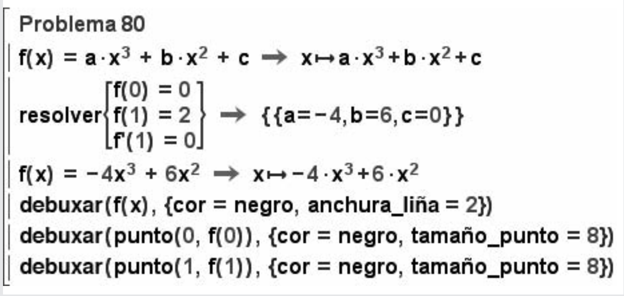
debuxar(punto(1, f(1)), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

80. A gráfica da función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

pasa polo punto $(0, 0)$ e ten un máximo local no punto $(1, 2)$. Obtén os valores dos coeficientes **a**, **b** e **c**.

Solución:



Problema 80

$f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c \Rightarrow x\mapsto a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c$

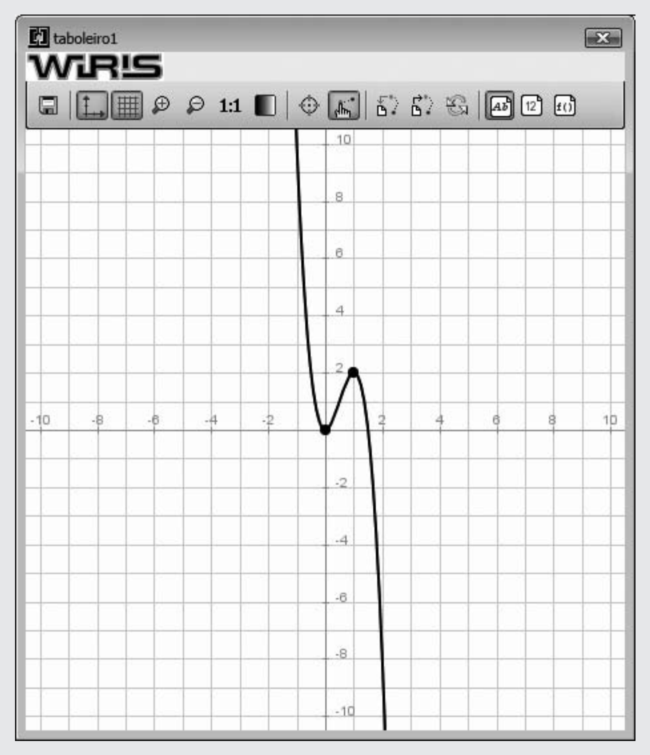
$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} f(0) = 0 \\ f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\{a=-4, b=6, c=0\}\}$

$f(x) = -4x^3 + 6x^2 \Rightarrow x\mapsto -4\cdot x^3 + 6\cdot x^2$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(0, f(0)), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar(punto(1, f(1)), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

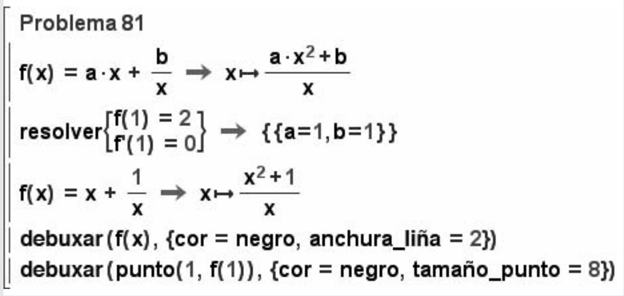


81. Atopa os valores de **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

teña un extremo relativo no punto (1, 2).

Solución:



Problema 81

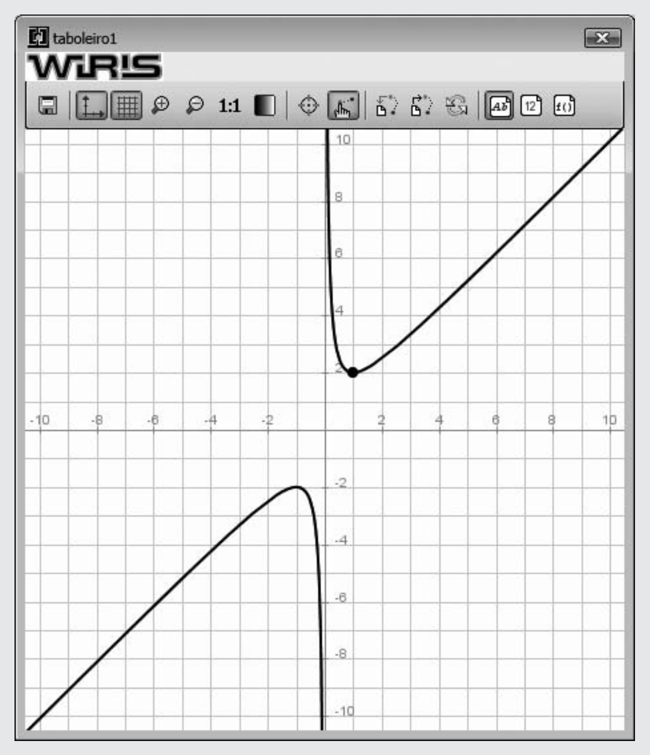
$f(x) = a \cdot x + \frac{b}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{a \cdot x^2 + b}{x}$

$\text{resolver}\begin{Bmatrix} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{a=1, b=1\}\}$

$f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+1}{x}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(1, f(1)), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

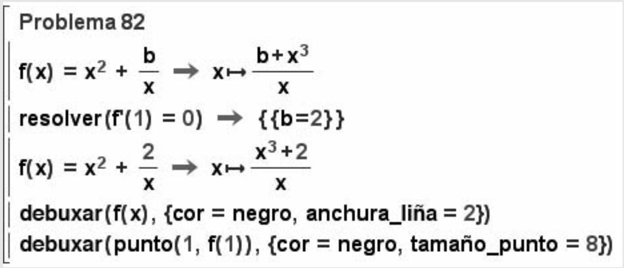


82. Atopa o valor de **b** ∈ ℝ para que a función:

$$f(x) = x^2 + \frac{b}{x}$$

teña un mínimo cando x = 1.

Solución:



Problema 82

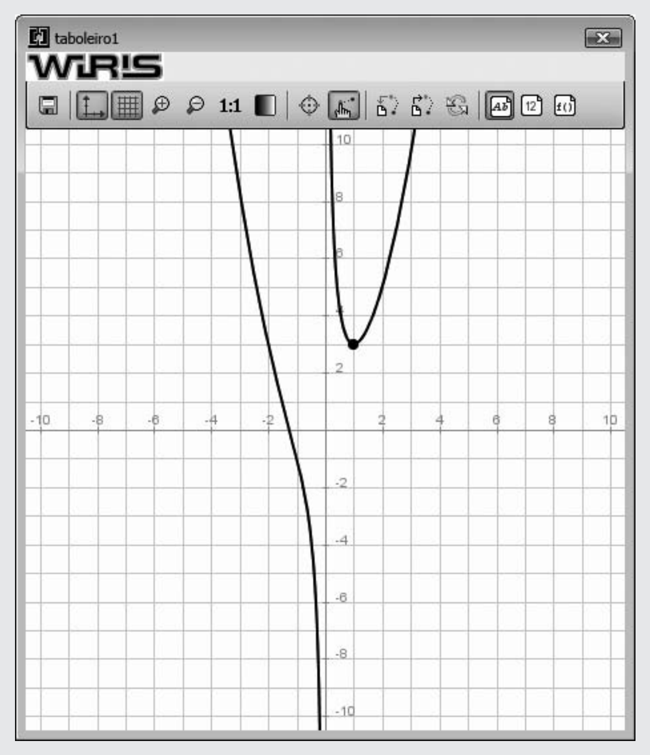
$f(x) = x^2 + \frac{b}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{b + x^3}{x}$

$\text{resolver}(f'(1) = 0) \rightarrow \{\{b=2\}\}$

$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3+2}{x}$

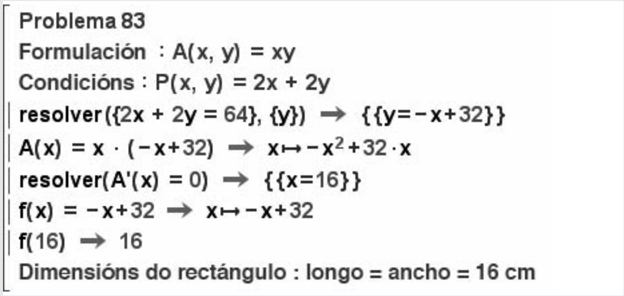
debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(1, f(1)), {cor = negro, tamaño_punto = 8})



83. Calcula as dimensións dun rectángulo cuxo perímetro mide 64 m e a súa área é máxima.

Solución:



Problema 83

Formulación : $A(x, y) = xy$

Condicións : $P(x, y) = 2x + 2y$

$\text{resolver}(\{2x + 2y = 64\}, \{y\}) \rightarrow \{\{y = -x + 32\}\}$

$A(x) = x \cdot (-x + 32) \rightarrow x \mapsto -x^2 + 32 \cdot x$

$\text{resolver}(A'(x) = 0) \rightarrow \{\{x = 16\}\}$

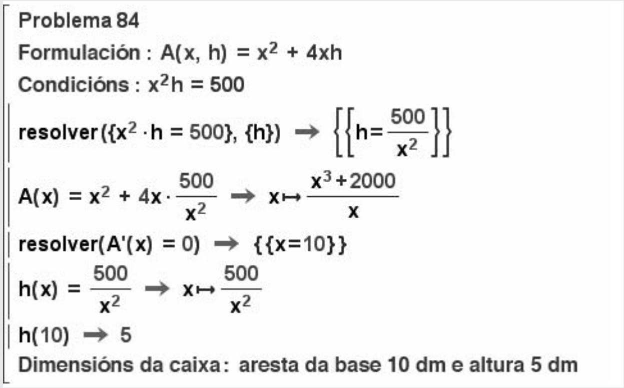
$f(x) = -x + 32 \rightarrow x \mapsto -x + 32$

$f(16) \rightarrow 16$

Dimensións do rectángulo : longo = ancho = 16 cm

84. Deséxase fabricar un acuario con base cadrada e sen tapa, de capacidade 500 dm^3. A base e as paredes do acuario deben realizadas en cristal. Cales terán que ser as súas medidas para minimizar a superficie total do cristal empregado?

Solución:



Problema 84

Formulación : $A(x, h) = x^2 + 4xh$

Condicións : $x^2h = 500$

$\text{resolver}(\{x^2 \cdot h = 500\}, \{h\}) \rightarrow \left\{\left\{h = \frac{500}{x^2}\right\}\right\}$

$A(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{500}{x^2} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3 + 2000}{x}$

$\text{resolver}(A'(x) = 0) \rightarrow \{\{x = 10\}\}$

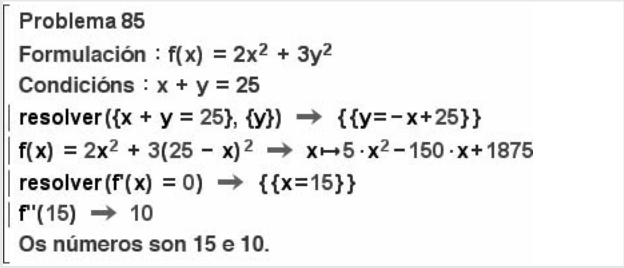
$h(x) = \frac{500}{x^2} \rightarrow x \mapsto \frac{500}{x^2}$

$h(10) \rightarrow 5$

Dimensións da caixa: aresta da base 10 dm e altura 5 dm

85. Descompón o número 25 en dous sumandos tales que o dobre do cadrado do primeiro máis o triplo do cadrado do segundo sexa mínimo.

Solución:



Problema 85

Formulación : $f(x) = 2x^2 + 3y^2$

Condicións : $x + y = 25$

$\text{resolver}(\{x + y = 25\}, \{y\}) \rightarrow \{\{y = -x + 25\}\}$

$f(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2 \rightarrow x \mapsto 5 \cdot x^2 - 150 \cdot x + 1875$

$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \{\{x = 15\}\}$

$f''(15) \rightarrow 10$

Os números son 15 e 10.