7 Cálculo de derivadas

1. Regras de derivación. Táboa de derivadas

Aplica a teoría

Deriva en función de **x**:

1. $y = 2x - 1$

Solución:
$y' = 2$

2. $y = (2x - 1)^5$

Solución:
$y' = 10(2x - 1)^4$

3. $y = \sqrt{7x + 3}$

Solución:
$y' = \dfrac{7}{2\sqrt{7x + 3}}$

4. $y = e^{2x}$

Solución:
$y' = 2e^{2x}$

5. $y = \dfrac{1}{x}$

Solución:
$y' = -\dfrac{1}{x^2}$

6. $y = L\,(x^2 + x)$

Solución:
$y' = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x}$

7. $y = L\,x^2$

Solución:
$y' = \dfrac{2}{x}$

8. $y = \dfrac{5}{x^3}$

Solución:
$y' = -\dfrac{15}{x^4}$

9. $y = 3^{5x}$

Solución:
$y' = 5 \cdot 3^{5x}\,L\,3$

10. $y = \sqrt[4]{5x}$

Solución:
$y' = \dfrac{5}{4\sqrt[4]{(5x)^3}}$

11. $y = \dfrac{5\,x}{x^2 + 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{5 - 5x^2}{(x^2 + 1)^2}$

12. $y = \dfrac{2}{(3x - 1)^4}$

Solución:
$y' = -\dfrac{24}{(3x - 1)^5}$

13. $y = e^{7x}$

Solución:
$y' = 7e^{7x}$

14. $y = x^3 - 2x + 1$

Solución:
$y' = 3x^2 - 2$

15. $y = \log(5x + 2)$

Solución:

$y = \frac{5}{5x + 2} \log e$

16. $y = 2x + L\,x$

Solución:

$y = 2 + \frac{1}{x}$

17. $y = \frac{3}{(x - 4)^6}$

Solución:

$y' = -\frac{18}{(x - 4)^7}$

18. Atopa a ecuación da recta tanxente á curva:

$$y = x^2 - 5x + 2$$

para $x = 4$.

Solución:

a) $x = 4 \Rightarrow f(4) = -2 \Rightarrow P(4, -2)$

b) $f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(4) = 3$

c) $y + 2 = 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x - 14$

19. Atopa a ecuación da recta tanxente á curva $y = x^3 + x$, para $x = 1$.

Solución:

a) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow P(1, 2)$

b) $f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 4$

c) $y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 2$

20. Atopa a ecuación da recta tanxente á curva:

$$y = x^3 - 3x$$

para $x = 0$.

Solución:

a) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow P(0, 0)$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(0) = -3$

c) $y = -3x$

Calcula as cinco primeiras derivadas das seguintes funcións:

21. $y = x^7$

Solución:

$y' = 7x^6$

$y'' = 42x^5$

$y''' = 210x^4$

22. $y = e^x$

Solución:

$y' = e^x$

$y'' = e^x$

$y''' = e^x$

23. $y = x^8 - 7x^2 + 5$

Solución:

$y' = 8x^7 - 14x$

$y'' = 56x^6 - 14$

$y''' = 336x^5$

$y^{IV} = 1\,680x^4$

$y^{V} = 6\,720x^3$

24. $y = e^{2x}$

Solución:

$y' = 2e^{2x}$

$y'' = 4e^{2x}$

$y''' = 8e^{2x}$

$y^{IV} = 16e^{2x}$

$y^{V} = 32e^{2x}$

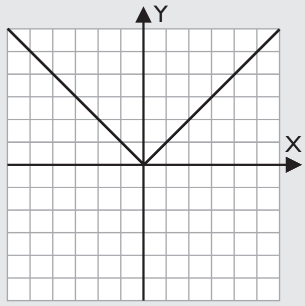
2. Estudo da derivabilidade

Pensa e calcula

Escribe a función valor absoluto $f(x) = |x|$ como unha función definida a anacos e represéntaa.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Aplica a teoría

25. Atopa a función derivada da función seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \leq 2 \\ \mathrm{L}\, x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

26. Dada a función: $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ 7 - x & \text{se } 3 < x < 7 \end{cases}$

Xustifica se f(x) é derivable en x = 3. Cal é o significado xeométrico do resultado obtido?

Solución:

a) A continuidade da función:

$f(3) = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 4$$

A función é continua en x = 3.

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -3 < x < 3 \\ -1 & \text{se } 3 < x < 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} 0 = 0 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-1) = -1 \end{cases}$$

$f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow$ A función non é derivable en x = 3.

A función é continua e non é derivable en x = 3; a función ten no punto de abscisa x = 3 un pico, e nese punto pódense debuxar dúas tanxentes.

27. Dada a función: $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Determina o valor de **k** para que a función sexa derivable en x = 1.

Solución:

a) A continuidade da función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 5) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + k = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 6$$

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ 2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

Para k = 6, a función é continua e as derivadas laterais son iguais; logo a función é derivable en x = 1.

28. Estuda a derivabilidade da función $f(x) = |x - 2|$ en x = 2.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1 \end{array}\right\}$$

$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow f(x)$ non é derivable en x = 2.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Deriva: $f(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{8}{x^2}$

- [ ] $f'(x) = \frac{x}{4} - \frac{16}{x^3}$
- [ ] $f'(x) = -\frac{x}{4} + \frac{16}{x^3}$
- [x] $f'(x) = \frac{x}{4} + \frac{16}{x^3}$
- [ ] $f'(x) = -\frac{x}{4} - \frac{16}{x^3}$

2 Deriva: $f(x) = (2x - 1)^2 \cdot \ln x$

- [x] $f'(x) = 4(2x - 1) \cdot \ln x + \frac{(2x-1)^2}{x}$
- [ ] $f'(x) = 2(2x - 1) \cdot \ln x + (2x - 1)^2$
- [ ] $f'(x) = (2x - 1)^2 \cdot \ln x + \frac{1}{x}$
- [ ] $f'(x) = 4(2x - 1)^2 \cdot \ln x + 1$

3 Deriva: $f(x) = 5\sqrt{\ln x}$

- [ ] $f'(x) = \frac{5}{x\sqrt{\ln x}}$
- [ ] $f'(x) = 10\sqrt{\ln x}$
- [ ] $f'(x) = 5\sqrt{\ln x}$
- [x] $f'(x) = \frac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

4 Deriva: $f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x}$

- [ ] $f'(x) = 6 - 8x + \ln x$
- [x] $f'(x) = \frac{1}{6} - 16x - \frac{1}{x^2}$
- [ ] $f'(x) = 1 - x - x^2$
- [ ] $f'(x) = \frac{1}{6} - 16x + \frac{1}{x^2}$

5 Deriva: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- [ ] $f'(x) = \frac{x - 1}{(\ln x)^2}$
- [ ] $f'(x) = x \ln x$
- [ ] $f'(x) = 1$
- [x] $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

6 Deriva: $f(x) = xe^{3x}$

- [x] $f'(x) = (3x + 1)\, e^{3x}$
- [ ] $f'(x) = (3x - 1)\, e^{3x}$
- [ ] $f'(x) = (3x + 1) \ln x$
- [ ] $f'(x) = 9e^{3x}$

7 Deriva: $f(x) = x^2 - e^x$

- [ ] $f'(x) = 2x + e^x$
- [ ] $f'(x) = x + e^x$
- [x] $f'(x) = 2x - e^x$
- [ ] $f'(x) = x - e^x$

8 Se f' é a derivada da función dada por:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + \frac{3}{x^4} \quad (x \neq 0)$$

Calcula: $f'(-2)$

- [x] $f'(-2) = 387/8$
- [ ] $f'(-2) = 1$
- [ ] $f'(-2) = -1$
- [ ] $f'(-2) = 83/6$

9 Atopa $f'(-2)$, onde f' é a derivada da función f dada por:

$$f(x) = 4x - x^2 + \frac{2}{x^3} \quad (x \neq 0)$$

- [ ] $f'(-2) = 5$
- [ ] $f'(-2) = -5$
- [x] $f'(-2) = 61/8$
- [ ] $f'(-2) = 3/8$

10 Atopa a ecuación da recta tanxente á gráfica da función:

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

no punto de abscisa $x = -1$.

- [ ] $y = 3x + 2$
- [ ] $y = x - 1$
- [ ] $y = -3x - 2$
- [x] $y = -3x - 6$

Exercicios e problemas

1. Regras de derivación. Táboa de derivadas

29. $y = (x^2 - 3)e^x$

Solución:
$y' = (x^2 + 2x - 3)e^x$

30. $y = e^{5x+3}$

Solución:
$y' = 5e^{5x+3}$

31. $y = L\,(x^2 - 7)$

Solución:
$y' = \dfrac{2x}{x^2 - 7}$

32. $y = \dfrac{x}{x+1}$

Solución:
$y' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

33. $y = (2x + 3)^2$

Solución:
$y' = 4(2x + 3)$

34. $y = e^{x^2+3}$

Solución:
$y' = 2xe^{x^2+3}$

35. $y = 2x + \sqrt{x+1}$

Solución:
$y' = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

36. $y = L\,(3x - 2)$

Solución:
$y' = \dfrac{3}{3x - 2}$

37. $y = 2^{7x}$

Solución:
$y' = 7 \cdot 2^{7x}\,L\,2$

38. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Solución:
$y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

39. $y = \dfrac{2x}{x-1}$

Solución:
$y' = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

40. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Solución:
$y' = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

41. $y = L\sqrt[4]{x^3 + 5x - 7}$

Solución:
$y' = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 7}$

42. Atopa a ecuación da recta tanxente á seguinte curva: $y = -x^2 + 5x - 2$, para $x = 4$.

Solución:
a) $x = 4 \Rightarrow f(4) = 2 \Rightarrow P(4, 2)$
b) $f'(x) = -2x + 5 \Rightarrow f'(4) = -3$
c) $y - 2 = -3(x - 4) \Rightarrow y = -3x + 14$

43. Atopa a ecuación da recta tanxente á seguinte curva: $y = x^3 - x + 3$, para $x = 1$.

Solución:
a) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow P(1, 3)$
b) $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 2$
c) $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 1$

44. Atopa a ecuación da recta tanxente á seguinte curva: $y = x^3 + 3x$, para $x = -1$.

Solución:
a) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -4 \Rightarrow P(-1, -4)$
b) $f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = 6$
c) $y + 4 = 6(x + 1) \Rightarrow y = 6x + 2$

Calcula as cinco primeiras derivadas das seguintes funcións:

45. $y = x^8$

Solución:
$y' = 8x^7$
$y'' = 56x^6$
$y''' = 336x^5$
$y^{IV} = 1\,680x^4$
$y^{V} = 6\,720x^3$

46. $y = e^{-x}$

Solución:

$y' = -e^{-x}$

$y'' = e^{-x}$

$y''' = -e^{-x}$

$y^{IV} = e^{-x}$

$y^{V} = -e^{-x}$

47. $y = x^6 - 2x^5 + 5x - 3$

Solución:

$y' = 6x^5 - 10x^4 + 5$

$y'' = 30x^4 - 40x^3$

$y''' = 120x^3 - 120x^2$

$y^{IV} = 360x^2 - 240x$

$y^{V} = 720x - 240$

48. $y = e^{3x}$

Solución:

$y' = 3e^{3x}$

$y'' = 9e^{3x}$

$y''' = 27e^{3x}$

$y^{IV} = 81e^{3x}$

$y^{V} = 243e^{3x}$

2. Estudo da derivabilidade

49. Estuda a derivabilidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \le 2 \\ 4x - 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

no punto x = 2.

Solución:

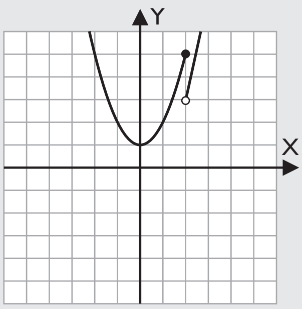
A continuidade da función:

$f(2) = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4x - 5) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) \ne f(2)$$

A función non é continua en x = 2.

A función non é derivable en x = 2.



Obsérvase que as tanxentes pola esquerda e pola dereita teñen a mesma pendente, aínda que a función non é derivable.

50. Atopa o valor de **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{se } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

sexa derivable en x = 2.

Solución:

a) A continuidade da función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 6 = -2b \Rightarrow 2a + b = -3$

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{se } x < 2 \\ 2x - b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2ax + 3) = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - b) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$4a + 3 = 4 - b \Rightarrow 4a + b = 1$

Resólvese o sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2, b = -7$$

51. Estuda a derivabilidade da función $f(x) = x|x|$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

A función é continua e derivable por estar definida por polinomios. O único punto que hai que estudar é o correspondente ao valor da abscisa x = 0.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

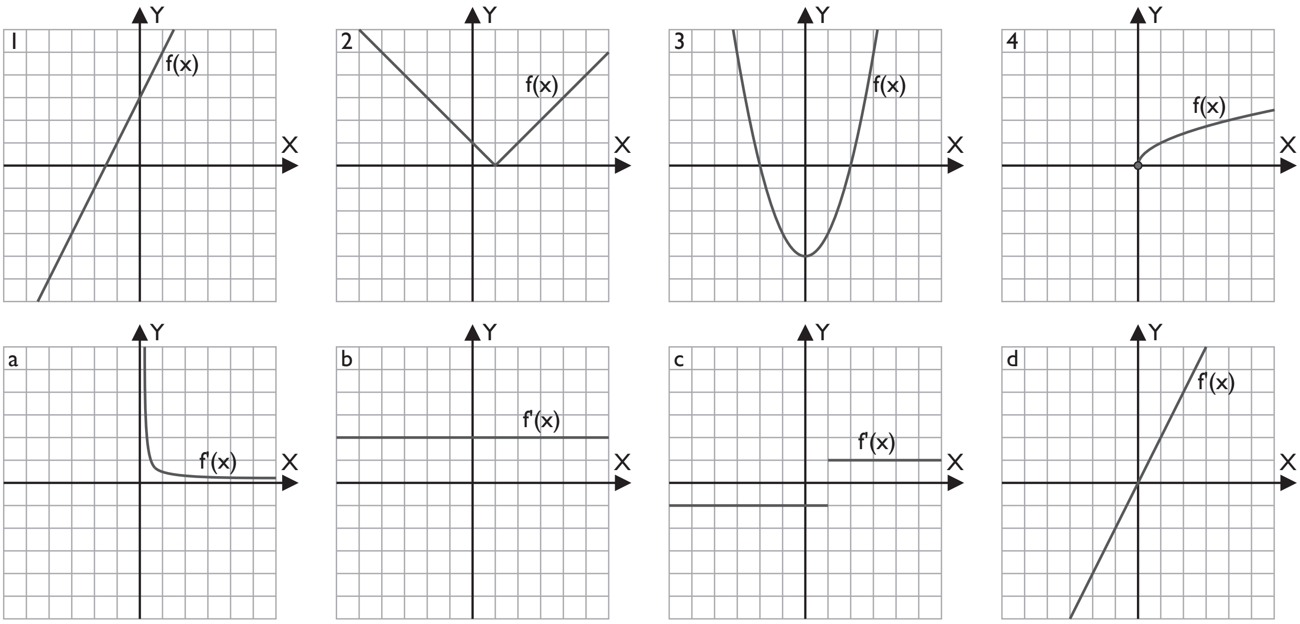
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$ A función é derivable en x = 0.

Exercicios e problemas

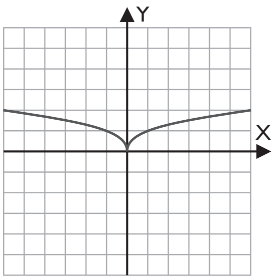
Para ampliar

52. Asocia cada gráfica da función f(x) coa súa función derivada f'(x):



Solución:				
f(x)	1	2	3	4
f'(x)	b	c	d	a

53. Dada a gráfica da función: $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

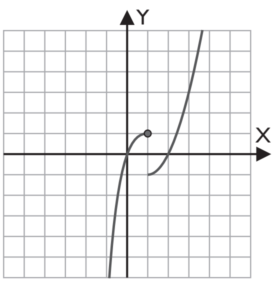


Analiza se esta función é derivable en x = 0.

Solución:
Non é derivable en x = 0 porque ten unha tanxente vertical de ecuación x = 0.

54. Dada a gráfica da función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x > 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

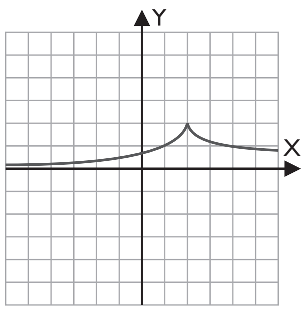


Analiza se esta función é derivable en x = 1.

Solución:
Non é derivable en x = 1 porque a función non é continua nese valor.

55. Dada a gráfica da función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$



Analiza se esta función é derivable en x = 2.

Solución:
Non é derivable en x = 2 porque a función ten un pico. A gráfica nese valor ten dúas tanxentes distintas.

Atopa as derivadas das funcións seguintes:

56. $y = (x^2 + 1)2^x$

Solución:
$y' = 2x \cdot 2^x + (x^2 + 1)\, 2^x \, L\, 2$

57. $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

Solución:
$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

58. $y = (x + 2)e^x$

Solución:
$y' = (x + 3)\, e^x$

59. $y = \sqrt{1 - x^2}$

Solución:
$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

60. $y = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Solución:
$y' = -\dfrac{5}{(x - 2)^2}$

61. $y = \dfrac{9}{x^2 - 3}$

Solución:
$y' = -\dfrac{18x}{(x^2 - 3)^2}$

62. $y = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^3$

Solución:
$y' = 3\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^2 \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)$

63. $y = e^{5x}$

Solución:
$y' = 5e^{5x}$

64. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Solución:
$y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

65. $y = L\, e^x$

Solución:
$y = x$
$y' = 1$

66. $y = x^2e^x + 2x$

Solución:
$y' = e^x(x^2 + 2x) + 2$

67. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

Solución:
$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

68. $y = 2^x\, L\, x$

Solución:
$y' = 2^x\left(L\, 2\, L\, x + \dfrac{1}{x}\right)$

69. Atopa as tres primeiras derivadas da función:

$$y = x^3 + 3x$$

Solución:
$y' = 3x^2 + 3$ $\qquad$ $y'' = 6x$
$y''' = 6$

70. Dada a función: $y = x^3 - 3x^2$

a) Atopa as tres primeiras derivadas.

b) Atopa os puntos da gráfica nos que a tanxente sexa horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 6x$
$y'' = 6x - 6$
$y''' = 6$

b) Se a tanxente é horizontal, a pendente é cero.
$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
Se $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$
Se $x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(2, -4)$

71. Dada a función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) Atopa as tres primeiras derivadas.

b) Atopa os puntos da gráfica nos que a tanxente sexa horizontal.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

b) Se a tanxente é horizontal, a pendente é cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

Se $x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

Se $x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$

72. Atopa as tres primeiras derivadas da función:

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 3$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x + 1$

$y'' = 6x + 6$

$y''' = 6$

73. Atopa as tres primeiras derivadas da función:

$$y = x^3 + x^2$$

Solución:

$y' = 3x^2 + 2x$

$y'' = 6x + 2$

$y''' = 6$

74. Dada a función: $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) Atopa as tres primeiras derivadas da función.

b) Atopa os puntos nos que a recta tanxente é horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

b) Se a tanxente é horizontal, a pendente é cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Se $x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(-1, -2)$

Se $x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(1, 2)$

75. Atopa as tres primeiras derivadas da función:

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$ $\quad$ $y'' = \dfrac{8x^3 - 24x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-24x^4 + 144x^2 - 24}{(x^2 + 1)^4}$

76. Dada a función: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) Atopa as tres primeiras derivadas.

b) Analiza se pode haber algún punto da gráfica que teña tanxente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-6x^4 - 36x^2 - 6}{(x^2 - 1)^4}$

b) Se a recta tanxente é horizontal, a pendente é cero.

$y' \neq 0$ para todo valor de **x**.

Non hai ningún punto da gráfica que teña recta tanxente horizontal.

77. Atopa as tres primeiras derivadas da función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$ $\quad$ $y'' = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-48x^3 - 48x}{(x^2 - 1)^4}$

78. Atopa as tres primeiras derivadas da función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{10x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{30x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''' = \dfrac{-120x^3 + 120x}{(x^2 + 1)^4}$

79. Dada a función: $y = xe^x$

a) Atopa as tres primeiras derivadas.

b) Atopa os puntos da gráfica nos que a tanxente é horizontal.

Solución:

a) $y' = (x + 1)e^x$

$y'' = (x + 2)e^x$

$y''' = (x + 3)e^x$

b) Se a tanxente é horizontal, a pendente é cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = -1$

Se $x = -1, y = -1/e \Rightarrow A(-1, -1/e)$

80. Atopa as tres primeiras derivadas da seguinte función: $y = x^2e^x$

Solución:

$y' = (x^2 + 2x)e^x$

$y'' = (x^2 + 4x + 2)e^x$

$y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$

81. Atopa as tres primeiras derivadas da seguinte función: $y = x \, L \, x$

Solución:

$y' = 1 + L\,x$ $\qquad y'' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad y''' = -\dfrac{1}{x^2}$

82. Dada a función: $y = L\,x^2$

a) Atopa as tres primeiras derivadas.

b) Analiza se hai algún punto da gráfica con tanxente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2}{x}$ $\qquad y'' = -\dfrac{2}{x^2}$ $\qquad y''' = \dfrac{4}{x^3}$

b) Non hai ningún punto con tanxente horizontal porque $y' \neq 0$ para todo valor de **x**.

83. Dada a función: $y = L\,(x^2 + 1)$

a) Atopa as tres primeiras derivadas.

b) Analiza se hai algún punto da gráfica con tanxente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $\qquad y'' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

$y''' = \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

b) Se a tanxente é horizontal, a pendente é cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Se $x = 0, y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

84. Dada a función: $y = \dfrac{L\,x}{x}$

a) Atopa as tres primeiras derivadas.

b) Analiza se hai algún punto da gráfica con tanxente horizontal.

Solución:

a) $y' = \dfrac{1 - L\,x}{x^2}$ $\qquad y'' = \dfrac{2\,L\,x - 3}{x^3}$

$y''' = \dfrac{11 - 6\,L\,x}{x^4}$

b) Se a tanxente é horizontal, a pendente é cero.

$y' = 0 \Rightarrow x = e$

Se $x = e, y = 1/e \Rightarrow A(e, 1/e)$

85. Atopa a ecuación da recta tanxente á curva $y = x^2$, para $x = 2$.

Solución:

a) $x = 2 \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow P(2, 4)$

b) $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

c) $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$

86. Atopa a ecuación da recta tanxente á curva $y = x^3$, para $x = -1$.

Solución:

a) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 \Rightarrow P(-1, -1)$

b) $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(-1) = 3$

c) $y + 1 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 2$

87. Atopa a ecuación da recta tanxente á curva $y = -x^3$, para $x = 1$.

Solución:

a) $x = 1 \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow P(1, -1)$

b) $f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f'(1) = -3$

c) $y + 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 2$

Problemas

88. Atopa as rectas tanxentes horizontais á gráfica da función: $y = x^3 - 27x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 27$

$y' = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$

Se $x = -3, y = 54 \Rightarrow A(-3, 54)$

Se $x = 3, y = -54 \Rightarrow A(3, -54)$

Recta tanxente en A: $y = 54$

Recta tanxente en B: $y = -54$

89. Atopa o valor de **k** tal que a recta $y = 4x - 9$ sexa tanxente á gráfica da función: $f(x) = x^2 - kx$

Solución:

Sexa A(x, y) o punto de tanxencia. Temos:

$y' = 4$

$f'(x) = 2x - k$

$2x - k = 4 \quad (1)$

O punto A é común á tanxente e á curva:

$4x - 9 = x^2 - kx \quad (2)$

Se resolvemos o sistema de (1) e (2):

$x = 3, k = 2$

$x = -3, k = -10$

90. Estuda a derivabilidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{se } x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

no punto $x = 1$.

Solución:

Estúdase o punto $x = 1$.

a) A continuidade da función:

$f(1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x-1)^3 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

A función é continua en $x = 1$.

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{se } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3(x-1)^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2(x-1) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow$ A función é derivable en $x = 1$.

91. Determina os valores de **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \le 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

sexa continua e derivable en $x = 1$.

Solución:

a) A continuidade da función: $f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 1$$

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 1 \\ 2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} a = 2$$

Se se resolve o sistema:

$a = 2, b = -1$

92. Determina o valor de **a** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \ge 3 \\ 2x + a & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

sexa derivable en $x = 3$.

Solución:

a) A continuidade da función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$6 + a = 3 \Rightarrow a = -3$

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x > 3 \\ 2 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - 2) = 4 \end{array}\right\}$$

$f'(3^-) \ne f'(3^+) \Rightarrow$ A función non é derivable en $x = 3$ para ningún valor de **a**.

93. Estuda a derivabilidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{se } x \le 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

no punto $x = 1$.

Solución:

Estúdase o punto x = 1.

a) A continuidade da función:

$f(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2-x)^3 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

A función é continua en x = 1.

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -3(2-x)^2 = -3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$ $\Rightarrow$ A función non é derivable en x = 1.

94. Atopa os valores de **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{se } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

sexa derivable en x = 1.

Solución:

a) A continuidade da función:

$f(1) = a + 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax+5) = a + 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x}\right) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$a + 5 = a + b \Rightarrow b = 5$

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a = a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2}\right) = \dfrac{a}{2} - b \end{array}\right\}$$

$a = \dfrac{a}{2} - b \Rightarrow a = -2b$

Se se resolve o sistema:

$a = -10, b = 5$

95. Atopa o valor de **a** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ L(x-1) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

sexa continua e estuda se para este valor é derivable.

Solución:

A función está definida por dúas funcións que son continuas e derivables nos seus dominios. Ten que estudarse o valor x = 2.

a) A continuidade da función:

$f(2) = 3a + 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} L(x-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para a = –1, a función é continua en x = 2.

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x+a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-1} = 1 \end{array}\right\}$$

Para a = –1 temos:

$f'(2^-) = 3$

$f'(2^+) = 1$

A función non é derivable en x = 2.

96. Determina o valor de **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{se } x < 1 \\ ax + b & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

sexa derivable en x = 1.

Solución:

a) A continuidade da función:

$f(1) = a + b$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^3 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax+b) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 0$$

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 1 \\ a & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} a = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3$$

Se se resolve o sistema:

$a = 3, b = -3$

Para profundar

97. Determina o valor de **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} (x + a)e^{-bx} & \text{se } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sexa derivable en x = 0.

Solución:

a) A continuidade da función:

$f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x + a)e^{-bx} = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$$

b) A derivabilidade calculando as derivadas laterais:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-bx} - b(x + a)e^{-bx} & \text{se } x < 0 \\ 2ax + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-bx} - b(x + a)e^{-bx} = 1 - ab \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2ax + b) = b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$1 - ab = b$

Se se resolve o sistema:

$a = 1, b = 1/2$

98. Unha poboación de 400 bacterias dun cultivo sábese que varía segundo a función:

$$f(x) = 400\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

onde **x** se mide en minutos. Calcula que velocidade de crecemento instantáneo terá a poboación en t = 3 minutos.

Solución:

O crecemento instantáneo é a derivada da función:

$$f'(x) = 400\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(3) = -32$

O signo menos indica que neste momento están diminuíndo as bacterias.

99. Atopa a ecuación da parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa polo punto A(0, 1) e é tanxente á recta $y = x - 1$ no punto B(1, 0).

Solución:

a) Pásase por A(0, 1).

$c = 1$

b) Se é tanxente á recta $y = x - 1$ en B(1, 0), a derivada da parábola en x = 1 é a pendente da recta tanxente.

$2a + b = 1$

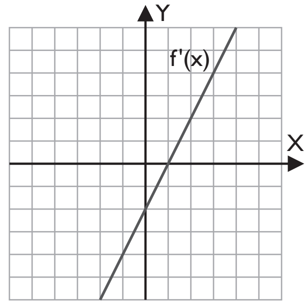
c) Como pasa por B(1, 0):

$a + b + c = 0$

Se resolvemos o sistema de ecuacións:

$a = 2, b = -3, c = 1$

100. A seguinte gráfica corresponde á función derivada da función f(x):



a) Existe algún punto de tanxente horizontal na gráfica de f(x)?

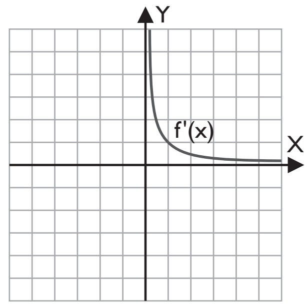
b) Pode ser a derivada dunha función polinómica? De que grao?

Solución:

a) En x = 1 a derivada faise cero e, por conseguinte, a pendente da recta tanxente é cero. A tanxente é horizontal.

b) Se a derivada é un polinomio de primeiro grao, a función é un polinomio de segundo grao.

101. A seguinte gráfica corresponde á función derivada da función f(x):



a) Existe algún punto de tanxente horizontal na gráfica de f(x)?

b) Escribe a ecuación da gráfica de f'(x).

c) Dá unha función cuxa derivada sexa a da gráfica.

Solución:

a) Non, porque f'(x) non corta o eixe X.

b) $f'(x) = 1/x$

c) $f(x) = L\,x$

Paso a paso

102. Atopa a derivada da función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

103. Atopa a recta tanxente á curva:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ en } x = 3$$

Representa a función e a recta tanxente.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

104. Estuda a derivabilidade da función para x = 2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Representa a función e a recta ou rectas tanxentes para x = 2.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

105. Calcula o valor dos parámetros **a** e **b** para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2bx - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

sexa derivable en x = 1. Representa a función e a recta tanxente para x = 1.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

106. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

Atopa as derivadas das seguintes funcións:

107. $f(x) = e^{4x-5}$

Solución:

Exercicio 107

$f(x) = e^{4x-5} \Rightarrow x \mapsto e^{4 \cdot x - 5}$

$f'(x) \Rightarrow 4 \cdot e^{4 \cdot x - 5}$

108. $f(x) = L\,(x^2 + 1)$

Solución:

Exercicio 108

$f(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow x \mapsto \ln(x^2+1)$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x}{x^2+1}$

109. $f(x) = x^2\,L\,(x + 1)$

Solución:

Exercicio 109

$f(x) = x^2 \cdot \ln(x + 1) \Rightarrow x \mapsto x^2 \cdot \ln(x+1)$

$f'(x) \Rightarrow 2 \cdot x \cdot \ln(x+1) + \dfrac{x^2}{x+1}$

110. $f(x) = L\,(x^2 - 4)$

Solución:

Exercicio 110

$f(x) = \ln(x^2 - 4) \Rightarrow x \mapsto \ln(x^2-4)$

$f'(x) \Rightarrow \dfrac{2 \cdot x}{x^2-4}$

111. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$

Solución:

Exercicio 111

$f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + 1} \rightarrow x \mapsto \dfrac{5 \cdot x}{x^2+1}$

$f'(x) \rightarrow \dfrac{-5 \cdot x^2 + 5}{x^4 + 2 \cdot x^2 + 1}$

112. Atopa a recta tanxente á curva:

$$f(x) = x^2 - 5 \text{ en } x = 2$$

Representa a función e a recta tanxente.

Solución:

Exercicio 112

$a = 2 \rightarrow 2$

$f(x) = x^2 - 5 \rightarrow x \mapsto x^2 - 5$

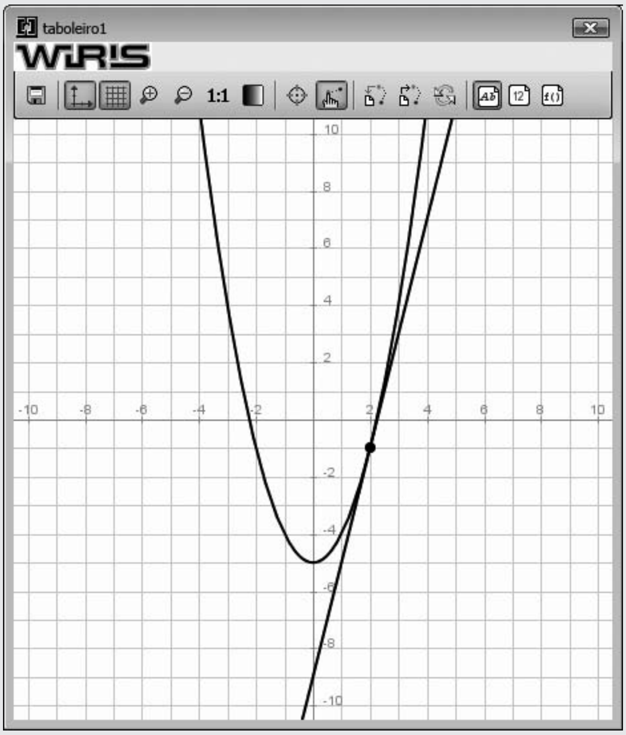
$P = \text{punto}(a, f(a)) \rightarrow (2, -1)$

debuxar(P, {cor = vermello, tamaño_punto = 8})

$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 9$

debuxar(f(x), {cor = azul, anchura_liña = 2})

debuxar(t(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})



113. Estuda a derivabilidade da función en x = 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{se } x \leq 2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Representa a función e a recta ou rectas tanxentes para x = 2.

Solución:

Exercicio 113

$a = 2 \rightarrow 2$

$g(x) = x^2 - 3 \rightarrow x \mapsto x^2 - 3$

$P = \text{punto}(a, g(a)) \rightarrow (2, 1)$

debuxar(P, {cor = vermello, tamaño_punto = 8})

$h(x) = -x^2 + 2x + 4 \rightarrow x \mapsto -x^2 + 2 \cdot x + 4$

debuxar(g(x), −∞..a, {cor = azul, anchura_liña = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 7$

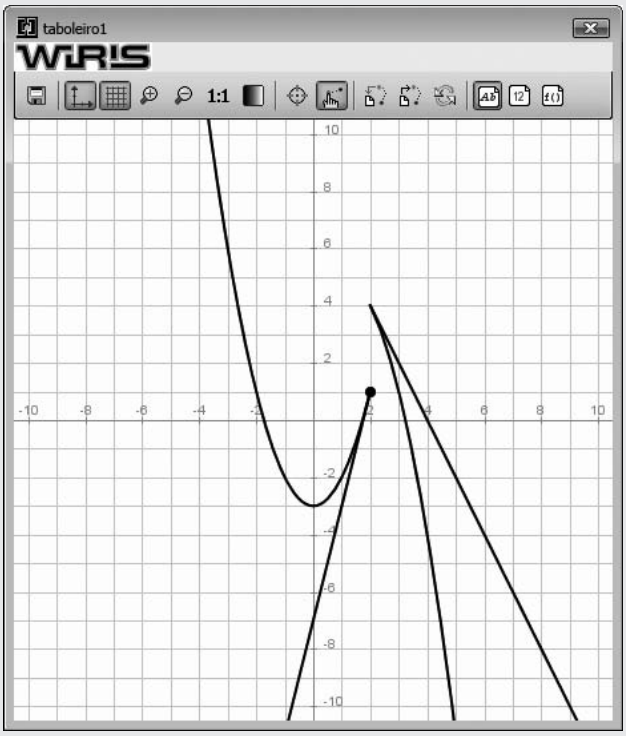
debuxar(t1(x), −∞..a, {cor = vermello, anchura_liña = 2})

debuxar(h(x), a..+∞, {cor = azul, anchura_liña = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto -2 \cdot x + 8$

debuxar(t2(x), a..+∞, {cor = vermello, anchura_liña = 2})

A función non é continua en x = 2, polo tanto non é derivable.



114. Dada a función: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Pídese:

Atopa a ecuación da recta tanxente á curva f(x) para: $x = \dfrac{1}{2}$

Solución:

Exercicio 114

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{1}{x}$

debuxar(f(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

$a = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$f(a) \rightarrow 2$

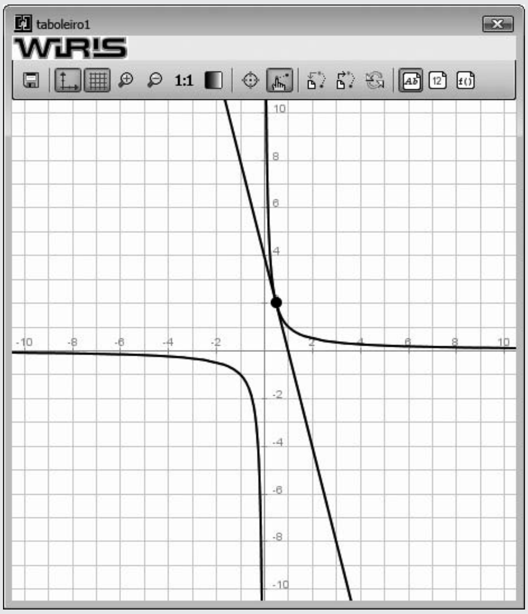
$f'(x) \rightarrow \frac{-1}{x^2}$

$f'(a) \rightarrow -4$

$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \rightarrow x \mapsto -4 \cdot x + 4$

debuxar(t(x), {cor = verde, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(a, f(a)), {cor = vermello, tamaño_punto =10})



115. Estuda a derivabilidade da función para x = 3.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{se } x \le 3 \\ 2x - 4 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Representa a función e a recta ou rectas tanxentes para x = 3.

Solución:

Exercicio 115

$a = 3 \rightarrow 3$

$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \rightarrow x \mapsto -x^2 + 4 \cdot x - 1$

P = punto(a, g(a)) $\rightarrow$ (3,2)

debuxar(P, {cor = vermello, tamaño_punto = 8})

$h(x) = 2x - 4 \rightarrow x \mapsto 2 \cdot x - 4$

debuxar(g(x), $-\infty$..a, {cor = azul, anchura_liña = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto -2 \cdot x + 8$

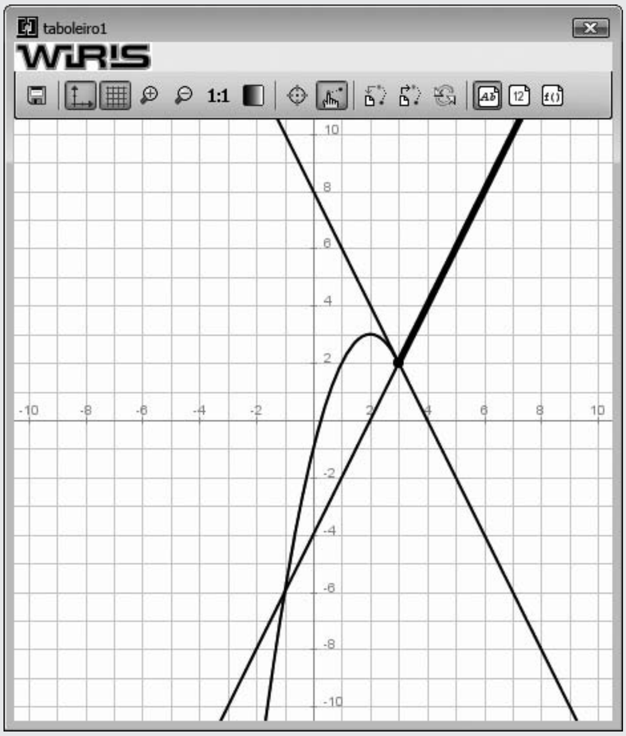
debuxar(t1(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

debuxar(h(x), a..$+\infty$, {cor = azul, anchura_liña = 5})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto 2 \cdot x - 4$

debuxar(t2(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

A función é continua en x = 3, pero non é derivable porque as rectas tanxentes son distintas.



116. Estuda a derivabilidade da función para x = 1.

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Representa a función e a recta ou rectas tanxentes para x = 1.

Solución:

Exercicio 116

$a = 1 \rightarrow 1$

$g(x) = 2^x \rightarrow x \mapsto 2^x$

P = punto(a, g(a)) $\rightarrow$ (1,2)

debuxar(P, {cor = vermello, tamaño_punto = 8})

$h(x) = x^2 - 4x + 5 \rightarrow x \mapsto x^2 - 4 \cdot x + 5$

debuxar(g(x), $-\infty$..a, {cor = azul, anchura_liña = 2})

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto 1.3863 \cdot x + 0.61371$

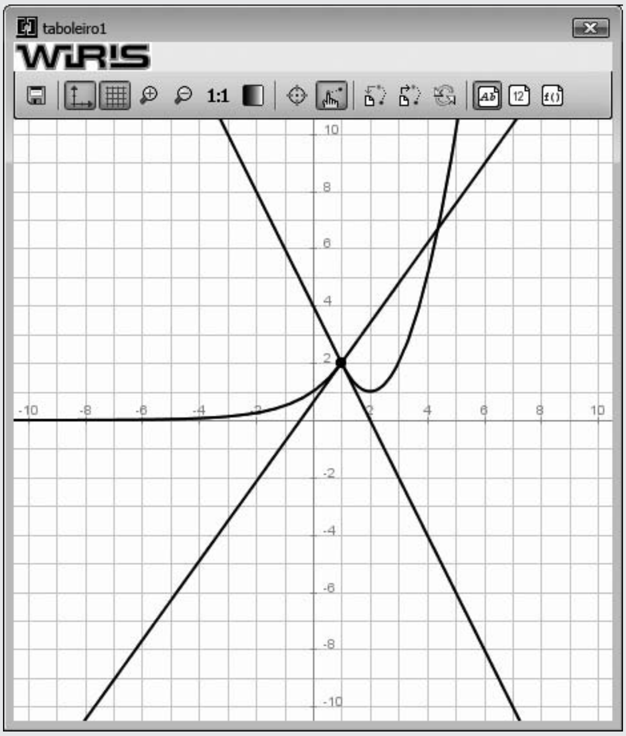
debuxar(t1(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

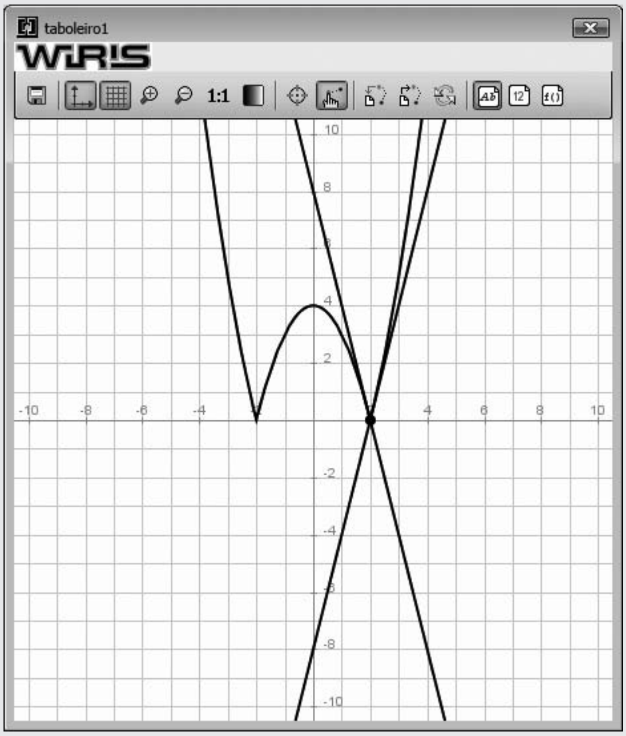
debuxar(h(x), a..$+\infty$, {cor = azul, anchura_liña = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto -2 \cdot x + 4$

debuxar(t2(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

A función é continua en x = 3, pero non é derivable porque as rectas tanxentes son distintas.





117. Estuda a derivabilidade da función para x = 2.

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

Representa a función e a recta ou rectas tanxentes para x = 2.

Solución:

Exercicio 117

$a = 2 \rightarrow 2$

$f(x) = |x^2 - 4| \rightarrow x \mapsto |x^2 - 4|$

debuxar(f(x), {cor = azul, anchura_liña = 2})

$g(x) = -x^2 + 4 \rightarrow x \mapsto -x^2 + 4$

P = punto(a, g(a)) → (2,0)

debuxar(P, {cor = vermello, tamaño_punto = 8})

$h(x) = x^2 - 4 \rightarrow x \mapsto x^2 - 4$

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto -4 \cdot x + 8$

debuxar(t1(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto 4 \cdot x - 8$

debuxar(t2(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

Atopa as tres primeiras derivadas das funcións que aparecen a continuacións:

118. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$

Solución:

Exercicio 118

$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3 \rightarrow x \mapsto x^3 + 3 \cdot x^2 + x - 3$

$f'(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1$

$f''(x) \rightarrow 6 \cdot x + 6$

$f'''(x) \rightarrow 6$

119. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

Exercicio 119

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x}$

$f'(x) \rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f''(x) \rightarrow \dfrac{2}{x^3}$

$f'''(x) \rightarrow \dfrac{-6}{x^4}$

120. $f(x) = x \cdot e^x$

Solución:

Exercicio 120

$f(x) = x \cdot e^x \rightarrow x \mapsto x \cdot e^x$

$f'(x) \rightarrow (x+1) \cdot e^x$

$f''(x) \rightarrow (x+2) \cdot e^x$

$f'''(x) \rightarrow (x+3) \cdot e^x$

121. $f(x) = x \cdot L\, x$

Solución:

Exercicio 121

$f(x) = x \cdot \ln(x) \rightarrow x \mapsto x \cdot \ln(x)$

$f'(x) \rightarrow \ln(x) + 1$

$f''(x) \rightarrow \dfrac{1}{x}$

$f'''(x) \rightarrow \dfrac{-1}{x^2}$

122. Atopa o valor de **a** e **b** para que a recta tanxente á gráfica de:

$$f(x) = ax^2 - b$$

no punto P(1, 5) sexa a recta:

$$y = 3x + 2$$

Solución:

Exercicio 122

$f(x) = a \cdot x^2 - b \rightarrow x \mapsto a \cdot x^2 - b$

$t(x) = 3x + 2 \rightarrow x \mapsto 3 \cdot x + 2$

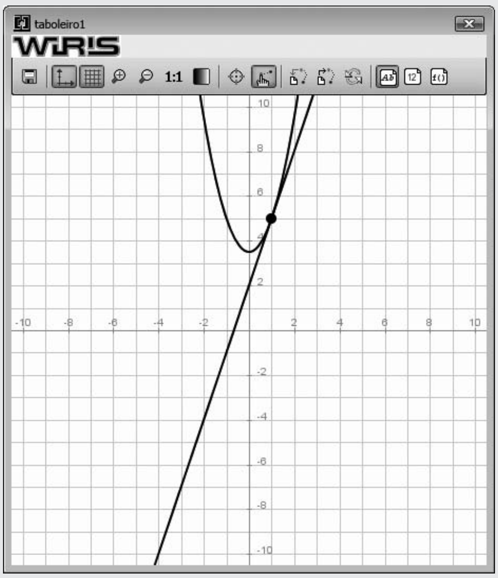
$\text{resolver}\begin{Bmatrix} f(1) = t(1) \\ f'(1) = t'(1) \end{Bmatrix} \rightarrow \left\{\left[a = \dfrac{3}{2}, b = -\dfrac{7}{2}\right]\right\}$

$f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{7}{2} \rightarrow x \mapsto \dfrac{3}{2} \cdot x^2 + \dfrac{7}{2}$

debuxar(f(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

debuxar(t(x), {cor = verde, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(1, 5), {cor = vermello, tamaño_punto = 10})



123. Estuda a derivabilidade da función para x = 0.

$$f(x) = x|x|$$

Representa a función e a recta ou rectas tanxentes para x = 0.

Solución:

Exercicio 123

$a = 0 \rightarrow 0$

$f(x) = x|x| \rightarrow x \mapsto x(|x|)$

debuxar(f(x), {cor = azul, anchura_liña = 2})

$g(x) = -x^2 \rightarrow x \mapsto -x^2$

P = punto(a, g(a)) $\rightarrow$ (0,0)

debuxar(P, {cor = vermello, tamaño_punto = 8})

$h(x) = x^2 \rightarrow x \mapsto x^2$

$t1(x) = g'(a) \cdot (x - a) + g(a) \rightarrow x \mapsto 0$

debuxar(t1(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})

$t2(x) = h'(a) \cdot (x - a) + h(a) \rightarrow x \mapsto 0$

debuxar(t2(x), {cor = vermello, anchura_liña = 2})