BLOQUE II

Análise

6 Límites, continuidade e asíntotas

1. Límite dunha función nun punto

Pensa e calcula

Completa mentalmente a táboa seguinte:

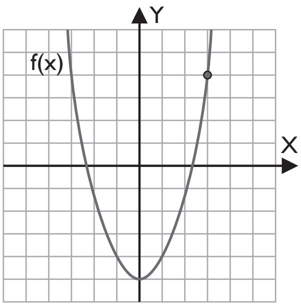
Solución:

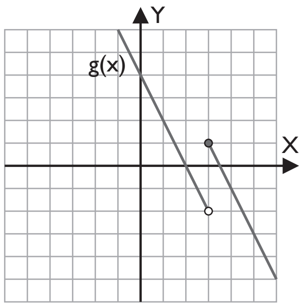
x	1,9	1,99	1,999	→	**2**	→	2,001	2,01	2,1
f(x) = x + 1	2,9	2,99	2,999	→	**3**	→	3,001	3,01	3,1

Aplica a teoría

1. Observa a gráfica e atopa o límite en cada caso; se non existe, xustifícao:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ non existe porque os límites laterais son distintos.

$\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = 1$

2. Completa as táboas para estimar o límite en cada caso:

x	0,9	0,99	0,999	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$				→	

x	1,1	1,01	1,001	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$				→	

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1)$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1)$

Solución:

x	0,9	0,99	0,999	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$	–0,19	–0,0199	–0,001999	→	**0**

x	1,1	1,01	1,001	→	**1**
$f(x) = x^2 - 1$	0,21	0,0201	0,002	→	**0**

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

3. Calcula mentalmente os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} 5^{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} L\,(4x + 2)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1) = 8 - 4 + 1 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x + 3} = \dfrac{6}{6} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 2} 5^{x - 2} = 5^0 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 1} L\,(4x + 2) = L\,6$

2. Límite dunha función no infinito

Pensa e calcula

Completa mentalmente a seguinte táboa:

Solución:

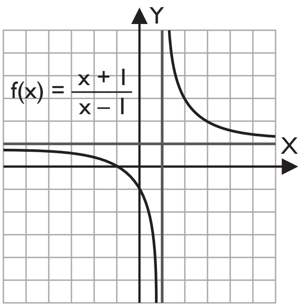
x	$-\infty \leftarrow$	$-1\,000$	-100	-10	-1	1	10	100	1 000	$\to +\infty$
f(x) = 1/x	0	$-0{,}001$	$-0{,}01$	$-0{,}1$	-1	1	0,1	0,01	0,001	0

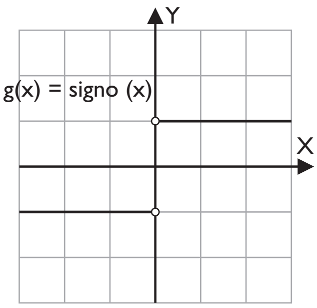
Aplica a teoría

4. Usa a gráfica para estimar o límite en cada caso; e se non existe, xustifícao:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ sendo $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ sendo g(x) = signo (x)





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

5. Indica se os seguintes límites son infinitos, un número ou unha indeterminación:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2 - 5}\right)^x$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x-5}}{L\,(x+5)}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot 2^{-x}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - 3x\right)$

Solución:

a) $\infty + \infty = +\infty$

b) $[\infty - \infty] = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 > \lim\limits_{x \to +\infty} 3x\right)$

c) $\dfrac{1}{\infty} = 0$

d) $\infty^{-5} = 0$

e) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$ $\left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x \to +\infty} \log x < \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\right)$

f) $\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]$ Indeterminado.

g) $[1^\infty]$ Indeterminado.

h) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$

$\left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-5} > \lim\limits_{x \to +\infty} L\,(x+5)\right)$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$

$\left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 < \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x\right)$

j) $\infty + \infty = +\infty$

3. Límites de funcións polinómicas e racionais

Pensa e calcula

Indica cal das seguintes expresións é determinada, e calcula o resultado, e cal é indeterminada:

a) $(-\infty)^3$ b) ∞^3 c) $\frac{4}{0}$ d) $\frac{0}{4}$ e) $\frac{0}{0}$ f) $\frac{5}{\infty}$ g) $\frac{\infty}{\infty}$

Solución:

a) $(-\infty)^3 = -\infty$ b) $\infty^3 = \infty$ c) $\frac{4}{0} = \infty$ d) $\frac{0}{4} = 0$

e) $\left[\frac{0}{0}\right]$ Indeterminada. f) $\frac{5}{\infty} = 0$ g) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ Indeterminada.

Aplica a teoría

6. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 + x^2 + 3)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5x - 4)$

Solución:

a) $-\infty$ b) $+\infty$

7. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - x^2 + x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$

Solución:

a) 1/2 b) 2

8. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x + 5}{x + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x + 5}{x + 2} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x + 5}{x + 2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = +\infty$

9. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$

Solución:

a) 0 b) 3

10. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 2} - x\right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^4 - x}{x^2 + 3} - 2x\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 1}{2} - \frac{x^2 + 3}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x}{2}\right)$

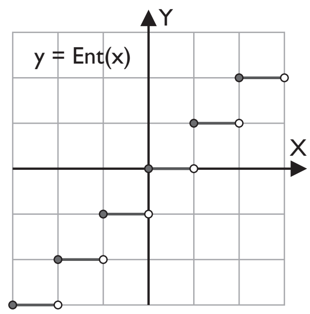
Solución:

a) 0
b) $+\infty$
c) $+\infty$
d) -2

4. Continuidade

Pensa e calcula

Indica en que valores é descontinua a función parte enteira do 1° gráfico da marxe:

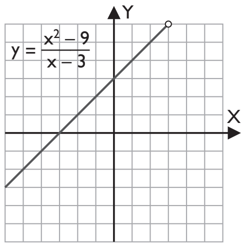


Solución:
Nos valores enteiros nos que ten unha descontinuidade de salto finito.

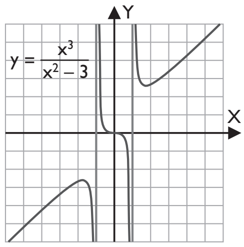
Aplica a teoría

11. Á vista da gráfica, clasifica as descontinuidades das seguintes funcións:

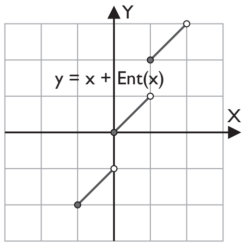
a)



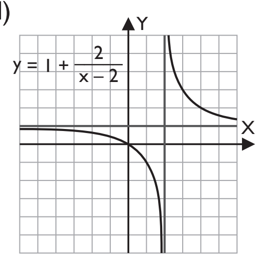
b)



c)



d)



Solución:

a) Ten unha descontinuidade evitable en $x = 3$, que se evita facendo $f(3) = 6$.

b) Ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito en $x = -1$ e $x = 1$.

c) Ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito nos valores enteiros.

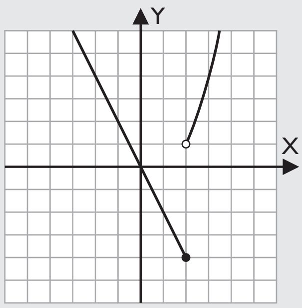
d) Ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito en $x = 2$.

12. Representa e estuda a continuidade das seguintes funcións:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ L\,x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Solución:



A función está definida a anacos con dúas funcións polinómicas que sempre son continuas no seu dominio. O único punto conflitivo pode ser para $x = 2$.

a) $f(2) = -4$

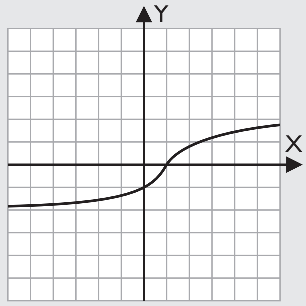
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-2x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 2x + 1) = 1$

Como os límites laterais non son iguais, non existe o $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Existe unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito en $x = 2$.

b)



A función está definida a anacos cunha función exponencial e unha logarítmica que sempre son continuas no seu dominio. O único punto conflitivo pode ser para $x = 1$.

a) $g(1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2^x - 2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} L\,x = 0$

Como os límites laterais son iguais, o $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

A función é continua.

13. Estuda a continuidade das seguintes funcións:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Solución:

a) É unha función racional que é continua en todo o seu dominio.

Os valores onde non existe a función son $x = -1$ e $x = 1$.

- En $x = -1$:

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$

A función ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.

- En $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$

A función ten unha descontinuidade 1ª especie de salto infinito.

b) É unha función racional que é continua en todo o seu dominio.

O valor onde non existe a función é $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

A función ten unha descontinuidade evitable. Evítase facendo $f(2) = 4$.

14. Atopa o valor do parámetro **k** para que a seguinte función sexa continua en x = 2:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{se } x \le 2 \\ kx - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

a) f(2) = 0

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (kx - 1) = 2k - 1$

c) Para que sexa continua, o límite debe existir cando **x** tende a 2, e ser igual que f(2).

$$2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2$$

5. Asíntotas de funcións racionais

Pensa e calcula

Calcula mentalmente os seguintes límites:

a) $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2}$ b) $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$ c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

Solución:

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0

Aplica a teoría

Calcula as asíntotas e a posición da gráfica respecto das asíntotas das seguintes funcións:

15. $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$

Solución:

Verticais: x = –2, x = 2

$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$ $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$

Horizontais: y = 0

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0^-$

A gráfica está por debaixo da asíntota.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0^-$

A gráfica está por debaixo da asíntota.

Oblicuas: non ten.

16. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

Solución:

Verticais: x = –2

$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty$ $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$

Horizontais: non ten.

Oblicuas: y = x – 2

$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x+2} = 0^-$

A gráfica está debaixo da asíntota.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x+2} = 0^+$

A gráfica está enriba da asíntota.

17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Solución:

Verticais: non ten.

Horizontais: y = 0

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^-$$

A gráfica está debaixo da asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^+$$

A gráfica está enriba da asíntota.

Oblicuas: non ten.

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Solución:

Verticais: x = 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

Horizontais: y = 1

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0^-$$

A gráfica está debaixo da asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0^-$$

A gráfica está debaixo da asíntota.

Oblicuas: non ten.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Dada a función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

Determina as asíntotas da función.

- ☐ Asíntota vertical: $x = 3$
- ☐ Asíntota oblicua: $y = x$
- ☒ Asíntota vertical: $x = -3$, asíntota oblicua: $y = x - 9$
- ☐ Non ten asíntotas.

2 Dada a función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \le 0 \\ (x-1)^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Estuda a súa continuidade no punto $x = 0$.

- ☐ É continua en $x = 0$.
- ☒ Ten unha descontinuidade de salto finito.
- ☐ Ten unha descontinuidade evitable.
- ☐ Ten unha descontinuidade de salto infinito.

3 A profundidade da capa de area nunha praia verase afectada pola construción dun dique. Nunha zona da praia, esa profundidade virá dada pola seguinte función (**P** é a profundidade en metros, e **t**, o tempo en anos dende o inicio da construción). Se a profundidade chegase a superar os 4 metros, deberíase elevar a altura do paseo marítimo.

$$P(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{se } 0 > 1 \end{cases}$$

É a profundidade unha función continua do tempo?

- ☒ É continua para todo valor de **t**.
- ☐ Ten unha descontinuidade de salto finito en $t = 1$.
- ☐ Ten unha descontinuidade evitable en $t = 1$.
- ☐ Ten unha descontinuidade de salto infinito en $t = 1$.

4 No enunciado anterior, por moito tempo que pase, será necesario elevar a altura do paseo por causa da profundidade da capa de area?

- ☐ Non, porque non superará 1 m.
- ☒ Non, porque non superará os 4 m.
- ☐ Si, porque superará os 4 m.
- ☐ Non se pode saber.

5 Estuda a continuidade no intervalo [0,4] da seguinte función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & \text{se } 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

- ☐ Ten unha descontinuidade de salto finito en $x = 1$.
- ☐ Ten unha descontinuidade evitable en $x = 1$.
- ☐ Ten unha descontinuidade de salto infinito en $x = 1$.
- ☒ É continua para todo valor de x.

6 Dada a función $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, pídese calcular as súas asíntotas.

- ☐ Asíntota vertical: $x = -2$
- ☐ Asíntota oblicua: $y = -x$
- ☐ Asíntota vertical: $x = 2$, asíntota horizontal: $y = 1/2$
- ☒ Asíntota vertical: $x = 2$, asíntota horizontal: $y = -1$

7 Estuda a descontinuidade da función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

- ☐ Ten unha descontinuidade de salto finito en $x = 2$.
- ☒ Ten unha descontinuidade evitable en $x = 2$ e unha descontinuidade de salto infinito en $x = 3$.
- ☐ Ten unha descontinuidade evitable en $x = 3$.
- ☐ É continua para todo valor de x.

8 Supoñamos que o valor V, en euros, dun produto diminúe ou se desvaloriza co tempo t, en meses, onde:

$$V(t) = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2};\ t \ne 0$$

Atopa: $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$

☐ 75 ☐ 50 ☒ 25 ☐ $+\infty$

9 Calcula os valores de **a**, **b** $\in \mathbb{R}$ para que a función:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ bx & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

sexa continua en todo punto.

- ☐ $a = 1, b = 3$
- ☐ $a = -1/3, b = -3$
- ☒ $a = 1/3, b = \sqrt{2}/3$
- ☐ $a = 1, b = \sqrt{2}$

10 O número de individuos, en millóns, dunha poboación vén dado pola función:

$$f(t) = \frac{18 + t^2}{(t+3)^2}$$

onde **t** é o tempo medido en anos dende $t = 0$. Calcula o tamaño da poboación a longo prazo, cando o tempo tende a ∞.

☒ 1 ☐ 18 ☐ 6 ☐ $+\infty$

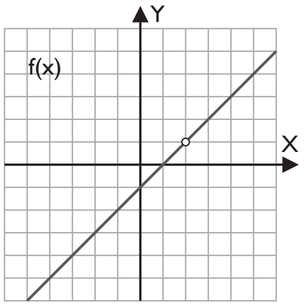
Exercicios e problemas

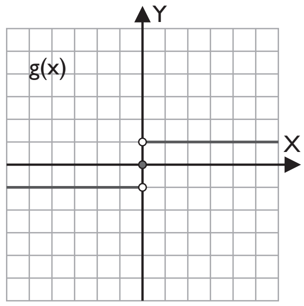
1. Límite dunha función nun punto

19. Observa a gráfica en cada caso, atopa o límite e, se non existe, xustifícao:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ sendo $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ sendo $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ non existe.

20. Completa a táboa para estimar o límite en cada caso:

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$				→	

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$				→	

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 2}$

Solución:

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	1,111	1,01	1,001	→	1

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	0,909	0,990	0,999	→	1

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 2} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 2} = 1$

21. Calcula mentalmente os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 5x + 2)$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -6} \sqrt{2 - x}$

Solución:

a) -2 b) 2 c) $2\sqrt{2}$

2. Límite dunha función no infinito

22. Completa a táboa en cada caso:

x	−10	−100	−1 000	→	−∞
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$				→	

x	10	100	1 000	→	+∞
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$				→	

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x + 1}$

Solución:

x	−10	−100	−1 000	→	−∞
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	1,11111	1,01	1,001	→	1

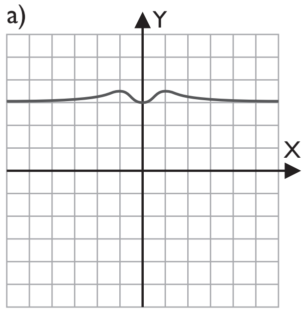
x	10	100	1 000	→	+∞
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	0,9090	0,99	0,999	→	1

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x + 1} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x + 1} = 1$

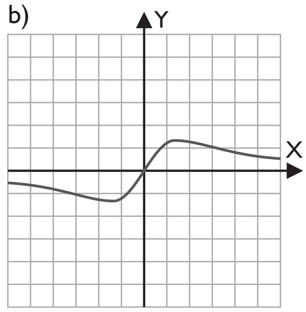
23. Asocia cada gráfica cunha función axudándote dos límites aos que tende a función cando x tende a infinito.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ $i(x) = 3 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

a)



b)



Solución:

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ é a gráfica b).

$i(x) = 3 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$ é a gráfica a).

24. Ordena de menor a maior as ordes dos seguintes infinitos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1{,}5^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{10}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} L\,x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2{,}5^x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/3} < \lim\limits_{x\to+\infty} x < \lim\limits_{x\to+\infty} x^3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1{,}5^x < \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x < \lim\limits_{x\to+\infty} e^x$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x < \lim\limits_{x\to+\infty} x^{10} < \lim\limits_{x\to+\infty} 3^x$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} L\,x < \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 < \lim\limits_{x\to+\infty} 2{,}5^x$

25. Indica se os seguintes límites son infinitos, un número ou unha indeterminación:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4 + x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4^x}{x+5}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^2+1)}{x^2}$

Solución:

a) $+\infty$ b) $[\infty - \infty]$ c) $+\infty$ d) 0

3. Límites de funcións polinómicas e racionais

26. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 + 5x^2 - x + 2)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1)$

Solución:

a) $+\infty$ b) $+\infty$

27. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 3x^2 + 4}$ b) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$

Solución:

a) 2/3 b) 2

28. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + x - 2}$ b) $\lim\limits_{x\to-6} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + 10x^2 + 25x}$

Solución:

a) 0 b) –7/6

29. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x}{x^2 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2}{x^2 - 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2}{x^2 - 1} = -\infty$

30. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + x}{x^3 + 2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}$

Solución:

a) 0 b) 7/2

31. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 5}{x^2 + 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 + x - 1}{4x^3 + 3}$

Solución:

a) $-\infty$ b) 1/2

32. Calcula os límites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2} - x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^3 - 4}{x^2 + 1} - 2x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{x}\right)$

Solución:

a) $-\infty$ b) 0

c) $\lim\limits_{x\to0^-} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{x}\right) = -\infty$

4. Continuidade

33. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x > 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

Razoa se é continua en x = 0.

Solución:

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (e^{-x} - 1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

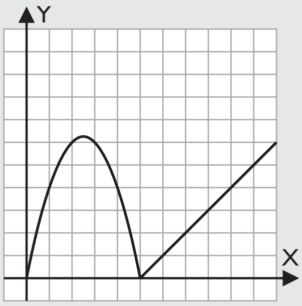
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

f(x) é continua en x = 0.

34. Representa e estuda a continuidade da seguinte función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{se } 0 \le x < 5 \\ x - 5 & \text{se } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

Solución:



Como a función está definida por dúas funcións polinómicas que son continuas, o único punto conflitivo pode ser para o valor x = 5.

$f(5) = 0$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 5x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x - 5) = 0$

$f(5) = \lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0 \Rightarrow$ f(x) é continua en x = 5.

35. Dada a función f(x):

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$$

O segundo membro da igualdade carece de sentido cando x = 4. Como elixir o valor de f(4) para que a función f(x) sexa continua nese punto?

Solución:

$$f(4) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \to 4} x = 4$$

36. Estuda a continuidade da función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Solución:

A función está definida para $[0, 4) \cup (4, +\infty)$.

Estúdanse os valores x = 4 e x = 0.

- En x = 4:

  f(4) non existe.

  $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = 1/4$

  Ten unha descontinuidade evitable que se evita facendo f(4) = 1/4.
- En x = 0:

  $f(0) = 1/2$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ non existe.

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1/2$

  É continua pola dereita.

  Hai unha descontinuidade de 2ª especie en x = 0.

37. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{se } x \le 1 \\ x^2 + k & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determina o valor de k para que a función sexa continua.

Solución:

Como está definida por funcións polinómicas, o punto que pode ser conflitivo dáse para o valor x = 1.

$f(1) = 7$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 5) = 7$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k$

Como para ser continua:

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

temos:

$1 + k = 7 \Rightarrow k = 6$

5. Asíntotas de funcións racionais

38. Calcula a asíntota da seguinte función e estuda a posición da curva respecto dela:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x - 1}$$

Solución:

Verticais: x = 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^2}{x - 1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x^2}{x - 1} = +\infty$

Horizontais: non ten.

Oblicuas: y = 2x + 2

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0^-$

A gráfica está por debaixo da asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-1} = 0^+$$

A gráfica está por enriba da asíntota.

39. Calcula a asíntota da seguinte función e estuda a posición da curva respecto dela:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+8}$$

Solución:

Verticais: non ten.

Horizontais: $y = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^-$$

A gráfica está por debaixo da asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^+$$

A gráfica está por enriba da asíntota.

Oblicuas: non ten.

40. Calcula a asíntota da seguinte función e estuda a posición da curva respecto dela:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Solución:

Verticais: $x = -2, x = 2$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

Horizontais: $y = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

A gráfica está por enriba da asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

A gráfica está por enriba da asíntota.

Oblicuas: non ten.

41. Calcula a asíntota da seguinte función e estuda a posición da curva respecto dela:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$$

Solución:

Verticais: $x = -2, x = 1$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

Horizontais: $y = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^+$$

A gráfica está por enriba da asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^-$$

A gráfica está por debaixo da asíntota.

Oblicuas: non ten.

Para ampliar

42. Estuda a continuidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x \le 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{se } 1 < x \le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 1$:

  $f(1) = 0$

  $$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (1-x^2) = 0$$

  $$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (3x^2-12x+9) = 0$$

  $\lim_{x\to1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ A función é continua en $x = 1$.

- En $x = 3$:

  $f(3) = 0$

  $$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} (3x^2-12x+9) = 0$$

  $$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} (-2x^2+16x-30) = 0$$

  $\lim_{x\to3} f(x) = f(3) \Rightarrow$ A función é continua en $x = 3$.

  A función é continua en $\mathbb{R}$.

43. Estuda a continuidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{se } x < -1 \\ 2x+2 & \text{se } -1 \le x \le 2 \\ -x^2+8x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = -1$:

  $f(-1) = 0$

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0$

  $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (2x + 2) = 0$

  $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ A función é continua en $x = -1$.

- En $x = 2$:

  $f(2) = 6$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x + 2) = 6$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2 + 8) = 12$

  $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2) \Rightarrow$ A función non é continua en $x = 2$.

  Ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito.

44. Estuda a continuidade de f(x):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 4 & \text{se } 1 < x \leq 4 \\ (x-4)^2 + 2 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 1$:

  $f(1) = 4$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + 3) = 4$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4 = 4$

  $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ A función é continua en $x = 1$.

- En $x = 4$:

  $f(4) = 4$

  $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 4 = 4$

  $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \left((x-4)^2 + 2\right) = 2$

  $\lim\limits_{x\to 4} f(x) \neq f(4) \Rightarrow$ A función non é continua en $x = 4$.

  Ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito.

45. Estuda a continuidade da función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Solución:

En $x = 2$:

$f(2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x(x-2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ A función é continua en $x = 2$ e por conseguinte é continua en $\mathbb{R}$.

46. Estuda a continuidade de f(x):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{x+2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

A función está definida mediante dúas funcións racionais. Ademais de estudar o valor $x = 2$, hai que estudar o valor $x = 1$, para o que non está definida a función: $\dfrac{x+2}{x-1}$

- En $x = 1$:

  $f(1)$ non existe.

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+2}{x-1} = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$

  A función é descontinua en $x = 1$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.

- En $x = 2$:

  $f(2) = 4$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x-1} = 4$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2 - 2x}{x+2} = 2$

  A función é descontinua en $x = 2$, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito.

Problemas

47. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{se } x \neq 5 \\ 0 & \text{se } x = 5 \end{cases}$$

a) Demostra que f(x) non é continua en x = 5.

b) Existe unha función continua que coincida con f(x) para todos os valores x ? 5? En caso afirmativo, dá a súa expresión.

Solución:

a) f(5) = 0

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{x-5}} =$$

$$= \lim_{x \to 5} (x + 5) = 10$$

En x = 5 hai unha descontinuidade evitable. Evítase definindo f(5) = 10.

b) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 5 \\ 10 & \text{se } x = 5 \end{cases}$

48. Calcula as asíntotas da función e estuda a posición da gráfica respecto delas.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x + 2}$$

Solución:

Verticais: x = –2

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 - 3x}{x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2 - 3x}{x + 2} = +\infty$$

Horizontais: non ten.

Oblicuas:

$$\frac{3x^2 - 3x}{x + 2} = 3x - 9 + \frac{18}{x + 2}$$

y = 3x – 9

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{18}{x + 2} = 0^-$$

A gráfica está por debaixo da asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{18}{x + 2} = 0^+$$

A gráfica está por enriba da asíntota.

49. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x} & \text{se } x \geq -1 \\ \dfrac{2x}{x - 1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

a) Estuda a continuidade de f.

b) Atopa as asíntotas da gráfica de f.

Solución:

a) A función está definida mediante dúas funcións racionais. Ademais de estudar o valor x = –1, hai que estudar o valor x = 0, para o que non está definida a función: $\dfrac{x^3 + 3x + 1}{x}$

- En x = –1:

  f(–1) = 3

  $$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x - 1} = 1$$

  $$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = 3$$

  A función é descontinua en x = –1, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito.

- En x = 0:

  f(0) = non existe.

  $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = -\infty$$

  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = +\infty$$

  A función é descontinua en x = 0, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.

b) A función ten unha asíntota vertical en x = 0.

Ten unha asíntota horizontal en y = 2.

50. Determina o valor de **a** e **b** para que a función f(x) sexa continua.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{se } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

Hai que estudar os valores x = 0 e x = 2.

f(0) = –a

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x - a) = -a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$$

Ten que cumprirse:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$-1 = -a \Rightarrow a = 1$

En x = 2:

f(2) = 1

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (bx - 5) = 2b - 5$$

Ten que cumprirse:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$1 = 2b - 5 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

51. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{se } x < 2 \\ |x - 5| & \text{se } 2 \le x < 10 \end{cases}$$

Determina o valor de **a** sabendo que f é continua e que $a > 0$.

Solución:

$f(2) = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} |x - 5| = 3$

Ten que cumprirse:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Como $a > 0 \Rightarrow a = 3$

52. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5a & \text{se } x < 0 \\ bx^2 + 3 & \text{se } 0 \le x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{se } 2 \le x \end{cases}$$

Estuda a continuidade de f(x) segundo os valores das constantes **a** e **b**.

Solución:

En $x = 0$:

$f(0) = 3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (3x + 5a) = 5a$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (bx^2 + 3) = 3$

Ten que cumprirse:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$5a = 3 \Rightarrow a = 3/5$

En $x = 2$:

$f(2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (bx^2 + 3) = 4b + 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0$

Ten que cumprirse:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$4b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3/4$

Para profundar

53. Estúdase a continuidade de f(x):

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < -1 \\ \dfrac{4}{x + 3} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 1 + L\,x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

A función está definida por funcións continuas nos seus dominios. Os valores que se estudan son $x = -1$; $x = 1$.

- En $x = -1$:

$f(-1) = 2$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} e^x = 1/e$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{4}{x + 3} = 2$

A función ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito en $x = -1$.

- En $x = 1$:

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4}{x + 3} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1 + L\,x) = 1$

A función é continua en $x = 1$.

54. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{se } x \le 2 \\ L\,(x - 1) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Estuda a continuidade segundo o valor do parámetro **a**.

Solución:

$f(2) = 3a + 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} L\,(x - 1) = 0$

Ten que cumprirse:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

55. Considérase a función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{se } x \le -2 \\ a & \text{se } -2 < x \le 2 \\ x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula o valor de **a** para que f(x) sexa continua en $x = -2$.

b) Para o valor de **a** atopado, di se é continua a función en $x = 2$.

Solución:

a) En $x = -2$:

$f(-2) = 4a - 2$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} a = a$

Ten que cumprirse:

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

$4a - 2 = a \Rightarrow a = 2/3$

b) Para $a = 2/3$:

$f(2) = 2/3$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2/3 = 2/3$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$

A función ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito.

56. Estudouse a evolución da ganancia **y** en céntimos de euro en cada instante dende un tempo inicial ata pasados 5 anos, pola fabricación dun determinado produto, e modelizouse funcionalmente esta evolución deste xeito:

Durante o primeiro ano: $y = 2t^2$

Durante o segundo e terceiro ano: $y = 4t - 2$

Durante o resto: $y = e^{3-t}$

Explica a continuidade da función.

Solución:

Escríbese a función:

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 4t - 2 & \text{se } 1 \le t < 3 \\ e^{3-t} & \text{se } t \ge 3 \end{cases}$$

Estúdanse os valores $t = 1$ e $t = 3$.

En $t = 1$:

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2t^2 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4t - 2) = 2$

A función é continua en $t = 1$.

En $t = 3$:

$f(3) = 1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (4t - 2) = 10$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} e^{3-t} = 1$

A función non é continua en $t = 3$. Ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto finito.

57. Un comerciante vende un determinado produto. Por cada unidade de produto cobra a cantidade de 5 €. Non obstante, se se lle encargan máis de 10 unidades, decide diminuír o prezo por unidade, e por cada **x** unidades cobra a seguinte cantidade:

$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{se } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

a) Atopa **a** para que o prezo varíe de forma continua ao variar o número de unidades que se mercan.

b) A canto tende o prezo dunha unidade cando se mercan «moitísimas» unidades?

Solución:

a) Estúdase en $x = 10$.

$f(10) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} 5x = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

Ten que cumprirse:

$\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = f(10)$

$\sqrt{100a + 500} = 50 \Rightarrow a = 20$

b) O prezo por unidade é:

$$\frac{c(x)}{x}$$

Calcúlase: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20}$

58. Estuda a continuidade da función: $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

Solución:

É o cociente de dúas funcións continuas, logo é continua; salvo cando se anule o denominador, o que nunca sucede, xa que:

$$1 + |x| \ge 1$$

A función é continua en $\mathbb{R}$.

59. Calcula, de forma razoada, dúas funcións que non sexan continuas nun certo valor $x = a$ do seu dominio e tales que a función suma sexa continua nese valor.

Solución:

Calquera función constante é continua en $\mathbb{R}$. Trátase de buscar dúas funcións que se rompan nun punto e que ao sumarllas dea unha constante. Por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A función $f(x) + g(x) = 1$ é continua en $\mathbb{R}$.

Paso a paso

60. Atopa o seguinte límite e representa a función correspondente para comprobalo graficamente.

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

61. Atopa os seguintes límites e representa a función correspondente para comprobalo graficamente.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

62. Representa a seguinte función e estuda as súas descontinuidades.

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

63. Representa a función $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$, atopa as súas asíntotas e represéntaas.

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

64. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

Atopa os seguintes límites e representa a función correspondente para comprobalo graficamente.

65. $\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x + 1)$

Solución:

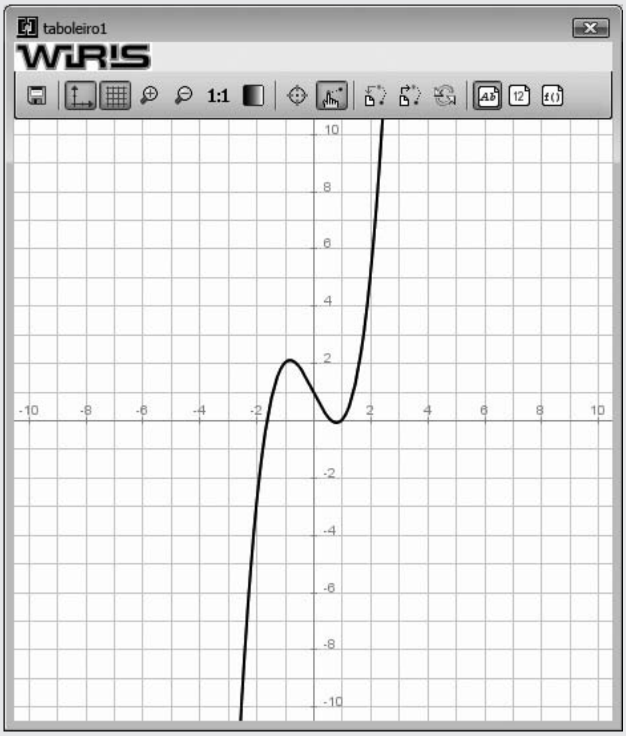
Exercicio 65

$f(x) = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x + 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) \Rightarrow 5$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2}

Cando $x \to 2$, vese que $y \to 5$



66. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{x^2}$

Solución:

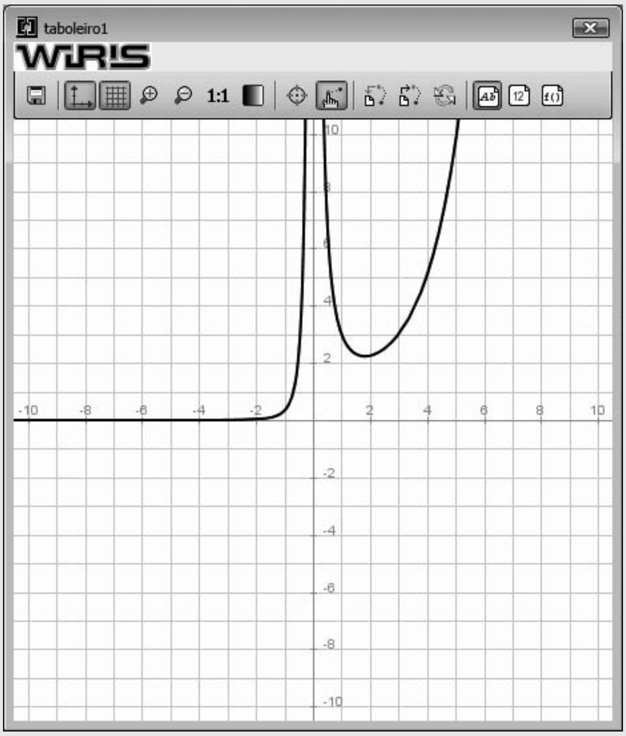
Exercicio 66

$f(x) = \dfrac{3^x}{x^2} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{x^2} \cdot 3^x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow +\infty$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to +\infty$, vese que $y \to 0$



67. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^2)$

Solución:

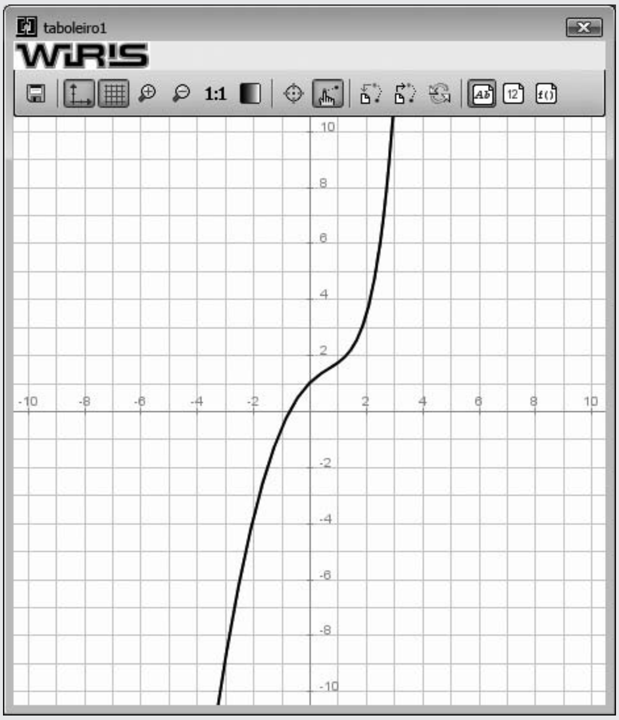
Exercicio 67

$f(x) = e^x - x^2 \Rightarrow x \mapsto e^x - x^2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow +\infty$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to +\infty$, vese que $y \to +\infty$



68. $\lim\limits_{x \to 2} 5^{x-2}$

Solución:

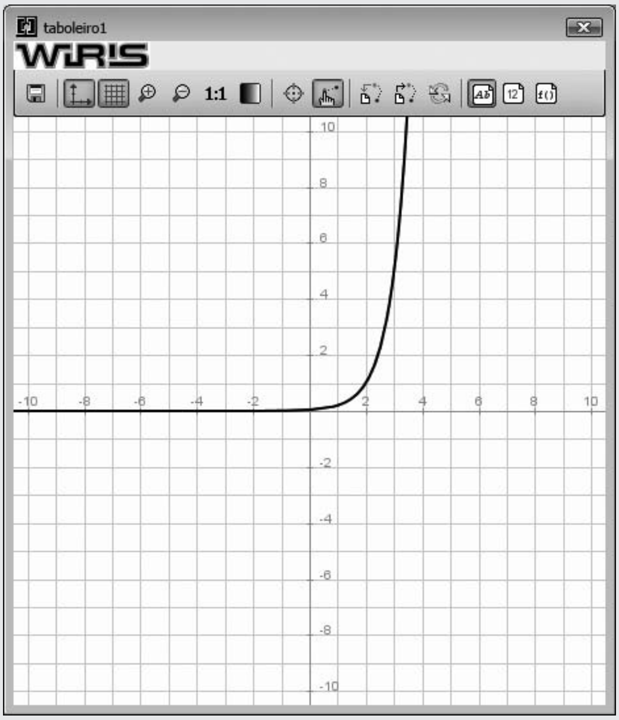
Exercicio 68

$f(x) = 5^{x-2} \Rightarrow x \mapsto 5^{x-2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \Rightarrow 1.$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2}

Cando $x \to 2$, vese que $y \to 1$



69. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

Solución:

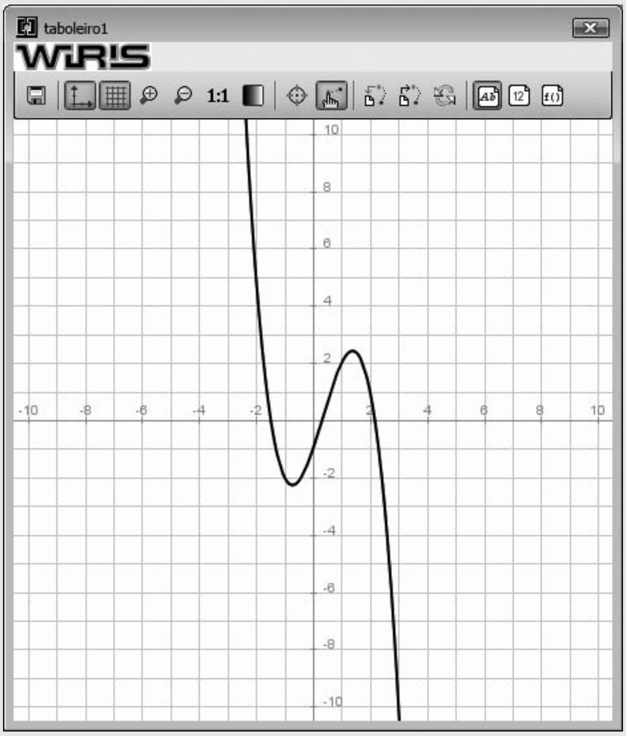
Exercicio 69

$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \;\rightarrow\; x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \;\rightarrow\; +\infty$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to -\infty$, vese que $y \to +\infty$



70. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

Solución:

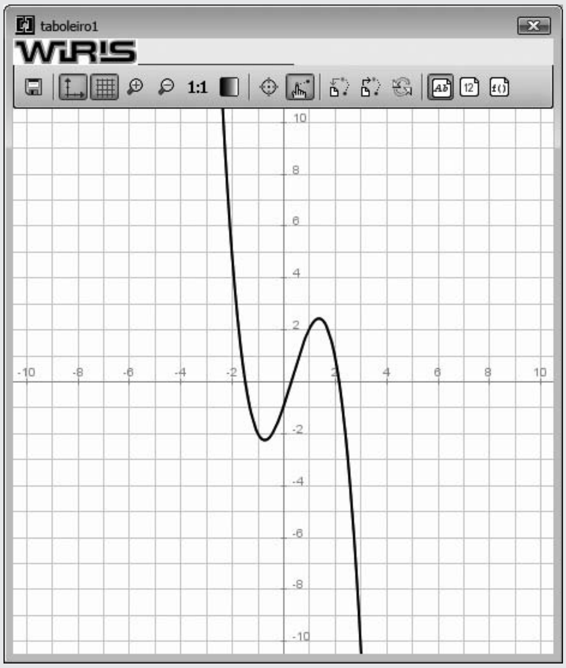
Exercicio 70

$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \;\rightarrow\; x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;\rightarrow\; -\infty$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to +\infty$, vese que $y \to -\infty$



71. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}$

Solución:

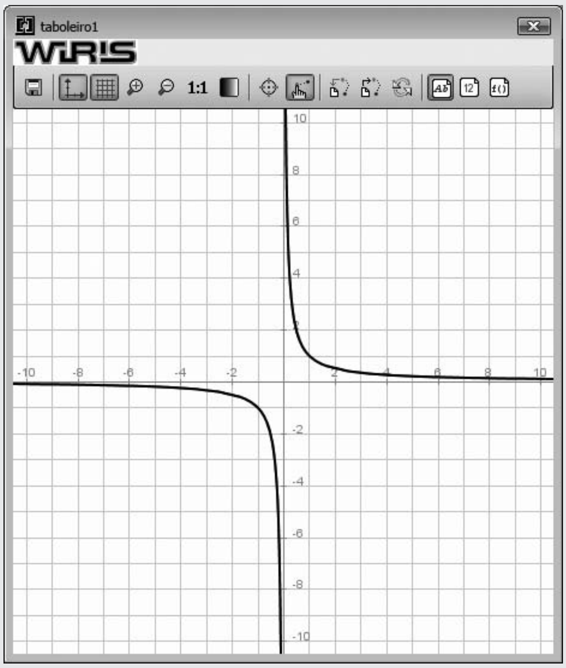
Exercicio 71

$f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x} \;\rightarrow\; x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) \;\rightarrow\; \dfrac{1}{3}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to 3$, $y \to \dfrac{1}{3}$



72. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

Solución:

Exercicio 72

$f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{3 \cdot x - 5}{x - 2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \Rightarrow \pm\infty$

Como dá máis e menos infinito, temos que atopar os dous límites laterais.

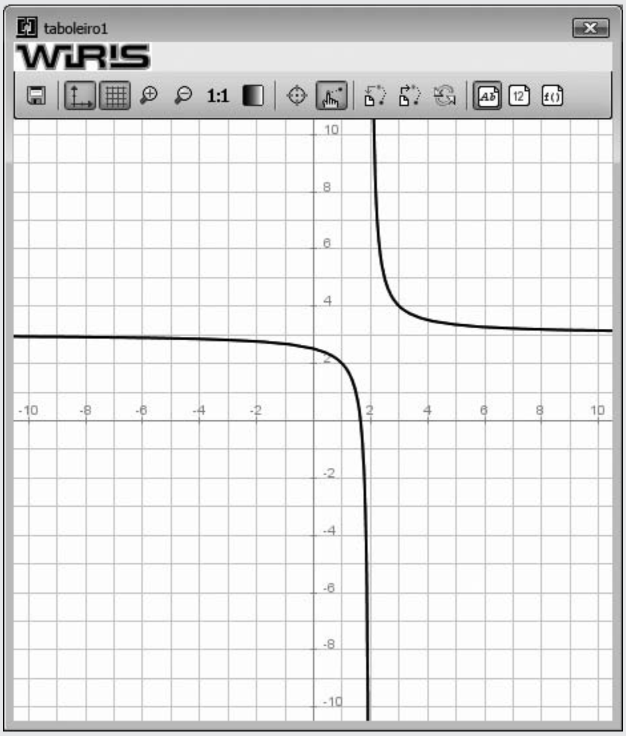
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow -\infty$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to 2^+$, vese que $y \to +\infty$

Cando $x \to 2^-$, vese que $y \to -\infty$



73. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \dfrac{x^3}{x^2 - 9} \right)$

Solución:

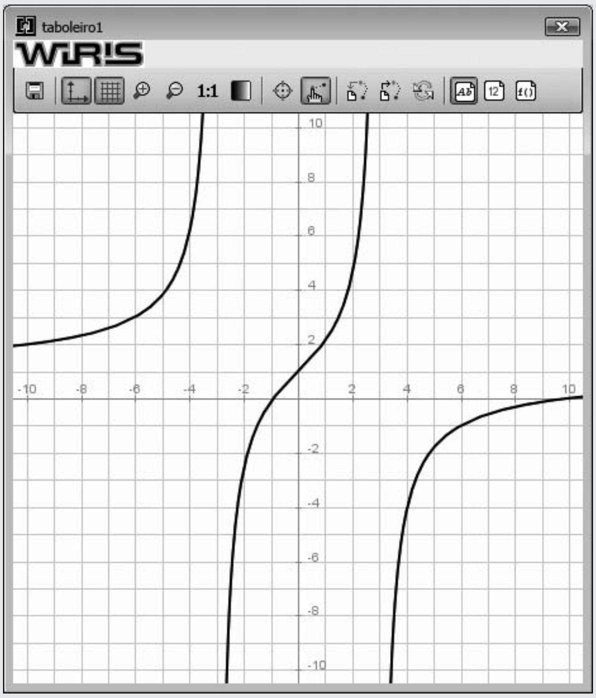
Exercicio 73

$f(x) = x + 1 - \dfrac{x^3}{x^2 - 9} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2 - 9 \cdot x - 9}{x^2 - 9}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow 1$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to +\infty$, $y \to 1$



74. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{3^x}$

Solución:

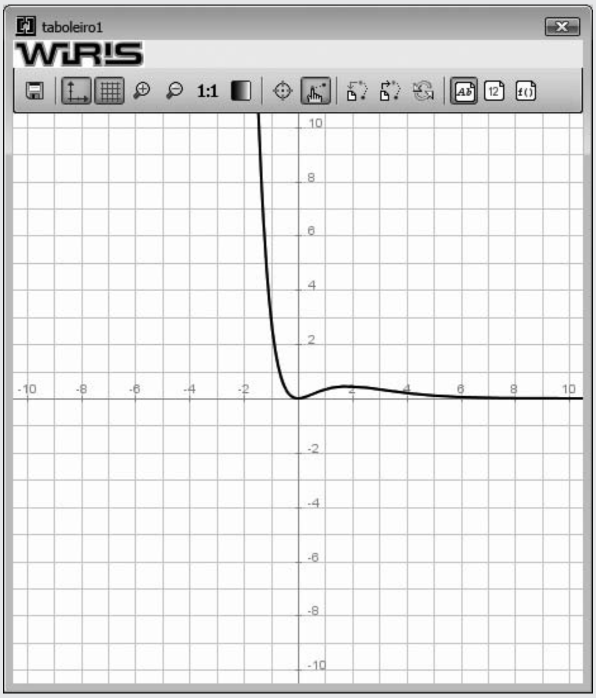
Exercicio 74

$f(x) = \dfrac{x^2}{3^x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2}{3^x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow 0$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando $x \to +\infty$, $y \to 0$



75. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x^2}{3x^2}$

Solución:

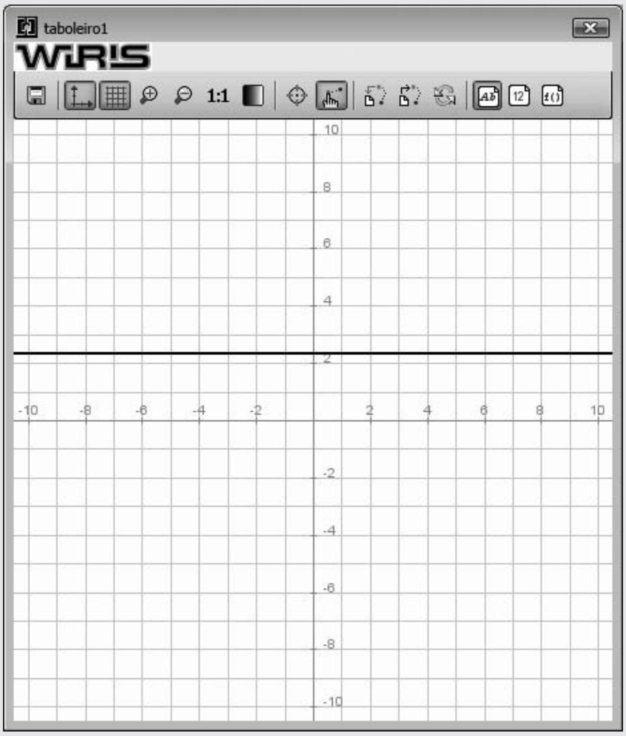
Exercicio 75

$f(x) = \dfrac{7x^2}{3x^2} \rightarrow x \mapsto \dfrac{7}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow \dfrac{7}{3}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando x → +∞, y → $\dfrac{7}{3}$



76. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{3^x}$

Solución:

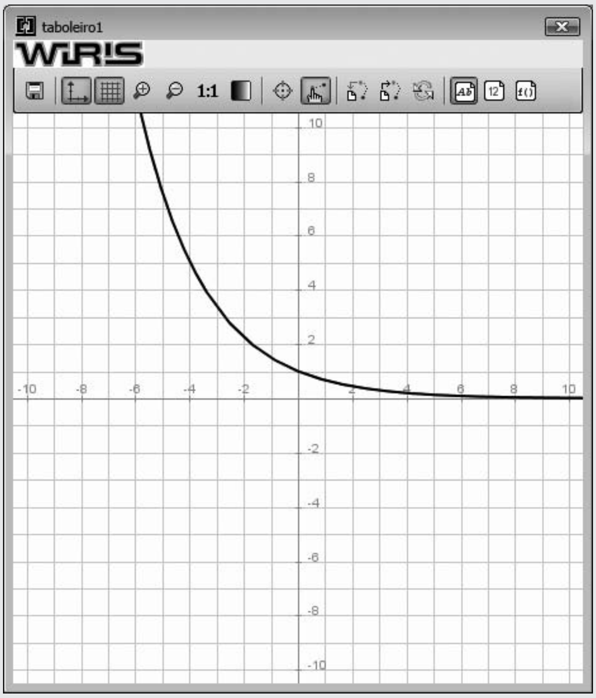
Exercicio 76

$f(x) = \dfrac{2^x}{3^x} \rightarrow x \mapsto \dfrac{2^x}{3^x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow 0$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Cando x → 1, vese que y → $\dfrac{\sqrt[3]{e^2}}{e} = 0.71653$



Representa as seguintes funcións e estuda as súas continuidades.

77. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

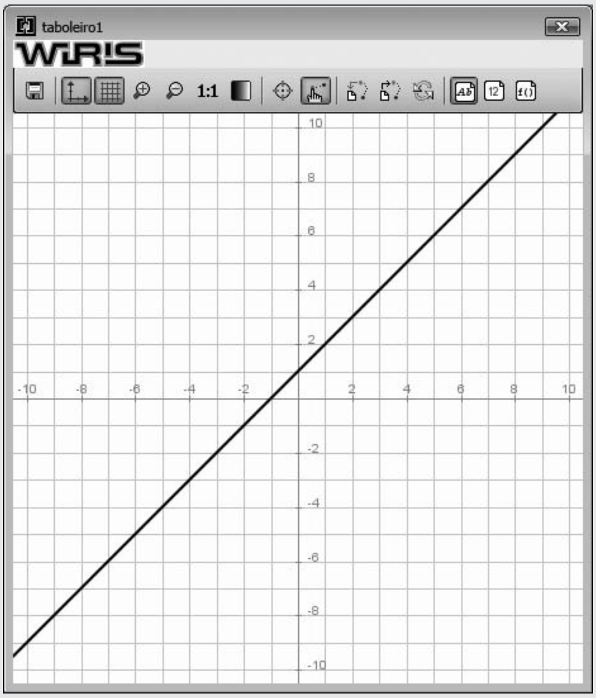
Solución:

Exercicio 77

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow x \mapsto x + 1$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

É descontinua en x = 1, onde ten unha descontinuidade evitable.



78. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

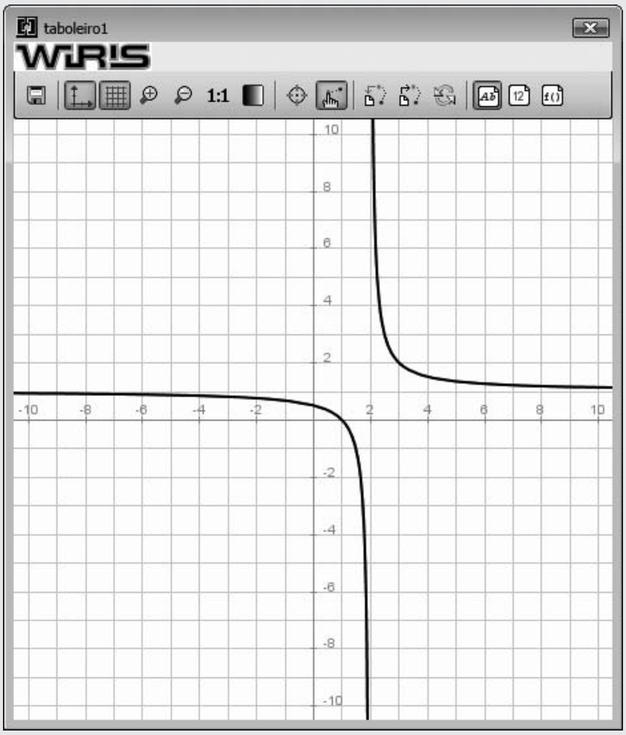
Solución:

Exercicio 78

$f(x) = \dfrac{x-1}{x-2} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

É descontinua en x = 2, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto infinito.



79. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Solución:

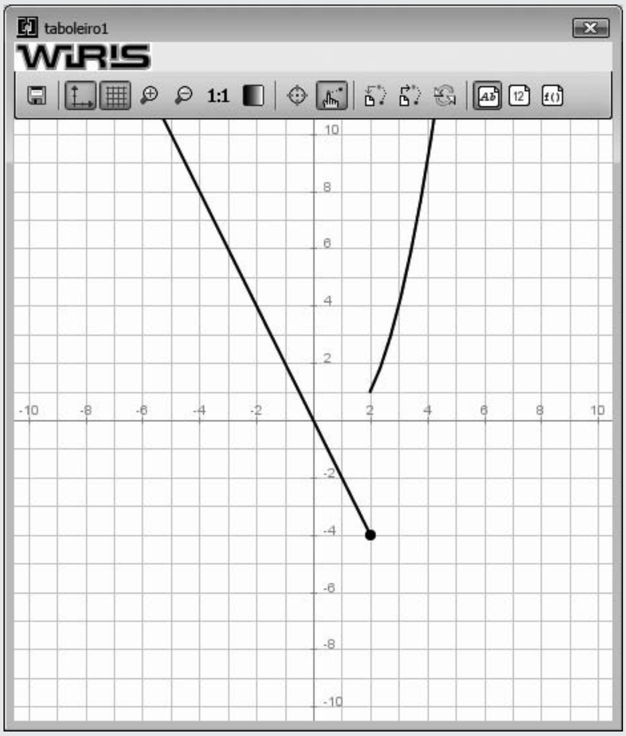
Exercicio 79

debuxar(− 2x, -∞..2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(2, −4), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar(x^2 − 2x + 1, 2..+∞, {cor = negro, anchura_liña = 2})

É descontinua en x = 2, onde ten unha descontinuidade de 1ª especie de salto 5.



80. $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ L\,x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Solución:

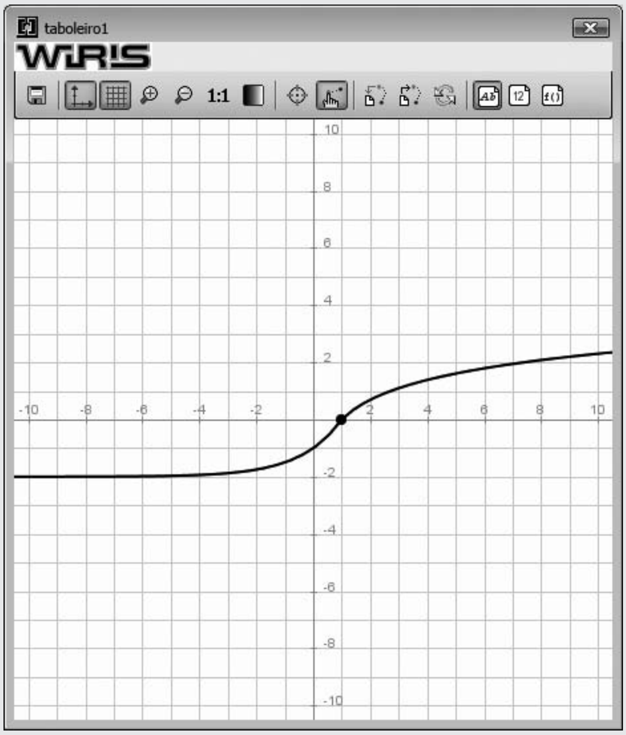
Exercicio 80

debuxar(2^x − 2, -∞..1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(1, 0), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar(ln(x), 1..+∞, {cor = negro, anchura_liña = 2})

É continua en toda a recta real IR.



81. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \le 2 \\ -x + 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Solución:

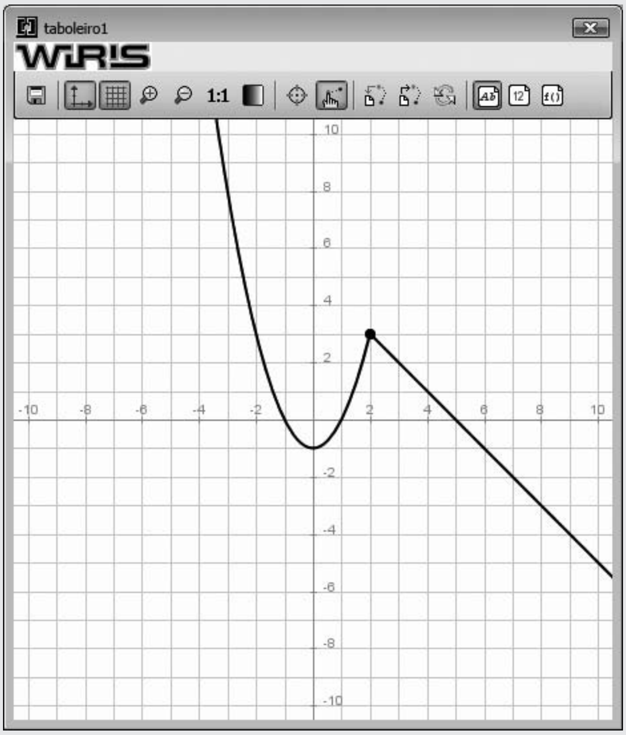
Exercicio 81

debuxar(x^2 − 1, −∞..2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

debuxar(punto(2, 3), {cor = negro, tamaño_punto = 8})

debuxar(−x + 5, 2..+∞, {cor = negro, anchura_liña = 2})

É continua en toda a recta real IR.



Representa as seguintes funcións, atopa as súas asíntotas e represéntaas:

82. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Solución:

Exercicio 82

debuxar$\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right.$, {cor = negro, anchura_liña = 2}$\left.\right)$

A asíntota vertical é a raíz do denominador : x = −2

debuxar(x = − 2, {cor = negro, anchura_liña = 2})

Asíntota horizontal : non ten, porque os graos do numerador e do denominador non son iguais.

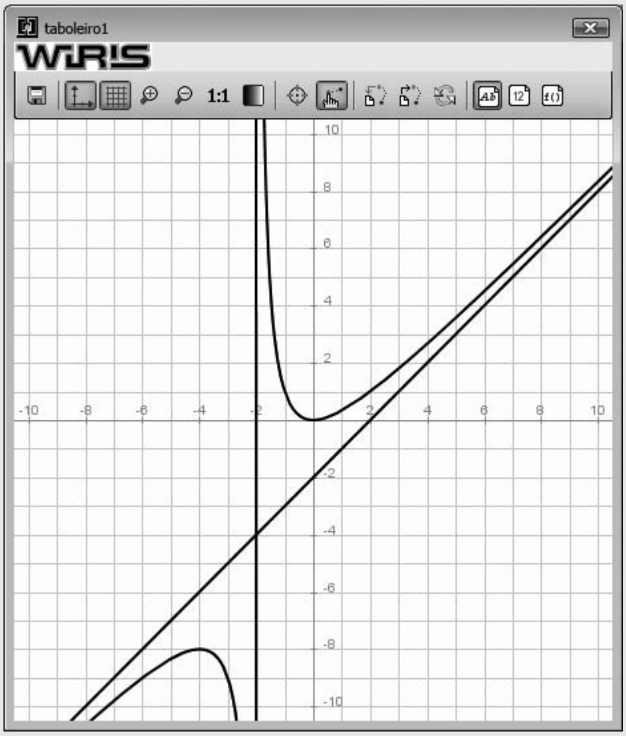
Asíntota oblicua :

$x^2 \;\; \underline{|\, x + 2} \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \;\; \underline{|\, x+2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4 \quad\; x-2$

A asíntota oblicua é: y = x − 2

debuxar(x − 2, {cor = negro, anchura_liña = 2})



83. $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$

Solución:

Exercicio 83

$f(x) = \dfrac{x}{x-3} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x}{x-3}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

A asíntota vertical é a raíz do denominador : x = 3

debuxar(x = 3, {cor = negro, anchura_liña = 2})

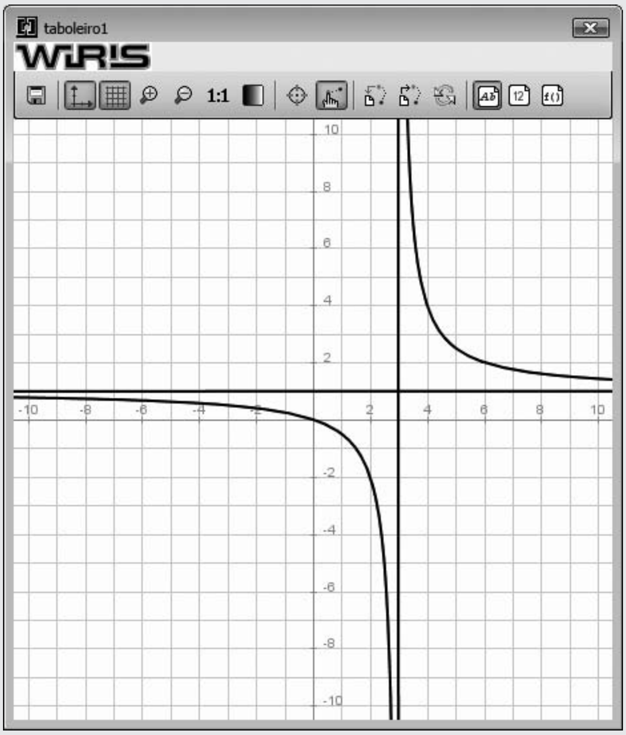
$\lim_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow 1$

A asíntota horizontal é : y = 1

debuxar(y = 1, {cor = negro, anchura_liña = 2})

Asíntota oblicua non hai porque o grao do numerador non é un maior ca o do denominador.



84. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$

Solución:

Exercicio 84

$f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} \rightarrow x \mapsto \dfrac{3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{x^2 + 1}$

debuxar(f(x), {cor = negro, anchura_liña = 2})

Asíntota vertical non hai, porque o denominador nunca se anula.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow 3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow 3$

A asíntota horizontal é : y = 3

debuxar(y = 3, {cor = negro, anchura_liña = 2})

Asíntota oblicua non hai porque o grao do numerador non é un maior ca o do denominador.