5 Programación linear

1. Introdución á programación linear

Pensa e calcula

Escribe unha función f(x, y) que calcule os ingresos que se obteñen ao vender **x** chaquetas a 30 € e **y** pantalóns a 20 €.

Solución:

$f(x, y) = 30x + 20y$

Aplica a teoría

1. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

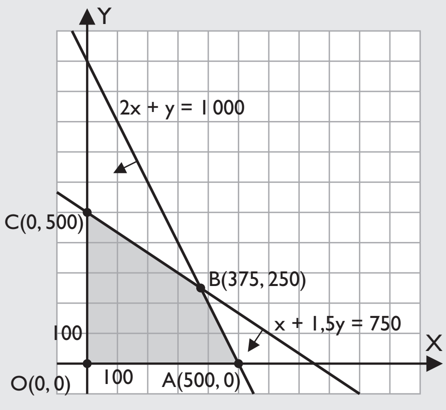
$$\left.\begin{array}{l} 2x + y \le 1\,000 \\ x + 1{,}5y \le 750 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntao graficamente.

b) Atopa os seus vértices.

c) Obtén o valor máximo da función $f(x, y) = 15x + 12y$ no recinto anterior e, así mesmo, o punto en que o alcanza.

Solución:



$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0$

$A(500, 0) \Rightarrow f(500, 0) = 15 \cdot 500 + 12 \cdot 0 = 7\,500$

$B(375, 250) \Rightarrow f(375, 250) = 15 \cdot 375 + 12 \cdot 250 = 8\,625$ **Máximo**

$C(0, 500) \Rightarrow f(0, 500) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 500 = 6\,000$

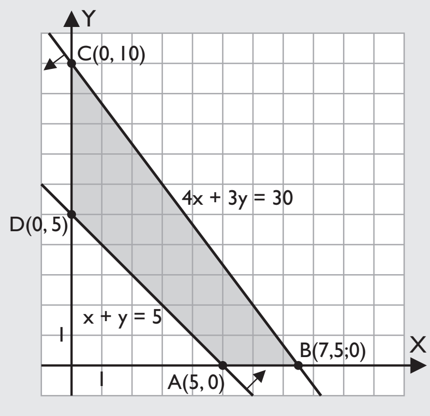
A solución óptima é B(375, 250).

2. Representa graficamente a rexión factible determinada polas seguintes desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 5 \\ 4x + 3y \le 30 \end{array}\right\}$$

Calcula a solución que fai mínima a función obxectivo $z = x + 2y$ sometida ás restricións anteriores.

Solución:



$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 5 + 2 \cdot 0 = 5$ **Mínimo**

$B(7{,}5; 0) \Rightarrow f(7{,}5; 0) = 7{,}5 + 2 \cdot 0 = 7{,}5$

$C(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 0 + 2 \cdot 10 = 20$

$D(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 0 + 2 \cdot 5 = 10$

A solución óptima é A(5, 0).

2. Resolución de problemas de programación linear

Pensa e calcula

Escribe a función obxectivo que calcule os ingresos que se obteñen ao vender **x** bicicletas de paseo a 200 € e **y** bicicletas de montaña a 150 €.

Solución:
f(x, y) = 200x + 150y

Aplica a teoría

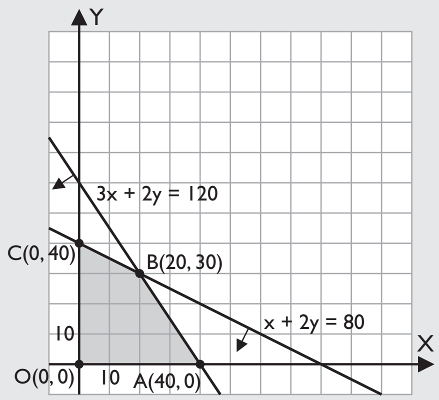
3. Un xastre ten 80 m^2 de tecido A e 120 m^2 de tecido B. Un traxe de cabaleiro require 1 m^2 de A e 3 m^2 de B, e un vestido de señora 2 m^2 de cada tecido. Se a venda dun traxe lle deixa ao xastre o mesmo beneficio que a dun vestido, atopa cantos traxes e vestidos debe fabricar para obter a máxima ganancia.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Traxe	Vestido	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Tecido A	x	2y	$x + 2y \leq 80$	
Tecido B	3x	2y	$3x + 2y \leq 120$	
Beneficio	x	y	f(x, y) = x + y	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 0 + 0 = 0

A(40, 0) ⇒ f(40, 0) = 40 + 0 = 40

B(20, 30) ⇒ f(20, 30) = 20 + 30 = 50 **Máximo**

C(0, 40) ⇒ f(0, 40) = 0 + 40 = 40

d) A solución óptima é B(20, 30).

4. Unha empresa produce dous bens, A e B. Ten dúas factorías e cada unha delas produce os dous bens nas cantidades por hora seguintes:

	Factoría 1	Factoría 2
Ben A	10 unidades/hora	20 unidades/hora
Ben B	25 unidades/hora	25 unidades/hora

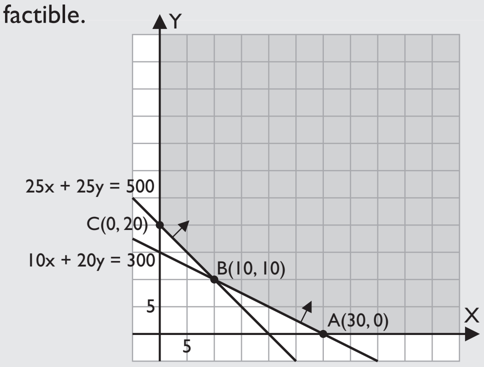
A empresa recibe un pedido de 300 unidades de A e 500 de B. Os custos de funcionamento das dúas factorías son: 100 € por hora para a factoría 1 e 80 € por hora para a factoría 2. Cantas horas debe funcionar cada factoría para minimizar os custos da empresa e satisfacer o pedido?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Factoría 1	Factoría 2	Restricións	
Tempo (h)	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Ben A	10x	20y	$10x + 20y \geq 300$	
Ben B	25x	25y	$25x + 25y \geq 500$	
Custos	100x	80y	f(x, y) = 100x + 80y	Minimizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

A(30, 0) ⇒ f(30, 0) = 100 · 30 + 80 · 0 = 3 000

B(10, 10) ⇒ f(10, 10) = 100 · 10 + 80 · 10 = 1 800

C(0, 20) ⇒ f(0, 20) = 100 · 0 + 80 · 20 =
= 1 600 **Mínimo**

d) A solución óptima é C(0, 20).

5. Un vendedor de libros de segunda man ten na súa tenda 90 libros da colección Fóra de Xogo e 80 da colección Xabarín. Decide facer dous tipos de lotes: o lote de tipo A con 3 libros de Fóra de Xogo e 1 de Xabarín, que vende a 8 €, e o de tipo B con 1 libro de Fóra de Xogo e 2 de Xabarín, que vende a 10 €.

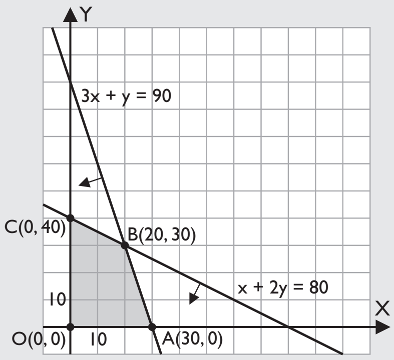
Calcula cantos lotes de cada tipo debe facer o vendedor para maximizar a súa ganancia cando os teña vendido todos?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Lote A	**Lote B**	**Restricións**	
Nº de lotes	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Fóra de Xogo	3x	y	3x + y ≤ 90	
Xabarín	x	2y	x + 2y ≤ 80	
Ganancias	8x	10y	f(x, y) = 8x + 10y	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 8 · 0 + 10 · 0 = 0

A(30, 0) ⇒ f(30, 0) = 8 · 30 + 10 · 0 = 240

B(20, 30) ⇒ f(20, 30) = 8 · 20 + 10 · 30 =
= 460 **Máximo**

C(0, 40) ⇒ f(0, 40) = 8 · 0 + 10 · 40 = 400

d) A solución óptima é B(20, 30).

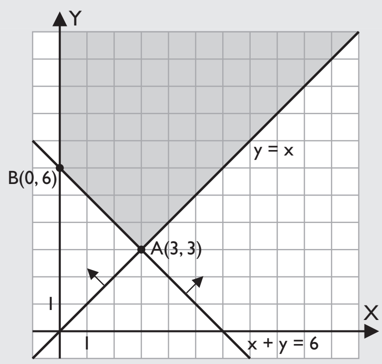
3. Número de solucións

Pensa e calcula

Representa a rexión definida polas seguintes restricións: x ≥ 0 y ≥ 0 x + y ≥ 6 y ≥ x

Está acoutada?

Solución:



Non está acoutada.

Aplica a teoría

6. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

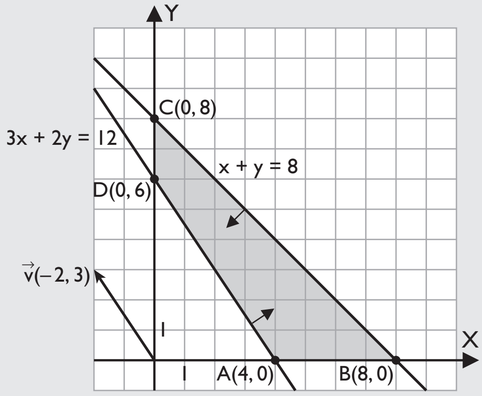
$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 8 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Minimiza neste recinto o valor da función:

$$f(x, y) = 15x + 10y$$

Solución:

a) Rexión factible.



b) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

A(4, 0) ⇒ f(4, 0) = 15 · 4 + 10 · 0 = 60 **Mínimo**

B(8, 0) ⇒ f(8, 0) = 15 · 8 + 10 · 0 = 120

C(0, 8) ⇒ f(0, 8) = 15 · 0 + 10 · 8 = 80

D(0, 6) ⇒ f(0, 6) = 15 · 0 + 10 · 6 = 60 **Mínimo**

c) A solución alcánzase nos vértices A(4, 0) e D(0, 6); polo tanto, tamén se alcanza en todos os puntos do lado que une os puntos A(4, 0) e D(0, 6), é dicir, ten infinitas solucións.

Obsérvase graficamente que o lado AD é paralelo ao vector director da función obxectivo.

$\vec{v}$(–10, 15) || (–2, 3)

7. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

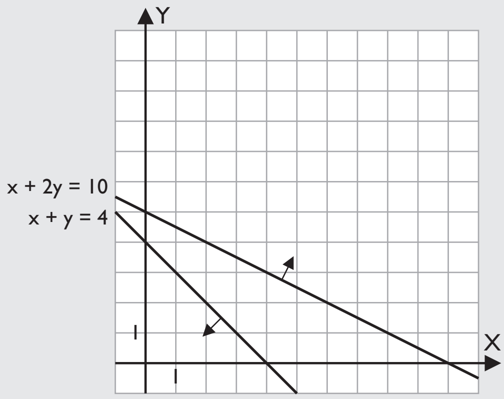
$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 4 \\ x + 2y \ge 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Minimiza neste recinto o valor da función:

$$f(x, y) = 12x + 19y$$

Solución:

Rexión factible.



Obsérvase que a rexión factible é baleira, é dicir, non hai ningún punto no plano que verifique as restricións do enunciado do problema.

8. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

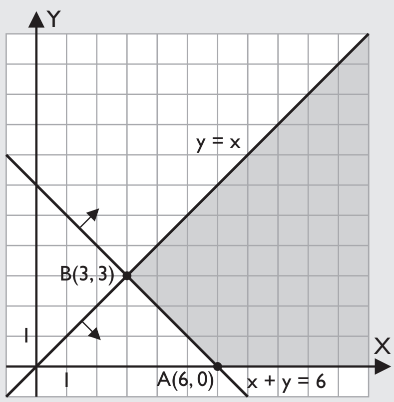
$$\left.\begin{array}{l} x + y \ge 6 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Maximiza neste recinto o valor da función:

$$f(x, y) = 7x + 11y$$

Solución:

Rexión factible.



Obsérvase que a rexión factible non está acoutada e, polo tanto, nunca se alcanza nela o valor máximo.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Representa graficamente o conxunto de solucións do sistema de inecuacións:

$3x + 2y \geq 5;\ x - 2y \geq -1;\ 5x + 4y \leq 16;\ x - y \leq 5$

Determina os vértices da rexión obtida no apartado anterior.

- ☐ A(5, 2); B(3, 1); C(9, 7/2); D(5, 5)
- ☐ A(13, −1); B(2, 3); C(1, −1)
- ☒ A(3, −2); B(4, −1); C(2, 3/2); D(1, 1)
- ☐ A(0, 0); B(3, 4); C(0, 9); D(7, 0)

2 No exercicio anterior calcula o punto onde alcanza o mínimo a función $f(x, y) = 3x - y$ nesa rexión. Determina ese valor mínimo.

- ☒ A(1, 1); o mínimo é 2.
- ☐ A(3, 5); o mínimo é 23.
- ☐ A(7, 4); o mínimo é 56.
- ☐ A(9, 0); o mínimo é 1.

3 Unha hamburguesaría necesita diariamente un mínimo de 180 kg de carne de porco e 120 kg de carne de tenreira. Hai dous matadoiros A e B que poden subministrarlle a carne requirida, pero deberá ser en lotes. O lote do matadoiro A contén 6 kg de carne de porco e 2 kg de carne de tenreira cuxo custo é 25 €, e o lote do matadoiro B contén 4 kg de carne de porco e 3 kg de carne de terneira, cuxo custo é 35 €. Determina, xustificando a resposta, o número de lotes que debe adquirir a hamburguesaría en cada matadoiro co obxecto de garantir as súas necesidades diarias co mínimo custo.

- ☐ 5 lotes do matadoiro A e 23 lotes do B.
- ☐ 9 lotes do matadoiro A e 18 lotes do B.
- ☐ 15 lotes do matadoiro A e 15 lotes do B.
- ☒ 6 lotes do matadoiro A e 36 lotes do B.

4 Calcula o valor dese custo diario mínimo do exercicio anterior.

- ☐ O custo mínimo é de 2 600 €.
- ☐ O custo mínimo é de 5 000 €.
- ☒ O custo mínimo é de 1 410 €.
- ☐ O custo mínimo é de 250 €.

5 Un taller de bixutería produce sortellas sinxelas a 4,5 € e sortellas adornadas a 6 €. As máquinas condicionan a produción de modo que non poden saír ao día máis de 400 sortellas sinxelas, nin máis de 300 adornadas, nin máis de 500 en total.

Supoñendo que se vende toda a produción, cantas unidades de cada clase interesará fabricar para obter os máximos ingresos?

- ☐ 150 sortellas sinxelas e 150 adornadas.
- ☐ 250 sortellas sinxelas e 200 adornadas.
- ☒ 200 sortellas sinxelas e 300 adornadas.
- ☐ 300 sortellas sinxelas e 250 adornadas.

6 No exercicio anterior, calcula os ingresos máximos.

- ☒ 2 700 €
- ☐ 3 000 €
- ☐ 1 000 €
- ☐ 10 000 €

7 Nun almacén de electrodomésticos hai neveiras e lavadoras, e poden almacenarse ata un total de 180 unidades. Para atender axeitadamente a demanda dos clientes, deben existir polo menos 30 lavadoras, e o número de neveiras debe ser, cando menos, igual ao número de lavadoras máis 20. Se o custo de cada neveira é de 450 €, e o de cada lavadora, de 375 €, calcula cantas unidades de cada electrodoméstico se deberán almacenar minimizando os custos totais.

- ☐ 25 neveiras e 10 lavadoras.
- ☐ 75 neveiras e 20 lavadoras.
- ☐ 40 neveiras e 40 lavadoras.
- ☒ 50 neveiras e 30 lavadoras.

8 No exercicio anterior, calcula os custos mínimos.

- ☒ 33 750 €
- ☐ 10 000 €
- ☐ 50 000 €
- ☐ 25 000 €

9 Un profesor deulle ao seu alumnado unha lista de problemas para que resolvan, como máximo, 70 deles. Os problemas están clasificados en dous grupos. Os do grupo A valen 5 puntos cada un, e os do B, 7 puntos. Para resolver un problema do tipo A, necesítanse 2 minutos, e para resolver un problema do tipo B, 3 minutos. Se o alumnado dispón de dúas horas e media para resolver os problemas, cantos problemas de cada tipo habería que facer para obter a puntuación máxima?

- ☐ 25 problemas do grupo A e 70 do B.
- ☐ 35 problemas do grupo A e 53 do B.
- ☐ 65 problemas do grupo A e 10 do B.
- ☒ 60 problemas do grupo A e 10 do B.

10 No exercicio anterior, calcula a puntuación máxima.

- ☐ 500 puntos
- ☐ 400 puntos
- ☒ 370 puntos
- ☐ 200 puntos

1. Introdución á programación linear

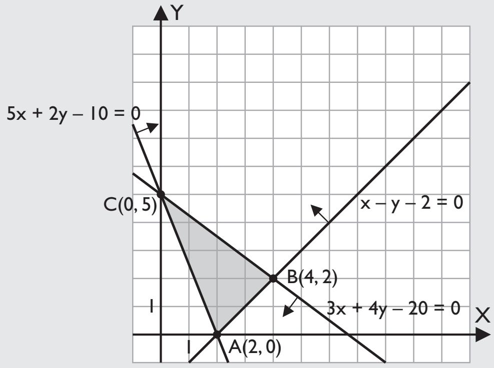
9. Sexa o recinto definido polas seguintes inecuacións:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y - 10 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ 3x + 4y - 20 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Debuxa este recinto e determina os seus vértices.

b) Determina en que punto dese recinto alcanza a función $f(x, y) = 4x + 3y$ o máximo valor.

Solución:



$A(2, 0) \Rightarrow f(2, 0) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$

$B(4, 2) \Rightarrow f(4, 2) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 22$ **Máximo**

$C(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$

A solución óptima é B(4, 2).

10. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

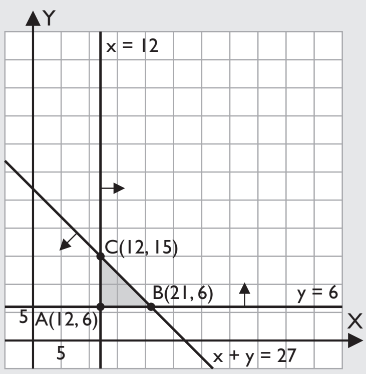
$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq 6 \end{array}\right\}$$

a) Represéntao graficamente.

b) Determina os vértices dese recinto.

c) Cales son os valores máximo e mínimo da función $f(x, y) = 90x + 60y$ no recinto anterior? En que puntos alcanza estes valores?

Solución:



$A(12, 6) \Rightarrow f(12, 6) = 90 \cdot 12 + 60 \cdot 6 = 1\,440$ **Mínimo**

$B(21, 6) \Rightarrow f(21, 6) = 90 \cdot 21 + 60 \cdot 6 = 2\,250$ **Máximo**

$C(12, 15) \Rightarrow f(12, 15) = 90 \cdot 12 + 60 \cdot 15 = 1\,980$

A solución óptima do máximo é B(21, 6).

A solución óptima do mínimo é A(12, 6).

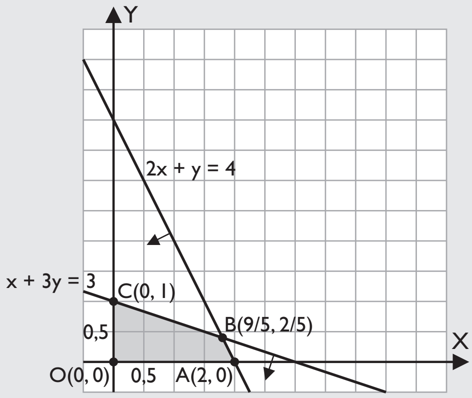
11. Sexa o seguinte sistema de inecuacións:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y \leq 3 \\ 2x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Debuxa o conxunto de puntos definidos polas inecuacións.

b) Maximiza nese conxunto a función obxectivo: $z = 2x + 3y$

Solución:



$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$A(2, 0) \Rightarrow f(2, 0) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$

$B(9/5, 2/5) \Rightarrow f(9/5, 2/5) = 2 \cdot 9/5 + 3 \cdot 2/5 =$
$= 4{,}8$ **Máximo**

$C(0, 1) \Rightarrow f(0, 1) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$

A solución óptima é B(9/5, 2/5).

12. Dada a función obxectivo $f(x, y) = 2x + 3y$, suxeita ás restricións seguintes:

$3x + y \leq 10$

$x + 2y \leq 8$

$x \geq 0$

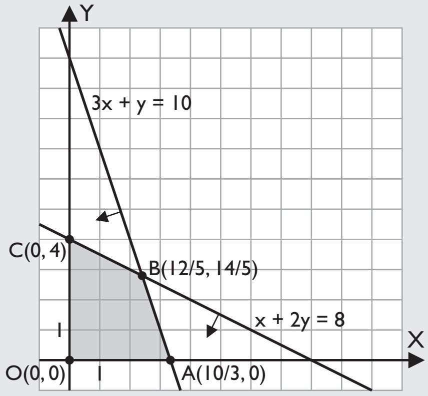
$y \geq 0$

a) Representa a rexión factible.

b) Atopa os valores de **x** e **y** que fan máxima a función obxectivo.

c) Determina os valores **x** e **y** que minimizan a función obxectivo.

Solución:



O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 2 · 0 + 3 · 0 = 0 **Mínimo**

A(10/3, 0) ⇒ f(10/3, 0) = 2 · 10/3 + 3 · 0 = 20/3 = 6,67

B(12/5, 14/5) ⇒ f(12/5, 14/5) = 2 · 12/5 + 3 · 14/5 =
= 13,2 **Máximo**

C(0, 4) ⇒ f(0, 4) = 2 · 0 + 3 · 4 = 12

A solución óptima do mínimo é O(0, 0).

A solución óptima do máximo é B(12/5, 14/5).

2. Resolución de problemas de programación linear

13. Un artesán fabrica colares e pulseiras. Facer un colar leva dúas horas e facer unha pulseira unha hora. O material de que dispón non lle permite facer máis de 50 pezas. Como moito, o artesán pode dedicarlle ao traballo 80 horas. Por cada colar gaña 5 €, e por cada pulseira, 4 €. O artesán desexa determinar o número de colares e pulseiras que debe fabricar para optimizar os seus beneficios.

a) Expresa a función obxectivo e as restricións do problema.

b) Representa graficamente o recinto definido.

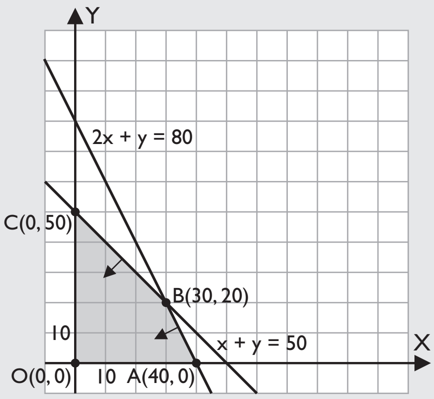
c) Obtén o número de colares e pulseiras correspondentes ao máximo beneficio.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Colares	Pulseiras	Dispoñible	
Número	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Material	x	y	x + y ≤ 50	
Tempo	2x	y	2x + y ≤ 80	
Beneficio	5x	4y	f(x, y) = 5x + 4y	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 5 · 0 + 4 · 0 = 0

A(40, 0) ⇒ f(40, 0) = 5 · 40 + 4 · 0 = 200

B(30, 20) ⇒ f(30, 20) = 5 · 30 + 4 · 20 =
= 230 **Máximo**

C(0, 50) ⇒ f(0, 50) = 5 · 0 + 4 · 50 = 200

d) A solución óptima é B(30, 20).

14. Un gandeiro ten que elaborar un penso a partir de dous ingredientes nutritivos: A e B. Os mínimos que necesita son 30 unidades de A e 32 unidades de B. No mercado véndense sacos de dúas marcas que conteñen A e B, cuxos contidos e prezos se dan na táboa seguinte:

Marca	Unidades de A	Unidades de B	Prezo do saco
I	3	1	9 €
II	1	4	12 €

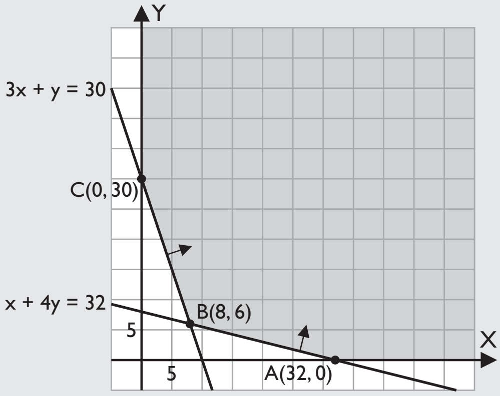
Calcula cantos sacos de cada marca ten que mercar o gandeiro para elaborar o denvandito penso co mínimo custo.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Marca I	Marca II	Restricións	
Nº de sacos	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Unidades de A	3x	y	$3x + y \geq 30$	
Unidades de B	x	4y	$x + 4y \geq 32$	
Custo	9x	12y	$f(x, y) = 9x + 12y$	Minimizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(32, 0) \Rightarrow f(32, 0) = 9 \cdot 32 + 12 \cdot 0 = 288$

$B(8, 6) \Rightarrow f(8, 6) = 9 \cdot 8 + 12 \cdot 6 = 144$ **Mínimo**

$C(0, 30) \Rightarrow f(0, 30) = 9 \cdot 0 + 12 \cdot 30 = 360$

d) A solución óptima é B(8, 6).

15. Unha fábrica produce confeitura de albaricoque e confeitura de cirola. O dobre da produción de confeitura de cirola é menor ou igual ca a produción de confeitura de albaricoque máis 800 unidades. Ademais, o triplo da produción de confeitura de albaricoque máis o dobre da produción de confeitura de cirola é menor ou igual ca 2 400 unidades.

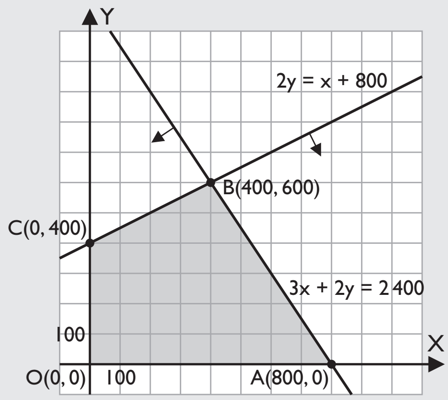
Cada unidade de confeitura de albaricoque produce un beneficio de 60 €, e cada unidade de confeitura de cirola 80 €. Calcula cantas unidades de cada tipo de confeitura se teñen que producir para obter un beneficio máximo.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Confeitura de albaricoque	Confeitura de cirola	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Condición 1	x	2y	$2y \leq x + 800$	
Condición 2	3x	2y	$3x + 2y \leq 2\,400$	
Beneficios	60x	80y	$f(x, y) = 60x + 80y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$

$A(800, 0) \Rightarrow f(800, 0) = 60 \cdot 800 + 80 \cdot 0 = 48\,000$

$B(400, 600) \Rightarrow f(400, 600) = 60 \cdot 400 + 80 \cdot 600 =$
$= 72\,000$ **Máximo**

$C(0, 400) \Rightarrow f(0, 400) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 400 = 32\,000$

d) A solución óptima é B(400, 600).

16. Unha empresa que serve comidas preparadas ten que deseñar un menú empregando dous ingredientes. O ingrediente A contén 35 g de graxas e 150 quilocalorías por cada 100 gramos de ingrediente, mentres que o ingrediente B contén 15 g de graxas e 100 quilocalorías por cada 100 gramos. O custo é de 1,5 € por cada 100 g do ingrediente A e de 2 € por cada 100 g do ingrediente B.

O menú que hai que deseñar debería conter non máis de 30 g de graxas e, polo menos, 110 quilocalorías por cada 100 g de alimento. Pídese que se determinen as proporcións de cada un dos ingredientes que se empregarán no menú, de maneira que o seu custo sexa o máis reducido posible.

a) Indica a expresión das restricións e a función obxectivo do problema.

b) Representa graficamente a rexión delimitada polas restricións.

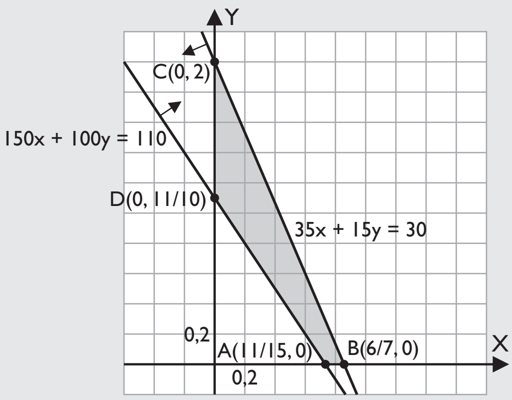
c) Calcula a porcentaxe óptima de cada un dos ingredientes que se incluirán no menú.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Ingrediente A	Ingrediente B	Restricións	
Unidades de 100 g	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Graxa	$35x$	$15y$	$35x + 15y \leq 30$	
Quilocalorías	$150x$	$100y$	$150x + 100y \geq 110$	
Custo	$1,5x$	$2y$	$f(x, y) = 1,5x + 2y$	Minimizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(11/15, 0) \Rightarrow f(11/15, 0) = 1,5 \cdot 11/15 + 2 \cdot 0 =$
$= 1,1$ **Mínimo**

$B(6/7, 0) \Rightarrow f(6/7, 0) = 1,5 \cdot 6/7 + 2 \cdot 0 = 1,29$

$C(0, 2) \Rightarrow f(0, 2) = 1,5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$

$D(0, 11/10) \Rightarrow f(0, 11/10) = 1,5 \cdot 0 + 2 \cdot 11/10 =$
$= 2,22$

d) A solución óptima é B(11/5, 0).

3. Número de solucións

17. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

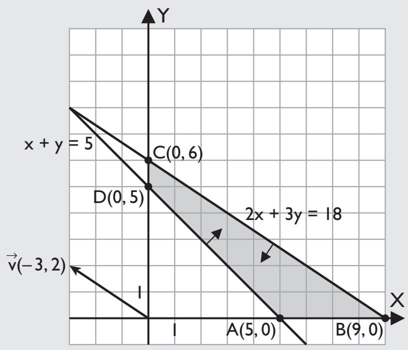
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 5 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Maximiza nese recinto o valor da función:

$$f(x, y) = 16x + 24y$$

Solución:

a) Rexión factible.



b) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 16 \cdot 5 + 24 \cdot 0 = 80$

$B(9, 0) \Rightarrow f(9, 0) = 16 \cdot 9 + 24 \cdot 0 = 144$ **Máximo**

$C(0, 6) \Rightarrow f(0, 6) = 16 \cdot 0 + 24 \cdot 6 = 144$ **Máximo**

$D(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 16 \cdot 0 + 24 \cdot 5 = 120$

c) A solución alcánzase nos vértices B(9, 0) e C(0, 6); polo tanto, tamén se alcanza en todos os puntos do lado que une os puntos B(9, 0) e C(0, 6), é dicir, ten infinitas solucións.

Obsérvase graficamente que o lado BC é paralelo ao vector director da función obxectivo.

$\vec{v}(-24, 16) \parallel (-3, 2)$

18. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

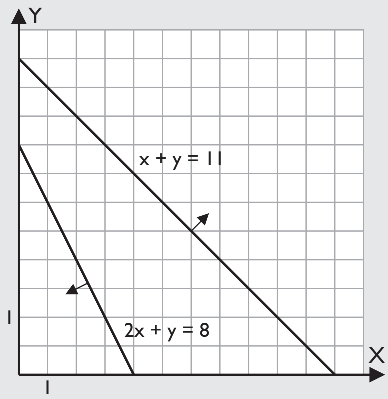
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 11 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Minimiza nese recinto o valor da función:

$$f(x, y) = 5x + 7y$$

Solución:

a) Rexión factible.



Obsérvase que a rexión factible é baleira, é dicir, non hai ningún punto no plano que verifique as restricións do enunciado do problema.

19. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

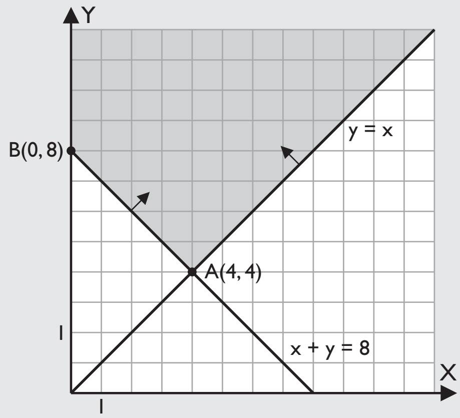
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 8 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Maximiza nese recinto o valor da función:

$$f(x, y) = 23x + 14y$$

Solución:

a) Rexión factible.



Obsérvase que a rexión factible non está acoutada e, polo tanto, nunca se alcanza en ningún punto dela o valor máximo.

Para ampliar

20. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

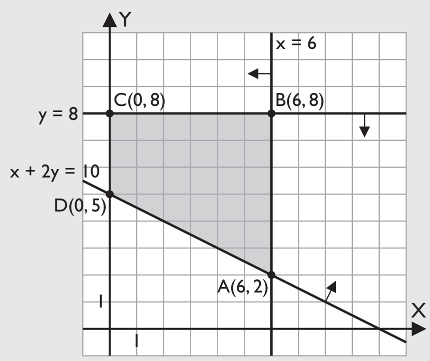
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 8 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntao graficamente.

b) Calcula os seus vértices.

c) Calcula o máximo da función f(x, y) = 20x + 60y nese recinto.

Solución:



A(6, 2) ⇒ f(6, 2) = 20 · 6 + 60 · 2 = 240

B(6, 8) ⇒ f(6, 8) = 20 · 6 + 60 · 8 = 600 **Máximo**

C(0, 8) ⇒ f(0, 8) = 20 · 0 + 60 · 8 = 480

D(0, 5) ⇒ f(0, 5) = 20 · 0 + 60 · 5 = 300

A solución óptima é B(6, 8).

21. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 40x + 30y \geq 360 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntao graficamente.

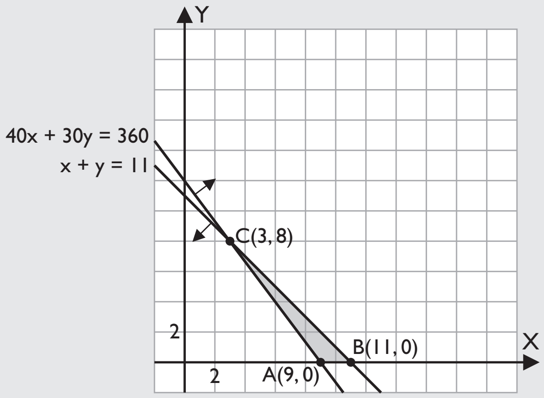
b) Calcula os vértices dese recinto.

c) Obtén nese recinto o valor máximo e o valor mínimo da función dada por:

$$f(x, y) = 10\,000x + 7\,000y$$

e di en que puntos se alcanzan.

Solución:



A(9, 0) ⇒ f(9, 0) = 10 000 · 9 + 7 000 · 0 = 90 000

B(11, 0) ⇒ f(11, 0) = 10 000 · 11 + 7 000 · 0 =
= 110 000 **Máximo**

C(3, 8) ⇒ f(3, 8) = 10 000 · 3 + 7 000 · 8 =
= 86 000 **Mínimo**

A solución óptima máxima é B(11, 0).

A solución óptima mínima é B(3, 8).

22. Sexa P o polígono de vértices O(0, 0), A(6, 0), B(8, 3), C(4, 8) e D(0, 6). Indaga en que puntos do polígono alcanza a función f(x, y) = 2x + 3y os valores máximo e mínimo.

Solución:

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 2 · 0 + 3 · 0 = 0 **Mínimo**

A(6, 0) ⇒ f(6, 0) = 2 · 6 + 3 · 0 = 12

B(8, 3) ⇒ f(8, 3) = 2 · 8 + 3 · 3 = 25

C(4, 8) ⇒ f(4, 8) = 2 · 4 + 3 · 8 = 32 **Máximo**

D(0, 6) ⇒ f(0, 6) = 2 · 0 + 3 · 6 = 18

A solución óptima na que é máximo é B(4, 8), e na que é mínimo, O(0, 0).

23. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

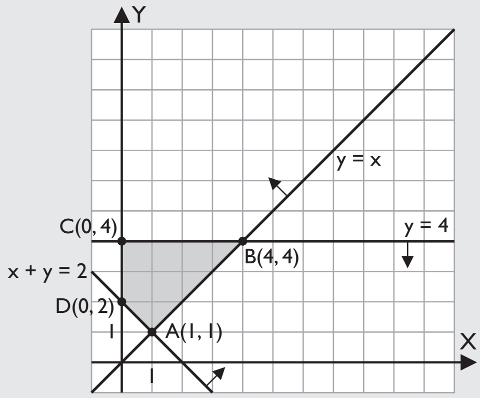
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 0 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntao graficamente.

b) Calcula os vértices dese recinto.

c) Determina o máximo e o mínimo desta función: f(x, y) = 12x + 4y, no recinto anterior.

Solución:



A(1, 1) ⇒ f(1, 1) = 12 · 1 + 4 · 1 = 16

B(4, 4) ⇒ f(4, 4) = 12 · 4 + 4 · 4 = 64 **Máximo**

C(0, 4) ⇒ f(0, 4) = 12 · 0 + 4 · 4 = 16

D(0, 2) ⇒ f(0, 2) = 12 · 0 + 4 · 2 = 8 **Mínimo**

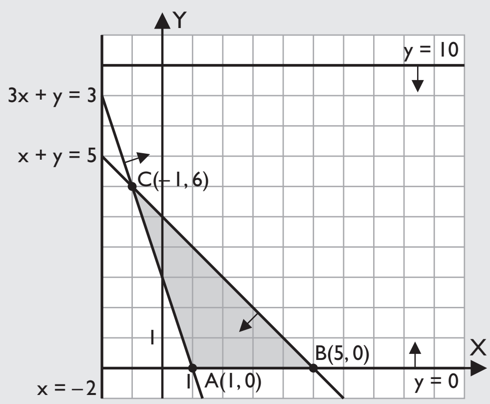
A solución óptima máxima é B(4, 4).

A solución óptima mínima é D(0, 2).

24. Determina os valores máximo e mínimo desta función: z = 3x + 4y, suxeita ás restricións:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \geq 3 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq -2 \\ y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Solución:



A(1, 0) ⇒ f(1, 0) = 3 · 1 + 4 · 0 = 3 **Mínimo**

B(5, 0) ⇒ f(5, 0) = 3 · 5 + 4 · 0 = 15

C(–1, 6) ⇒ f(–1, 6) = 3 · (–1) + 4 · 6 = 21 **Máximo**

A solución óptima máxima é C(–1, 6).

A solución óptima mínima é A(1, 0).

25. Sexa o conxunto de restricións seguinte:

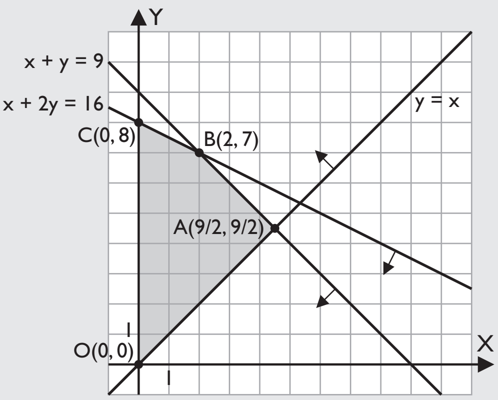
$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 9 \\ x - y \le 0 \\ x + 2y \le 16 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) Debuxa a rexión factible determinada por estas restricións.

b) Calcula os vértices desta rexión.

c) Obtén os puntos nos que presenta o máximo e o mínimo a función f(x, y) = x + 2y.

Solución:



O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 0 + 2 · 0 = 0 **Mínimo**

A(9/2, 9/2) ⇒ f(9/2, 9/2) = 9/2 + 2 · 9/2= 13,5

B(2, 7) ⇒ f(2, 7) = 2 + 2 · 7 = 16 **Máximo**

C(0, 8) ⇒ f(0, 8) = 0 + 2 · 8 = 16 **Máximo**

A solución óptima máxima son os vértices B(2, 7) e C(0, 8); polo tanto, tamén o son todos os puntos do segmento de extremos B e C.

A solución óptima mínima é O(0, 0).

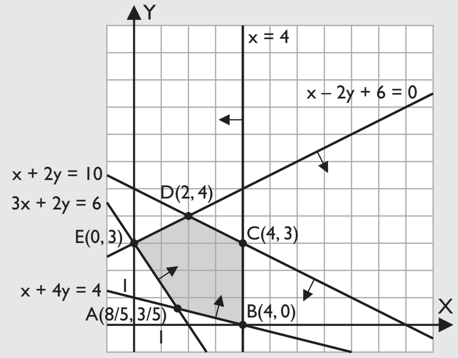
26. Considérase a función f(x, y) = 2x + 4y, suxeita ás seguintes restricións:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \ge 6 \\ x + 4y \ge 4 \\ x - 2y + 6 \ge 0 \\ x + 2y \le 10 \\ x \le 4 \end{array}\right\}$$

a) Representa a rexión do plano determinada polo conxunto de restricións.

b) Calcula os puntos desta rexión nos que a función f(x, y) alcanza o seu valor máximo e o seu valor mínimo.

Solución:



A(8/5, 3/5) ⇒ f(8/5, 3/5) = 2 · 8/5 + 4 · 3/5 = 5,6 **Mínimo**

B(4, 0) ⇒ f(4, 0) = 2 · 4 + 4 · 0 = 8

C(4, 3) ⇒ f(4, 3) = 2 · 4 + 4 · 3 = 20 **Máximo**

D(2, 4) ⇒ f(2, 4) = 2 · 2 + 4 · 4 = 20 **Máximo**

E(0, 3) ⇒ f(0, 3) = 2 · 0 + 4 · 3 = 12

A solución óptima máxima son os vértices C(4, 3) e D(2, 4); polo tanto, tamén o son todos os puntos do segmento de extremos C e D.

A solución óptima mínima é A(8/5, 3/5).

27. Dado o recinto definido polo seguinte sistema de inecuacións:

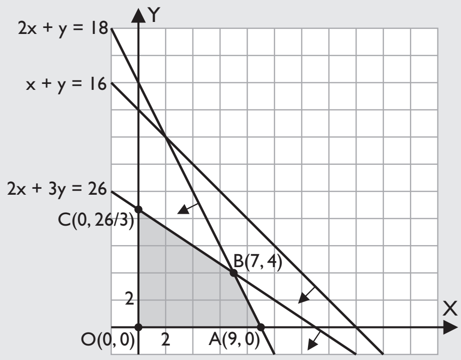
$$\left.\begin{array}{l} 2x + y \le 18 \\ 2x + 3y \le 26 \\ x + y \le 16 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntao graficamente.

b) Calcula os vértices do recinto.

c) Obtén nese recinto o valor máximo e o valor mínimo da función f(x, y) = 5x + 3y. Atopa en que puntos se alcanzan.

Solución:



O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 5 · 0 + 3 · 0 = 0 **Mínimo**

A(9, 0) ⇒ f(9, 0) = 5 · 9 + 3 · 0 = 45

B(7, 4) ⇒ f(7, 4) = 5 · 7 + 3 · 4 = 47 **Máximo**

C(0, 26/3) ⇒ f(0, 26/3) = 5 · 0 + 3 · 26/3 = 26

A solución óptima máxima é B(7, 4).

A solución óptima mínima é O(0, 0).

Problemas

28. Un granxeiro desexa crear unha granxa de polos de dúas razas, A e B. Dispón de 9 000 € para investir e dun espazo cunha capacidade limitada para 7 000 polos. Cada polo da raza A cústalle 1 € e obtén con el un beneficio de 1 €, e cada polo da raza B cústalle 2 € e o beneficio é de 1,4 € por unidade. Se por razóns comerciais o número de polos da raza B non pode ser superior aos da raza A, determina, xustificando a resposta:

a) Que cantidade de ambas as razas debe mercar o granxeiro para obter un beneficio máximo?

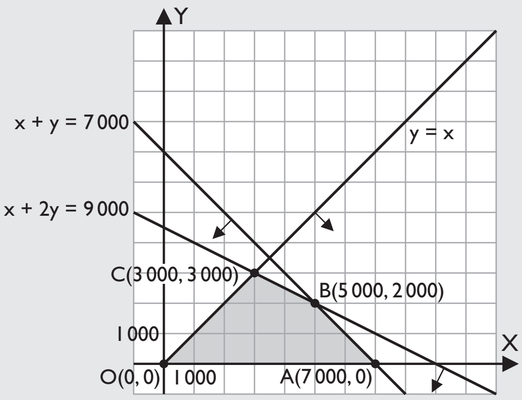
b) Cal será o valor deste beneficio?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Raza A	Raza B	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Capacidade	x	y	$x + y \leq 7000$	
Custo inicial	x	2y	$x + 2y \leq 9000$	
Razóns comerciais	x	y	$y \leq x$	
Beneficios	x	1,4y	$f(x, y) = x + 1{,}4y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0 + 1{,}4 \cdot 0 = 0$

$A(7000, 0) \Rightarrow f(7000, 0) = 7000 + 1{,}4 \cdot 0 = 7000$

$B(5000, 2000) \Rightarrow f(5000, 2000) =$
$= 5000 + 1{,}4 \cdot 2000 = 7800$ **Máximo**

$C(3000, 3000) \Rightarrow f(3000, 3000) =$
$= 3000 + 1{,}4 \cdot 3000 = 7200$

d) A solución óptima é B(500, 2000).

a) Debe mercar 5 000 polos da raza A e 2 000 polos da raza B.

b) 7 800 €

29. Un vendedor dispón de dous tipos de penso, A e B, para alimentar o gando. Se mestura a partes iguais os dous pensos, obtén unha mestura que vende a 0,15 €/kg; se a proporción da mestura é dunha parte de A por 3 de B, vende a mestura resultante a 0,1 €/kg. O vendedor dispón de 100 kg de penso do tipo A e de 210 kg do tipo B. Desexa facer as dúas mesturas de modo que os seus ingresos por venda sexan máximos.

a) Formula o problema e debuxa a rexión factible.

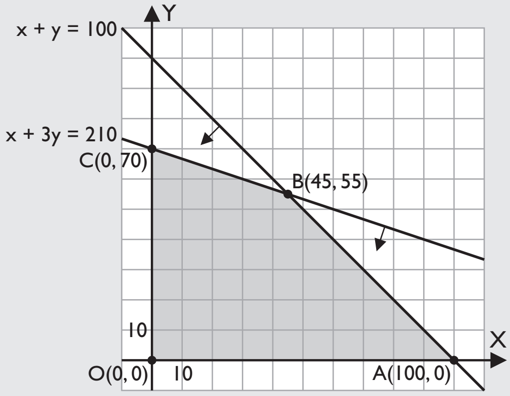
b) Atopa cantos quilos de cada mestura deben producirse para maximizar os ingresos e calcula estes.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Mestura 1 a 1	Mestura 1 a 3	Restricións	
Nº de kg	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Penso tipo A	x	y	$x + y \leq 100$	
Penso tipo B	x	3y	$x + 3y \leq 210$	
Ingresos	0,15x	0,1y	$f(x, y) = 0{,}15x + 0{,}1y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0,15 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 = 0$

$A(100, 0) \Rightarrow f(100, 0) = 0,15 \cdot 100 + 0,1 \cdot 0 =$
$= 15$ **Máximo**

$B(45, 55) \Rightarrow f(45, 55) = 0,15 \cdot 45 + 0,1 \cdot 55 = 12,25$

$C(0, 70) \Rightarrow f(0, 70) = 0,15 \cdot 0 + 0,1 \cdot 70 = 7$

d) A solución óptima é B(45, 55), 45 kg da mestura 1 de 1 e 55 kg da mestura 1 de 3.

30. O alumnado dun centro educativo quere vender dous tipos de lotes, A e B, para sufragar os gastos da viaxe de estudos. Cada lote de tipo A consta dunha caixa de manteigadas e cinco participacións de lotaría, e cada lote do tipo B consta de dúas caixas de manteigadas e dúas participacións de lotaría. Por cada lote de tipo A vendido, o alumnado obtén un beneficio de 12,25 €; e por cada lote de tipo B gañan 12,5 €.

Por razóns de almacenamento, poden dispoñer como moito de 400 caixas de manteigadas. O alumnado só conta con 1 200 participacións de lotaría e desexan maximizar os seus beneficios.

a) Determina a función obxectivo e expresa mediante inecuacións as restricións do problema.

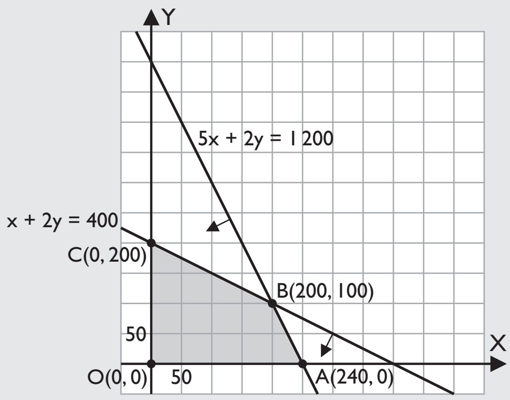
b) Cantas unidades de cada tipo de lote debe vender o alumnado para que o beneficio obtido sexa máximo? Calcula este beneficio.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Lote A	Lote B	Restricións	
Nº de lotes	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Caixas de manteigadas	x	$2y$	$x + 2y \leq 400$	
Participacións de lotaría	$5x$	$2y$	$5x + 2y \leq 1\,200$	
Beneficios	$12,25x$	$12,5y$	$f(x, y) = 12,25x + 12,5y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 12,25 \cdot 0 + 12,5 \cdot 0 = 0$

$A(240, 0) \Rightarrow f(240, 0) = 12,25 \cdot 240 + 12,5 \cdot 0 = 2\,940$

$B(200, 100) \Rightarrow f(200, 100) = 12,25 \cdot 200 + 12,5 \cdot 100 =$
$= 3\,700$ **Máximo**

$C(0, 200) \Rightarrow f(0, 200) = 12,25 \cdot 0 + 12,5 \cdot 200 = 2\,500$

d) A solución óptima é B(200, 100), 200 do lote A e 100 do lote B. O beneficio é 3 700 €.

31. Cada mes unha empresa pode gastar, como máximo, 10 000 € en salarios e 1 800 € en enerxía (electricidade e gasóleo). A empresa só elabora dous tipos de produtos A e B. Por cada unidade de A que elabora gaña 0,8 €; e por cada unidade de B gaña 0,5 €. O custo salarial e enerxético que produce a elaboración dunha unidade do produto A e dunha unidade do produto B aparece na seguinte táboa:

Deséxase determinar cantas unidades de cada un dos produtos A e B debe producir a empresa para que o beneficio sexa máximo.

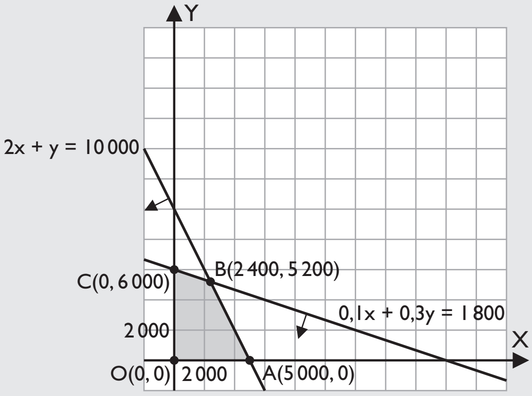
	Produto A	Produto B
Custo salarial	2	1
Custo enerxético	0,1	0,3

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Produto A	Produto B	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Custo salarial	2x	y	$2x + y \leq 10\,000$	
Custo enerxético	0,1x	0,3y	$0{,}1x + 0{,}3y \leq 1\,800$	
Beneficios	0,8x	0,5y	$f(x, y) = 0{,}8x + 0{,}5y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 = 0$

$A(5\,000, 0) \Rightarrow f(5\,000, 0) = 0{,}8 \cdot 5\,000 + 0{,}5 \cdot 0 = 4\,000$

$B(2\,400, 5\,200) \Rightarrow f(2\,400, 5\,200) =$
$= 0{,}8 \cdot 2\,400 + 0{,}5 \cdot 5\,200 = 4\,520$ **Máximo**

$C(0, 6\,000) \Rightarrow f(0, 6\,000) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 6\,000 = 3\,000$

d) A solución óptima é B(2 400, 5 200).

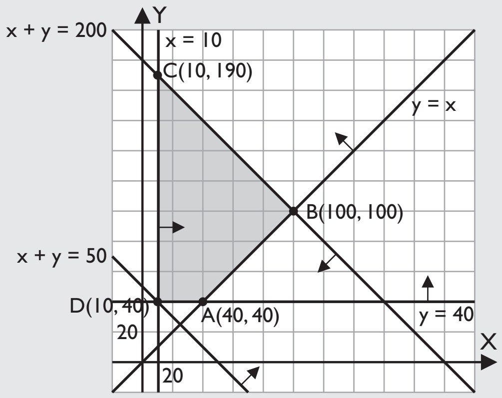
32. Nun depósito almacénanse bidóns de petróleo e gasolina. Para poder atender a demanda hai que ter almacenados un mínimo de 10 bidóns de petróleo e 40 de gasolina. Sempre debe haber máis bidóns de gasolina que de petróleo, e a capacidade do depósito é de 200 bidóns. Por razóns comerciais, deben manterse en inventario, polo menos, 50 bidóns. O gasto de almacenaxe dun bidón de petróleo é de 0,2 € e o dun de gasolina é de 0,3 €. Deséxase saber cantos bidóns de cada clase deberán almacenarse para que o gasto de almacenaxe sexa mínimo.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Petróleo	Gasolina	Restricións	
Bidóns	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Mínimo de petróleo	x		$x \geq 10$	
Mínimo de gasolina		y	$y \geq 40$	
Relación gasolina-petróleo	x	y	$y \geq x$	
Capacidade máxima	x	y	$x + y \leq 200$	
Razóns comerciais	x	y	$x + y \geq 50$	
Custo	0,2x	0,3y	$f(x, y) = 0{,}2x + 0{,}3y$	Minimizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(40, 40) \Rightarrow f(40, 40) = 0{,}2 \cdot 40 + 0{,}3 \cdot 40 = 20$

$B(100, 100) \Rightarrow f(100, 100) = 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 100 = 50$

$C(10, 190) \Rightarrow f(10, 190) = 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 190 = 59$

$D(10, 40) \Rightarrow f(10, 40) = 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 40 =$
$= 14$ **Mínimo**

d) A solución óptima é D(10, 40).

33. Un agricultor colleita garavanzos e lentellas. Sábese que, como máximo, só se poden colleitar 500 toneladas métricas (Tm), das que, como máximo, 200 Tm son de lentellas. Os beneficios por Tm de garavanzos e lentellas son de 500 € e 300 €, respectivamente, e deséxase planificar a produción para optimizar o beneficio total.

a) Formula o sistema de inecuacións asociado ao enunciado do problema e a función obxectivo deste.

b) Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

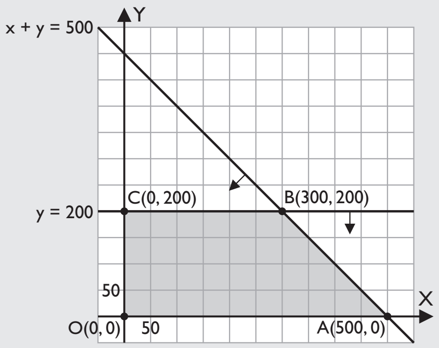
c) Cantas Tm de garavanzos e cantas de lentellas debe colleitar para obter o máximo beneficio?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Garavanzos	Lentellas	Restricións	
Nº de Tm	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Tope de colleita	x	y	$x + y \leq 500$	
Tope de lentellas		y	$y \leq 200$	
Beneficios	$500x$	$300y$	$f(x, y) = 500x + 300y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 500 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0$

$A(500, 0) \Rightarrow f(500, 0) = 500 \cdot 500 + 300 \cdot 0 =$
$= 250\,000$ **Máximo**

$B(300, 200) \Rightarrow f(300, 200) = 500 \cdot 300 + 300 \cdot 200 =$
$= 210\,000$

$C(0, 200) \Rightarrow f(0, 200) = 500 \cdot 0 + 300 \cdot 200 = 60\,000$

d) A solución óptima é B(500, 0), é dicir, 500 Tm de garavanzos e 0 Tm de lentellas.

34. Certa sala de espectáculos ten unha capacidade máxima de 1 500 persoas entre adultos e nenos, aínda que o número de nenos asistentes non pode superar os 600. O prezo da entrada dun adulto a unha sesión é de 8 €, mentres que a dun neno é dun 40% menos. O número de adultos non pode superar o dobre do número de nenos.

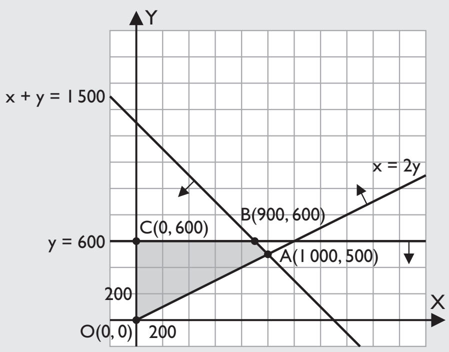
Cumprindo as condicións anteriores, cal é a cantidade máxima que se pode recadar pola venda de entradas? Cantas das entradas serán de nenos?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Adultos	Nenos	Restricións	
Persoas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\,500$	
Nenos		y	$y \leq 600$	
Condición adultos	x	y	$x \leq 2y$	
Recadación	$8x$	$4{,}8y$	$f(x, y) = 8x + 4{,}8y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 8 \cdot 0 + 4{,}8 \cdot 0 = 0$

$A(1\,000, 500) \Rightarrow f(1\,000, 500) = 8 \cdot 1\,000 + 4{,}8 \cdot 500 =$
$= 10\,400$ **Máximo**

$B(900, 600) \Rightarrow f(900, 600) = 8 \cdot 900 + 4{,}8 \cdot 600 = 10\,080$

$C(0, 600) \Rightarrow f(0, 600) = 8 \cdot 0 + 4{,}8 \cdot 600 = 2\,880$

d) A solución óptima é A(1 000, 500), é dicir, 1 000 entradas de adulto e 500 entradas de neno.

35. Un grupo musical vai lanzar un novo traballo ao mercado. A casa discográfica considera necesario realizar unha campaña intensiva de publicidade, combinando dúas publicidades: anuncios en televisión, cun custo estimado de 10 000 € por anuncio, e cuñas radiofónicas, cun custo estimado de 1 000 € por cuña. Non obstante, non poden gastar máis dun millón de euros para esta campaña, ao longo da cal se teñen que emitir, polo menos, 50 cuñas, pero non máis de 100. Un estudo de mercado cifra en 10 000 o número de copias que se venderá por anuncio de televisión emitido, e en 2 000 o número de copias por cuña radiofónica emitida.

a) De cantos anuncios e cuñas radiofónicas poderá constar esta campaña? Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións.

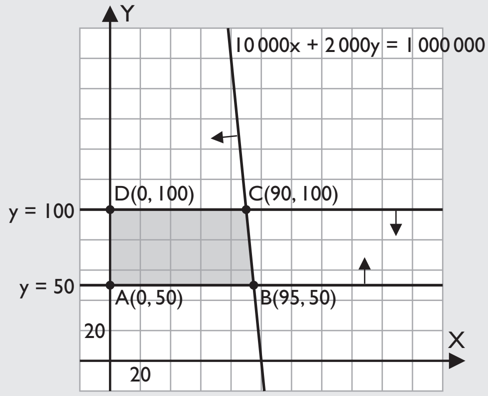
b) Que combinación de ambos se debería realizar para vender o maior número de copias posibles? Chégase a gastar o millón de euros?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Anuncios TV	Cuñas de radio	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Límite campaña	10 000x	1 000y	$10\,000x + 1\,000y \leq 1\,000\,000$	
Cuñas		y	$50 \leq y \leq 100$	
Vendas	10 000x	2 000y	$f(x, y) = 10\,000x + 2\,000y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(0, 50) \Rightarrow f(0, 50) = 10\,000 \cdot 0 + 2\,000 \cdot 50 = 100\,000$

$B(95, 50) \Rightarrow f(95, 50) = 10\,000 \cdot 95 + 2\,000 \cdot 50 =$
$= 1\,050\,000$

$C(90, 100) \Rightarrow f(90, 100) = 10\,000 \cdot 90 + 2\,000 \cdot 100 =$
$= 1\,100\,000$ **Máximo**

$D(0, 100) \Rightarrow f(0, 100) = 10\,000 \cdot 0 + 2\,000 \cdot 100 =$
$= 200\,000$

d) A solución óptima é o vértice C(90, 100). Si se gasta o 1 000 000 €.

36. Unha fábrica de coches vai lanzar ao mercado dous novos modelos, un básico e outro de luxo. O custo de fabricación do modelo básico é de 10 000 € e o do modelo de luxo é de 15 000 €. Disponse dun presuposto de 600 000 € para esta operación de lanzamento. Para evitar riscos crese conveniente lanzar ao menos tantos coches do modelo básico como do modelo de luxo e, en todo caso, non fabricar máis de 45 coches do modelo básico.

a) Cantos coches interesa fabricar de cada modelo se o obxectivo é maximizar o número de coches fabricados?

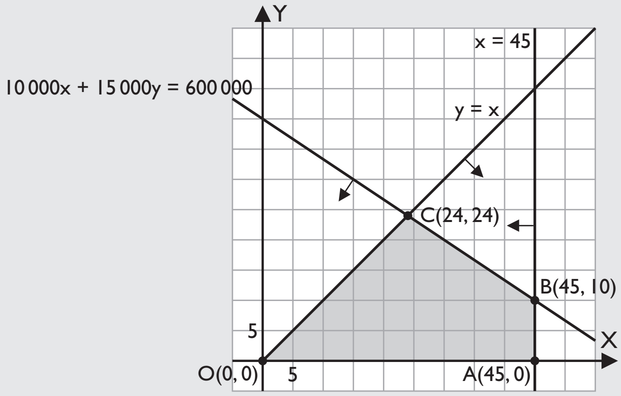
b) Esgótase o presuposto dispoñible?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Modelo básico	Modelo de luxo	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Custo fabricación	10 000x	15 000y	$10\,000x + 15\,000y \leq 600\,000$	
Condicións	x	y	$x \geq y$	
Modelo básico	x		$x \leq 45$	
Nº de coches	x	y	$f(x, y) = x + y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) $\Rightarrow$ f(0, 0) = 0 + 0 = 0

A(45, 0) $\Rightarrow$ f(45, 0) = 45 + 0 = 45

B(45, 10) $\Rightarrow$ f(45, 10) = 45 + 10 = 55 **Máximo**

C(24, 24) $\Rightarrow$ f(24, 24) = 24 + 24 = 48

d) A solución óptima é B(45, 10), é dicir, 45 coches do modelo básico e 10 coches do modelo de luxo. Esgótase o presuposto.

37. Por motivos de ampliación do cadro de persoal, unha empresa de servizos de tradución quere contratar, como máximo, 50 novos tradutores. O salario que deberá pagarlle a cada tradutor dunha lingua é de 2 000 €, e de 3 000 € aos que son de máis dunha lingua. Como pouco, e por motivos de demanda, esta empresa ten que contratar á forza un tradutor de máis dunha lingua. A política de selección de persoal da compañía obriga tamén a contratar polo menos a tantos tradutores dunha lingua como de máis dunha. Sabendo que o obxectivo fixado de beneficios totais é, como mínimo, de 120 000 €, e que os beneficios que proporcionan os tradutores dunha lingua son de 4 000 €/tradutor, e de 8 000 €/tradutor os de máis dunha lingua:

a) Cantos tradutores de cada tipo pode contratar? Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións.

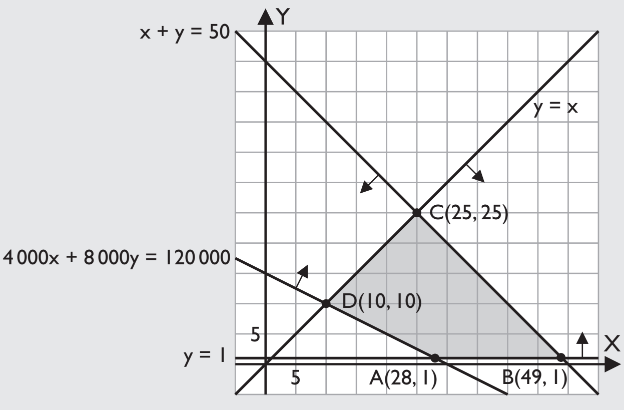
b) Cantos tradutores contratará para minimizar o gasto en salarios? Que beneficios totais terá a empresa neste caso?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Tradutor de 1 lingua	Tradutor de máis de 1 lingua	Restricións	
Nº de tradutores	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 50$	
Motivos de demanda		y	$y \geq 1$	
Política de selección	x	y	$x \geq y$	
Mínimos beneficios	4 000x	8 000y	$4\,000x + 8\,000y \geq 120\,000$	
Ganancias	2 000x	3 000y	$f(x, y) = 2\,000x + 3\,000y$	Minimizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

A(28, 1) $\Rightarrow$ f(28, 1) = 2 000 · 28 + 3 000 · 1 = 59 000

B(49, 1) $\Rightarrow$ f(49, 1) = 2 000 · 49 + 3 000 · 1 = 101 000

C(25, 25) $\Rightarrow$ f(25, 25) = 2 000 · 25 + 3 000 · 25 =
= 125 000

D(10, 10) $\Rightarrow$ f(10, 10) = 2 000 · 10 + 3 000 · 10 =
= 50 000 **Mínimo**

d) A solución óptima é D(10, 10), é dicir, 10 tradutores de cada tipo.

Os beneficios totais son:

40 000 · 10 + 8 000 · 10 = 480 000 €

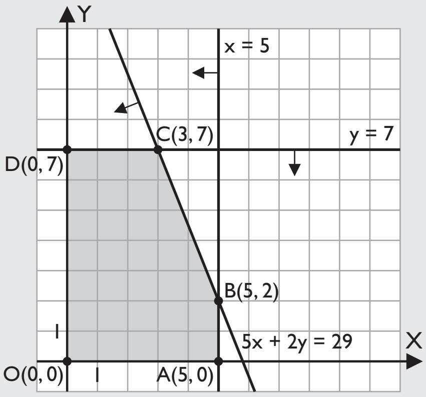
38. Un agricultor pode sementar trigo (5 hectáreas como máximo) e centeo (7 hectáreas como máximo) nas súas terras. A produción de trigo, por cada hectárea sementada, é de 5 toneladas, mentres que a produción de centeo, tamén por hectárea sementada, é de 2 toneladas, e pode producir un máximo de 29 toneladas dos dous cereais. Se o beneficio que obtén o agricultor por cada tonelada de trigo é de 290 € e o beneficio por cada tonelada de centeo é de 240 €, que número de hectáreas deberá sementar de cada cultivo para maximizar os beneficios?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Trigo	Centeo	Restricións	
Nº de hectáreas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Condición 1	x		$x \leq 5$	
Condición 2		y	$y \leq 7$	
Produción	5x	2y	$5x + 2y \leq 29$	
Beneficios	290x	240y	$f(x, y) = 290x + 240y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 290 \cdot 0 + 240 \cdot 0 = 0$

$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 290 \cdot 5 + 240 \cdot 0 = 1\,450$

$B(5, 2) \Rightarrow f(5, 2) = 290 \cdot 5 + 240 \cdot 2 = 1\,930$

$C(3, 7) \Rightarrow f(3, 7) = 290 \cdot 3 + 240 \cdot 7 =$
$= 2\,550$ **Máximo**

$D(0, 7) \Rightarrow f(0, 7) = 290 \cdot 0 + 240 \cdot 7 = 1\,680$

d) A solución óptima é C(3, 7), é dicir, 3 hectáreas de trigo e 7 de centeo.

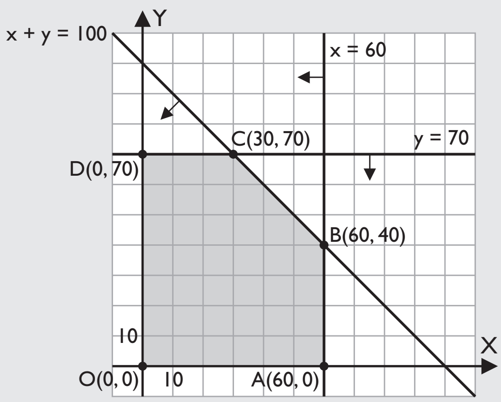
39. O número de unidades de dous produtos (A e B) que un comercio pode vender é, como máximo, igual a 100. Dispón de 60 unidades de produto de tipo A, cun beneficio unitario de 2,5 €, e de 70 unidades de tipo B cun beneficio de 3 €. Determina cantas unidades de cada tipo de produtos A e B debe vender o comercio para maximizar os seus beneficios globais.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Produto A	Produto B	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Máximo	x	y	$x + y \leq 100$	
Unidades de A	x		$x \leq 60$	
Unidades de B		y	$y \leq 70$	
Beneficios	2,5x	3y	$f(x, y) = 2{,}5x + 3y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 2{,}5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$A(60, 0) \Rightarrow f(60, 0) = 2{,}5 \cdot 60 + 3 \cdot 0 = 150$

$B(60, 40) \Rightarrow f(60, 40) = 2{,}5 \cdot 60 + 3 \cdot 40 = 270$

$C(30, 70) \Rightarrow f(30, 70) = 2{,}5 \cdot 30 + 3 \cdot 70 =$
$= 285$ **Máximo**

$D(0, 70) \Rightarrow f(0, 70) = 2{,}5 \cdot 0 + 3 \cdot 70 = 210$

d) A solución óptima é C(30, 70), é dicir, 30 unidades do produto A e 70 unidades do produto B.

40. Un comerciante desexa mercar dous tipos de lavadoras, A e B. As de tipo A custan 450 €, e as de tipo B, 750 €. Dispón de 10 500 € e de sitio para 20 lavadoras, e, polo menos, terá que mercar unha de cada tipo.

Cantas lavadoras terá que mercar de cada tipo para obter beneficios máximos coa súa venda posterior, sabendo que en cada lavadora gaña o 20% do prezo de compra?

Nota: lémbrase que o número de lavadoras de cada tipo deberá ser enteiro.

Solución:

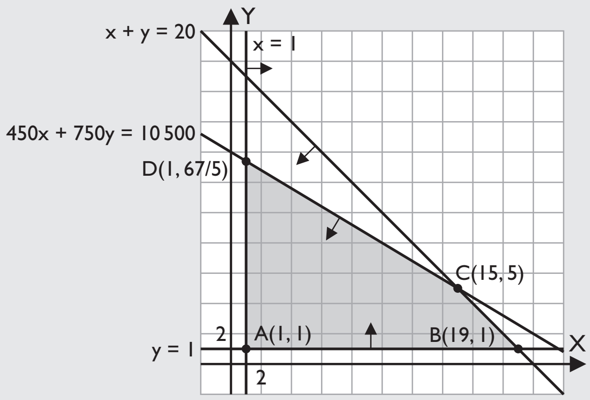
a) Táboa cos datos do problema.

Ganancia por cada lavadora do tipo A: $450 \cdot 0{,}2 = 90$ €

Ganancia por cada lavadora do tipo B: $750 \cdot 0{,}2 = 150$ €

	Tipo A	Tipo B	Restricións	
Nº de lavadoras	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 20$	
Condición 1	x		$x \geq 1$	
Condición 2		y	$y \geq 1$	
Dispón	$450x$	$750y$	$450x + 750y \leq 10\,500$	
Beneficios	$90x$	$150y$	$f(x, y) = 90x + 150y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(1, 1) \Rightarrow f(1, 1) = 90 \cdot 1 + 150 \cdot 1 = 240$

$B(19, 1) \Rightarrow f(19, 1) = 90 \cdot 19 + 150 \cdot 1 = 1\,860$

$C(15, 5) \Rightarrow f(15, 5) = 90 \cdot 15 + 150 \cdot 5 =$
$= 2\,100$ **Máximo**

$D(1, 67/5) \Rightarrow f(1, 67/5) = 90 \cdot 1 + 150 \cdot 67/5 =$
$= 2\,100$ **Máximo**

d) A solución óptima son os vértices C(15, 5) e D(1, 67/5), polo tanto tamén o son todos os puntos do segmento de extremos C e D. Pero as solucións teñen que ser números enteiros, polo tanto as únicas solucións son C(15,5), E(10, 8) e F(5, 11).

41. Unha empresa dedícase á fabricación de frascos de perfume e de auga de colonia, a partir de tres factores produtivos, F_1, F_2 e F_3. As unidades destes factores utilizadas na produción de cada tipo de frasco detállanse na seguinte táboa:

	Perfume	Auga de colonia
F_1	1	2
F_2	2	0
F_3	0	4

Sabendo que o prezo de venda dun frasco de perfume é de 50 €, o dun de auga de colonia é de 20 €, e que a empresa dispón de 240 unidades de F_1, 360 de F_2 e 440 de F_3:

a) Calcula o número de frascos de cada tipo que ten que fabricar a empresa para maximizar os seus beneficios. Explica os pasos seguidos para obter a resposta.

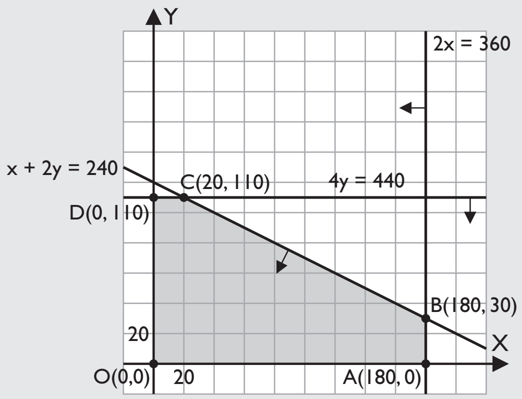
b) Di se se consomen todas as existencias de F_1, F_2 e F_3 na produción dos frascos que maximiza os beneficios?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Perfume	Auga de colonia	Restricións	
Nº de frascos	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Factor produtivo F_1	x	$2y$	$x + 2y \leq 240$	
Factor produtivo F_2	$2x$		$2x \leq 360$	
Factor produtivo F_3		$4y$	$4y \leq 440$	
Beneficio	$50x$	$20y$	$f(x, y) = 50x + 20y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 50 · 0 + 20 · 0 = 0

A(180, 0) ⇒ f(180, 0) = 50 · 180 + 20 · 0 = 9 000

B(180, 30) ⇒ f(180, 30) = 50 · 180 + 20 · 30 =
= 9 600 **Máximo**

C(20, 110) ⇒ f(20, 110) = 50 · 20 + 20 · 110 = 3 200

D(0, 110) ⇒ f(0, 110) = 50 · 0 + 20 · 110 = 2 200

d) A solución óptima é B(180, 30), é dicir, 180 perfumes e 30 unidades de auga de colonia.

Non se consomen todas as existencias.

42. Un concesionario de coches vende dous modelos: o modelo A, co que gaña 1 000 € por unidade vendida, e o B, co que gaña 500 € por unidade vendida. O número **x** de coches vendidos do modelo A debe verificar que $50 \leq x \leq 75$. O número **y** de coches vendidos do modelo B debe ser maior ou igual ca o número de coches vendidos do modelo A.

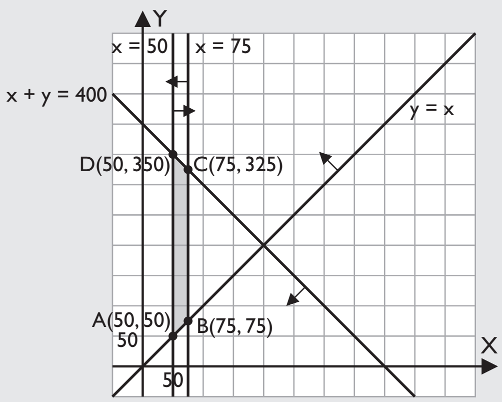
Sabendo que o máximo de coches que pode vender é 400, determina cantos coches debe vender de cada modelo para que o seu beneficio sexa máximo.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Modelo A	Modelo B	Restricións	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Limitacións modelo A	x		$50 \leq x \leq 75$	
Condición	x	y	$x \leq y$	
Máximo	x	y	$x + y \leq 400$	
Beneficio	1 000x	500y	f(x, y) = 1 000x + 500y	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

A(50, 50) ⇒ f(50, 50) = 1 000 · 50 + 500 · 50 = 75 000

B(75, 75) ⇒ f(75, 75) = 1 000 · 75 + 500 · 75 = 112 500

C(75, 325) ⇒ f(75, 325) = 1 000 · 75 + 500 · 325 =
= 237 500 **Máximo**

D(50, 350) ⇒ f(50, 350) = 1 000 · 50 + 500 · 350 =
= 225 000

d) A solución óptima é C(75, 325), é dicir, 75 coches do modelo A e 325 do modelo B.

43. Un cliente dun banco dispón de 30 000 € para adquirir fondos de investimento. O banco ofrécelle dous tipos de fondos, A e B. O de tipo A ten unha rendibilidade do 12% e unhas limitacións legais de 12 000 € de investimento máximo; o de tipo B presenta unha rendibilidade do 8% sen ningunha limitación. Ademais, este cliente desexa investir nos fondos tipo B, como máximo, o dobre do investido nos fondos tipo A.

a) Que cantidade de diñeiro debe investir en cada tipo de fondo para obter un beneficio máximo?

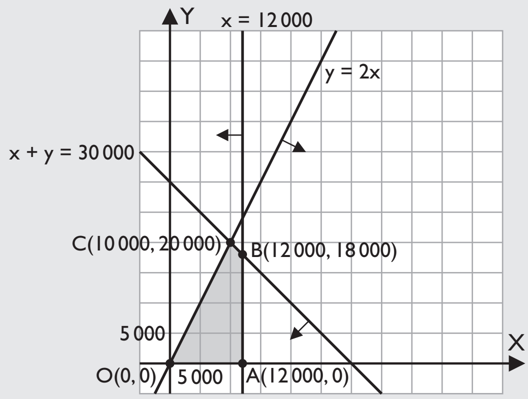
b) Cal será o valor deste beneficio máximo?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Fondo tipo A	Fondo tipo B	Restricións	
Diñeiro investido	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Capital pendente	x	y	x + y ≤ 30 000	
Limitacións legais	x		x ≤ 12 000	
Desexa	x	y	2x ≥ y	
Beneficio	0,12x	0,08y	f(x, y) = 0,12x + 0,08y	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 0,12 · 0 + 0,08 · 0 = 0

A(12 000, 0) ⇒ f(12 000, 0) =
= 0,12 · 12 000 + 0,08 · 0 = 1440

B(12 000, 18 000) ⇒ f(12 000, 18 000) =
= 0,12 · 12 000 + 0,08 · 18 000 = 2 880 **Máximo**

C(10 000, 20 000) ⇒ f(10 000, 20 000) =
= 0,12 · 10 000 + 0,08 · 20 000 = 2 800

d) A solución óptima é B(12 000, 18 000), é dicir, 12 000 € en fondos do tipo A e 18 000 € en fondos do tipo B.
O beneficio máximo é 2 880 €.

Para profundar

44. Nun problema de programación linear a rexión factible é o pentágono convexo que ten de vértices os puntos: O(0, 0), P(0, 4), Q(3/2, 3), R(5/2, 2) e S(11/4, 0), e a función obxectivo que hai que maximizar é F(x, y) = 2x + ay (**a** é un número real positivo).

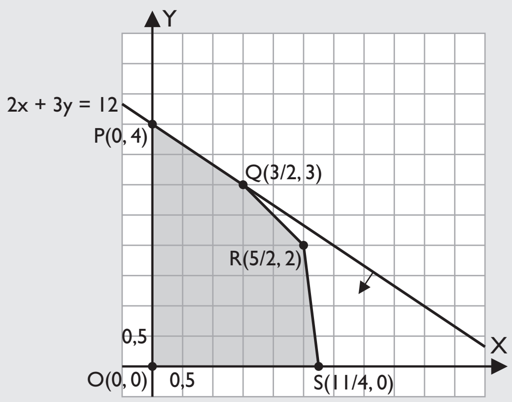
a) Debuxa a rexión factible.

b) Atopa o vértice, o punto extremo, do pentágono no que a función obxectivo alcanza o máximo para a = 1/2.

c) Atopa un valor de **a** para que o máximo se alcance no punto (0, 4).

Solución:

a) Rexión factible.



b) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 2 · 0 + 0,5 · 0 = 0

P(0, 4) ⇒ f(0, 4) = 2 · 0 + 0,5 · 4 = 2

Q(3/2, 3) ⇒ f(3/2, 3) = 2 · 3/2 + 0,5 · 3 = 4,5

R(5/2, 2) ⇒ f(5/2, 2) = 2 · 5/2 + 0,5 · 2 = 6 **Máximo**

S(11/4, 0) ⇒ f(11/4, 0) = 2 · 11/4 + 0,5 · 0 = 5,5

A solución óptima é R(5/2, 2).

c) A recta que pasa por P e Q é 2x + 3y = 12. Sempre que **a** ≥ 3 o máximo será P(0, 4). Se a = 3, o máximo alcánzase en todos os puntos do segmento PQ. Para a > 3, o máximo alcánzase en P(0, 4).

45. Un hipermercado quere ofrecer dúas clases de bandexas: A e B. A bandexa A contén 40 g de queixo manchego, 160 g de roquefort e 80 g de camembert; a bandexa B contén 120 g de cada un dos tres tipos de queixo anteriores. Para confeccionalas dispoñen de 10,4 kg de queixo manchego, 17,6 kg de roquefort e 11,2 kg de camembert. O prezo de venda é de 5,8 € a bandexa A e de 7,32 € a bandexa B. O hipermercado desexa maximizar os ingresos.

a) Expresa a función obxectivo.

b) Escribe mediante inecuacións as restricións do problema e, así mesmo, representa graficamente o recinto definido.

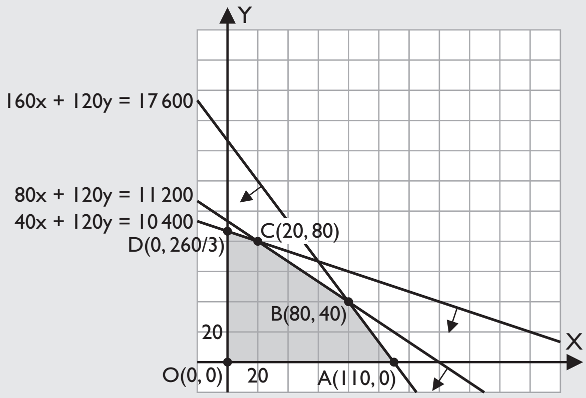
c) Determina o número de bandexas que debe vender de cada clase para que os ingresos obtidos sexan máximos. Calcula estes ingresos.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Bandexa A	Bandexa B	Restricións	
Nº de bandexas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Queixo manchego	40x	120y	$40x + 120y \leq 10\,400$	
Queixo roquefort	160x	120y	$160x + 120y \leq 17\,600$	
Queixo camembert	80x	120y	$80x + 120y \leq 11\,200$	
Ingresos	5,8x	7,32y	$f(x, y) = 5{,}8x + 7{,}32y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 5{,}8 \cdot 0 + 7{,}32 \cdot 0 = 0$

$A(110, 0) \Rightarrow f(110, 0) = 5{,}8 \cdot 110 + 7{,}32 \cdot 0 = 638$

$B(80, 40) \Rightarrow f(80, 40) = 5{,}8 \cdot 80 + 7{,}32 \cdot 40 =$
$= 756{,}8$ **Máximo**

$C(20, 80) \Rightarrow f(20, 80) = 5{,}8 \cdot 20 + 7{,}32 \cdot 80 = 701{,}6$

$D(0, 260/3) \Rightarrow f(0, 260/3) = 5{,}8 \cdot 0 + 7{,}32 \cdot 260/3 =$
$= 634{,}4$

d) A solución óptima é B(80, 40), é dicir, 80 bandexas A e 40 bandexas B.

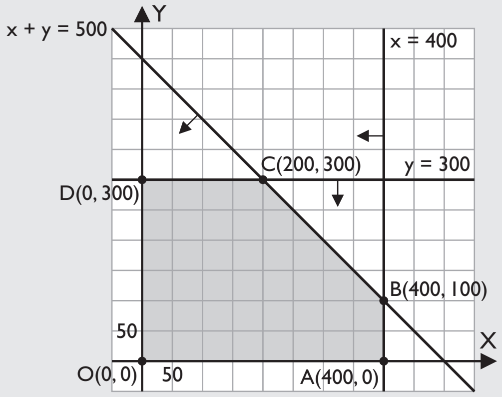
46. Unha fábrica de adornos produce broches sinxelos e broches de festa. Obtense un beneficio de 4,5 € por cada broche sinxelo e de 6 € por cada broche de festa. Nun día non se poden fabricar máis de 400 broches sinxelos nin máis de 300 de festa; tampouco poden producirse máis de 500 broches en total. Supoñendo que se logra vender toda a produción dun día, cal é o número de broches de cada clase que convén fabricar para obter o máximo beneficio? Cal debería ser a produción para obter o máximo beneficio se se obtivesen 6 € por cada broche sinxelo e 4,5 € por cada broche de festa?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Broche sinxelo	Broche de festa	Restricións	
Nº de broches	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 500$	
Condición 1	x		$x \leq 400$	
Condición 2		y	$y \leq 300$	
Beneficios	4,5x	6y	$f(x, y) = 4{,}5x + 6y$	Maximizar
Beneficios	6x	4,5y	$f(x, y) = 6x + 4{,}5y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c1) Valores da función obxectivo $f(x, y) = 4{,}5x + 6y$ nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 4{,}5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$

$A(400, 0) \Rightarrow f(400, 0) = 4{,}5 \cdot 400 + 6 \cdot 0 = 1\,800$

$B(400, 100) \Rightarrow f(400, 100) = 4{,}5 \cdot 400 + 6 \cdot 100 = 2\,400$

$C(200, 300) \Rightarrow f(200, 300) = 4{,}5 \cdot 200 + 6 \cdot 300 = 2\,700$ **Máximo**

$D(0, 300) \Rightarrow f(0, 300) = 4{,}5 \cdot 0 + 6 \cdot 300 = 1\,800$

d1) A solución óptima é C(200, 300), é dicir, 200 broches sinxelos e 300 broches de festa.

c2) Valores da función obxectivo $f(x, y) = 6x + 4{,}5y$ nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 6 \cdot 0 + 4{,}5 \cdot 0 = 0$

$A(400, 0) \Rightarrow f(400, 0) = 6 \cdot 400 + 4{,}5 \cdot 0 = 2\,400$

$B(400, 100) \Rightarrow f(400, 100) = 6 \cdot 400 + 4{,}5 \cdot 100 = 2\,850$ **Máximo**

$C(200, 300) \Rightarrow f(200, 300) = 6 \cdot 200 + 4{,}5 \cdot 300 = 2\,550$

$D(0, 300) \Rightarrow f(0, 300) = 6 \cdot 0 + 4{,}5 \cdot 300 = 1\,350$

d2) A solución óptima é B(400, 100), é dicir, 400 broches sinxelos e 100 broches de festa.

47. Para fabricar 2 tipos de cable, A e B, que se venderán a 1,5 e 1 € o metro, respectivamente, empréganse 16 kg de plástico e 4 kg de cobre para cada hectómetro (hm) do tipo A e 6 kg de plástico e 12 kg de cobre para cada hm do tipo B.

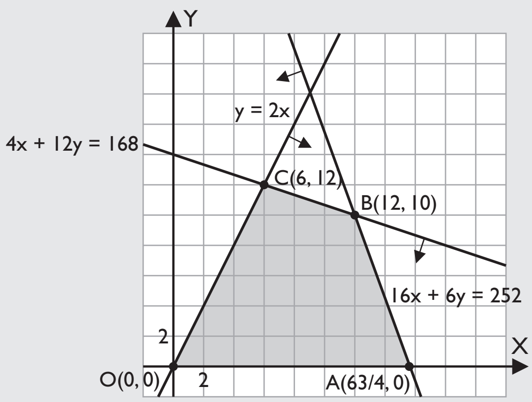
Sabendo que a lonxitude de cable fabricado do tipo B non pode ser maior que o dobre da do tipo A e que, ademais, non poden empregarse máis de 252 kg de plástico nin máis de 168 kg de cobre, determina a lonxitude, en hectómetros, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que a cantidade de diñeiro obtida na venda sexa máxima.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Cable A	Cable B	Restricións	
Lonxitude (hm)	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; 2x \geq y$	
Plástico	$16x$	$6y$	$16x + 6y \leq 252$	
Cobre	$4x$	$12y$	$4x + 12y \leq 168$	
Beneficio	$1{,}5x$	y	$f(x, y) = 1{,}5x + y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 1{,}5 \cdot 0 + 0 = 0$

$A(63/4, 0) \Rightarrow f(63/4, 0) = 1{,}5 \cdot 63/4 + 0 = 23{,}625$

$B(12, 10) \Rightarrow f(12, 10) = 1{,}5 \cdot 12 + 10 = 28$ **Máximo**

$C(6, 12) \Rightarrow f(6, 12) = 1{,}5 \cdot 6 + 12 = 21$

d) A solución óptima é B(12, 10), é dicir, 12 hm de cable de tipo A e 10 hm de tipo B.

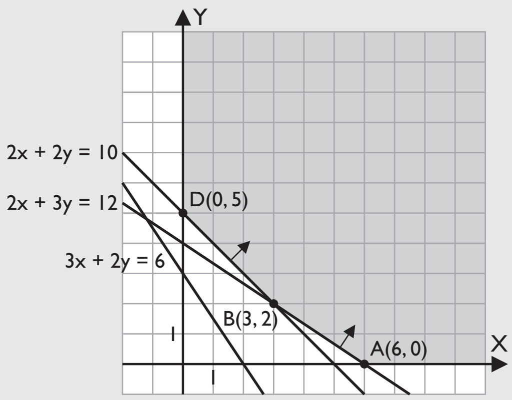
48. Un proxecto de asfaltado pode levarse a cabo por dous grupos diferentes dunha mesma empresa: G1 e G2. Trátase de asfaltar tres zonas: A, B e C. Nunha semana, o grupo G1 é capaz de asfaltar 3 unidades na zona A, 2 na zona B e 2 na zona C. O grupo G2 é capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades na zona A, 3 na zona B e 2 na zona C. O custo semanal estímase en 3 300 € para G1 e en 3 500 € para G2. Necesítase asfaltar un mínimo de 6 unidades na zona A, 12 na zona B e 10 na zona C. Calcula cantas semanas deberá traballar cada grupo para rematar este proxecto co mínimo custo?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	G1	G2	Dispoñible	
Semanas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Zona A	3x	2y	$3x + 2y \geq 6$	
Zona B	2x	3y	$2x + 3y \geq 12$	
Zona C	2x	2y	$2x + 2y \geq 10$	
Custo	3 300x	3 500y	$f(x, y) = 3\,300x + 3\,500y$	Minimizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 3\,300 \cdot 6 + 3\,500 \cdot 0 = 19\,800$

$B(3, 2) \Rightarrow f(3, 2) = 3\,300 \cdot 3 + 3\,500 \cdot 2 =$
$= 16\,900$ **Mínimo**

$C(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 3\,300 \cdot 0 + 3\,500 \cdot 5 = 17\,500$

d) A solución óptima é B(3, 2), é dicir, G1 durante 3 semanas e G2 durante 2 semanas.

49. Unha empresa, especializada na fabricación de mobiliario para casas de bonecas, produce certo tipo de mesas e cadeiras, que vende, respectivamente, a 20 € e 30 € por unidade. A empresa desexa saber cantas unidades de cada artigo debe fabricar diariamente un operario para maximizar os ingresos, tendo as seguintes restricións:

O número total de unidades dos dous tipos non poderá exceder de 4 por día e operario. Cada mesa require 2 horas para a súa fabricación; cada cadeira, 3 horas. A xornada laboral máxima é de 10 horas.

O material empregado en cada mesa custa 4 €. O empregado en cada cadeira custa 2 €. Cada operario dispón de 12 € diarios para material.

a) Expresa a función obxectivo e as restricións do problema.

b) Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

c) Razoa se con estas restricións un operario pode fabricar diariamente unha mesa e unha cadeira, e se isto lle convén á empresa.

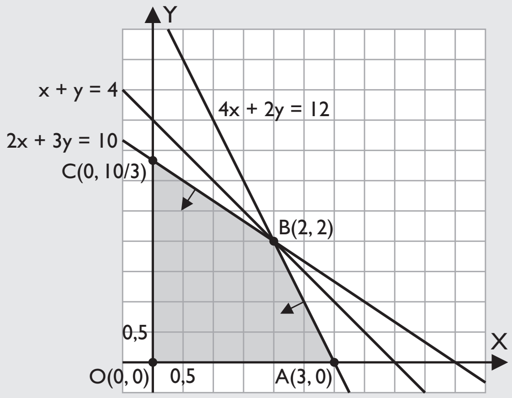
d) Resolve o problema.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Mesas	Cadeiras	Dispoñible	
Unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Total unidades			$x + y \leq 4$	
Tempo	2x	3y	$2x + 3y \leq 10$	
Custo	4x	2y	$4x + 2y \leq 12$	
Beneficios	20x	30y	$f(x, y) = 20x + 30y$	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 20 · 0 + 30 · 0 = 0

A(3, 0) ⇒ f(3, 0) = 20 · 3 + 30 · 0 = 60

B(2, 2) ⇒ f(2, 2) = 20 · 2 + 30 · 2 = 100

C(0, 10/3) ⇒ f(0, 10/3) = 20 · 0 + 30 · 10/3 = 100

d) As solucións óptimas son B(2, 2) e C(0, 10/3); polo tanto, serán todos os puntos do segmento que une B e C. Pero o único punto de coordenadas enteiras deste segmento é B(2, 2); por conseguinte, a solución óptima alcánzase en B(2, 2), cando se fabrican 2 mesas e 2 cadeiras.

50. Unha axencia de viaxes vende paquetes turísticos para acudir á final dun campionato de fútbol. A axencia está considerando ofrecer dous tipos de viaxes. O primeiro deles, A, inclúe desprazamento en autocar para dúas persoas, unha noite de aloxamento en habitación dobre e catro comidas. O segundo, B, inclúe desprazamento en autocar para unha persoa, unha noite de aloxamento (en habitación dobre) e dúas comidas.

O prezo de venda do paquete A é de 150 € e o do paquete B é de 90 €. A axencia ten contratadas un máximo de 30 prazas de autobús, 20 habitacións dobres e 56 comidas. O número de paquetes do tipo B non debe superar ao do tipo A. A empresa desexa maximizar os seus ingresos.

Pídese:

a) Que se exprese a función obxectivo.

b) Que se escriban mediante inecuacións as restricións do problema e se represente graficamente o recinto definido.

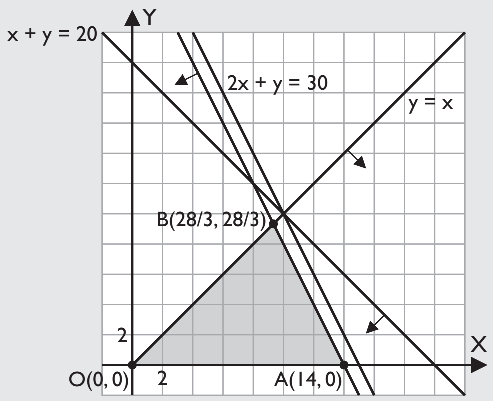
c) Que se determine cantos paquetes de cada tipo debe vender a axencia para que os seus ingresos sexan máximos. Calcula estes ingresos.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Paquete A	Paquete B	Restricións	
Nº de paquetes	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Relación entre paquetes	x	y	y ≤ x	
Autobús	2x	y	2x + y ≤ 30	
Habitacións dobres	x	y	x + y ≤ 20	
Comidas	4x	2y	4x + 2y ≤ 56	
Ingresos	150x	90y	f(x, y) = 150x + 90y	Maximizar

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 150 · 0 + 90 · 0 = 0

A(14, 0) ⇒ f(14, 0) = 150 · 14 + 90 · 0 = 2 100

B(28/3, 28/3) ⇒ f(28/3, 28/3) = 150 · 28/3+ 90 · 28/3 =
= 2 240 **Máximo**

d) A solución óptima é B(28/3, 28/3), como a solución teñen que ser números enteiros hai que probar os puntos próximos que estean dentro da rexión factible.

C(9, 9) ⇒ f(9, 9) = 150 · 9 + 90 · 9 = 2 160

D(10, 8) ⇒ f(10, 8) = 150 · 10 + 90 · 8 = 2 220

Logo a solución óptima é D(10, 8), é dicir, 10 do paquete A e 8 do paquete B.

Paso a paso

51. Unha fábrica quere construír bicicletas de paseo e de montaña. A fábrica dispón de 80 kg de aceiro e 120 kg de aluminio. Para construír unha bicicleta de paseo necesítanse 1 kg de aceiro e 3 kg de aluminio e para construír unha bicicleta de montaña necesítanse 2 kg de aceiro e outros 2 kg de aluminio. Se as bicicletas de paseo as vende a 200 € e as de montaña a 150 €, cantas bicicletas de cada tipo debe construír para que o beneficio sexa máximo?

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

52. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

53. Quérese organizar unha ponte aérea entre dúas cidades, con prazas suficientes de pasaxe e carga, para transportar 1 600 persoas e 96 toneladas de equipaxe. Os avións dispoñibles son de dous tipos: 11 do tipo A e 8 do tipo B. A contratación dun avión do tipo A, que pode transportar 200 persoas e 6 toneladas de equipaxe, custa 40 000 €; e a contratación dun avión do tipo B, que pode transportar 100 persoas e 15 toneladas de equipaxe, custa 10 000 €. Cantos avións de cada tipo deben empregarse para que o custo sexa mínimo?

Solución:

Problema 53

a) Táboa cos datos do problema :

	Tipo A	Tipo B	Restricións	
Nº de avións	x	y	$0 \leq x \leq 11;\ 0 \leq y \leq 8$	
Persoas	200x	100y	$200x + 100y \geq 1600$	
Equipaxes	6x	15y	$6x + 15y \geq 96$	
Custo	40000x	10000y	$f(x, y) = 40000x + 10000y$	Minimizar

b) Rexión factible :

taboleiro({centro = punto(9, 9), anchura = 20, altura = 20}) → taboleiro1

debuxar(x = 11, {cor = azul}) → taboleiro1

debuxar(y = 8, {cor = verde}) → taboleiro1

debuxar(200x + 100y = 1600, {cor = maxenta}) → taboleiro1

debuxar(6x + 15y = 96, {cor = cian}) → taboleiro1

resolver$\begin{Bmatrix} 200x + 100y = 1600 \\ 6x + 15y = 96 \end{Bmatrix}$ → {{x=6,y=4}}

resolver$\begin{Bmatrix} x = 11 \\ 6x + 15y = 96 \end{Bmatrix}$ → {{x=11,y=2}}

resolver$\begin{Bmatrix} y = 8 \\ 200x + 100y = 1600 \end{Bmatrix}$ → {{x=4,y=8}}

debuxar(polígono(punto(6, 4), punto(11, 2), punto(11, 8), punto(4, 8)), {cor=vermello, encher=certo, cor_recheo=amarelo})

debuxar(punto(6, 4), {cor = azul,tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

debuxar(punto(11, 2), {cor = azul,tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

debuxar(punto(11, 8), {cor = azul,tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

debuxar(punto(4, 8), {cor = azul,tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$f(x, y) = 40000x + 10000y \rightarrow (x,y) \mapsto 40000 \cdot x + 10000 \cdot y$

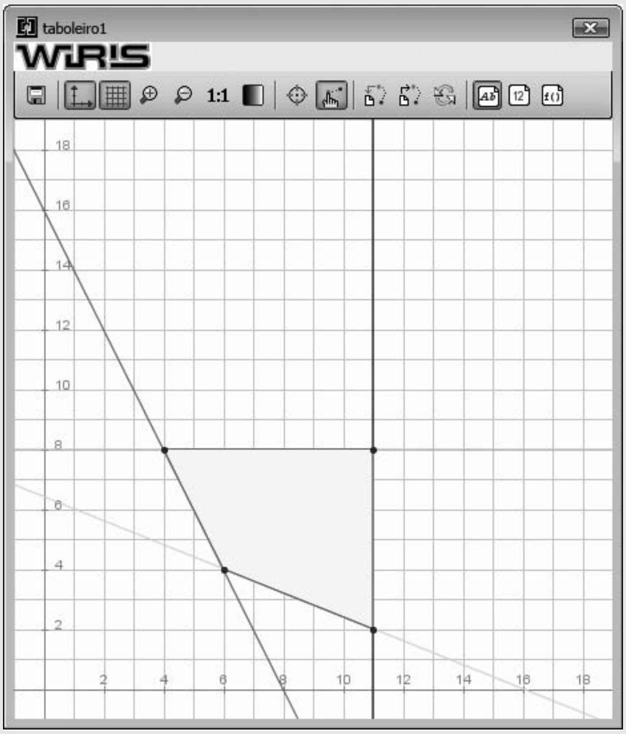
$f(6, 4) \rightarrow 280000$

$f(11, 2) \rightarrow 460000$

$f(11,8) \rightarrow 520000$

$f(4, 8) \rightarrow 240000$

d) A solución óptima é D(4, 8), é dicir, x = 4 avións do tipo A e y = 8 avións do tipo B.



54. Un xastre ten 80 m^2 de tecido A e 120 m^2 de tecido B. Un traxe de cabaleiro require 1 m^2 de A e 3 m^2 de B, e un vestido de señora, 2 m^2 de cada tecido. Se a venda dun traxe déixalle ao xastre o mesmo beneficio que a dun vestido, atopa cantos traxes e vestidos debe fabricar para obter a máxima ganancia.

Solución:

Problema 54

a) Táboa cos datos do problema :

	Traxes	Vestidos	Restricións	
Nº de unidades	x	y	x ≥ 0; y≥ 0	
Tecido A	x	2y	x + 2y ≤ 80	
Tecido B	3x	2y	3x + 2y ≤ 120	
Beneficio	x	y	f(x, y) = x + y	Maximizar

b) Rexión factible :

taboleiro({centro = punto(45, 45), anchura = 100, altura = 100}) → taboleiro1

debuxar(x + 2y = 80, {cor = maxenta}) → taboleiro1

debuxar(3x + 2y = 120, {cor = cian}) → taboleiro1

resolver$\begin{bmatrix} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{bmatrix}$ → {{x=20,y=30}}

debuxar(polígono(punto(0, 0), punto(40, 0), punto(20,30), punto(0, 40)), {cor=vermello, encher=certo, cor_recheo=amarelo})

debuxar(punto(0, 0), {cor = azul, tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

debuxar(punto(40, 0), {cor = azul, tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

debuxar(punto(20,30), {cor = azul, tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

debuxar(punto(0, 40), {cor = azul, tamaño_punto = 5}) → taboleiro1

c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

f(x, y) = x + y → (x,y) ↦ x+y

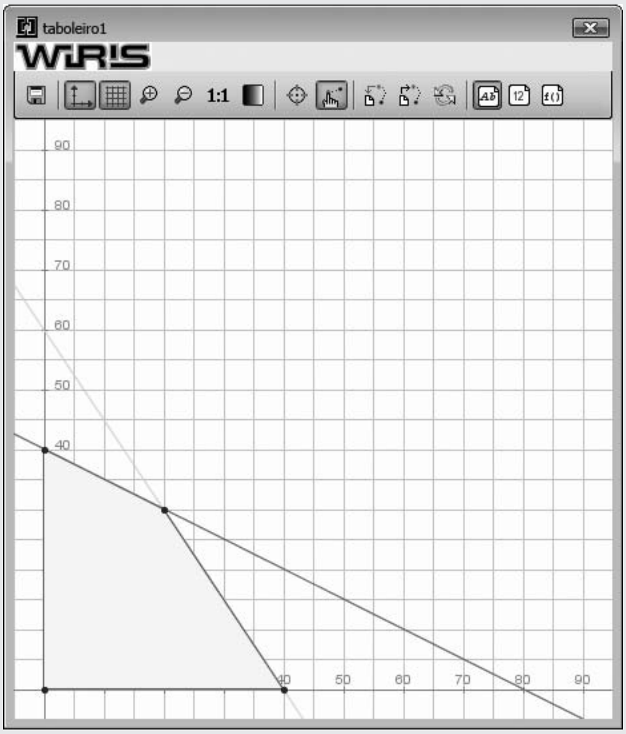
f(0, 0) → 0

f(40, 0) → 40

f(20,30) → 50

f(0, 40) → 40

d) A solución óptima é C(20, 30), é dicir, x = 20 traxes e y = 30 vestidos.



55. Unha empresa produce dous bens A e B. Ten dúas factorías e cada unha delas produce os dous bens nas cantidades por hora seguintes:

	Factoría 1	Factoría 2
Ben A	10 unidades/hora	20 unidades/hora
Ben B	25 unidades/hora	25 unidades/hora

A empresa recibe un pedido de 300 unidades de A e 500 de B. Os custos de funcionamento das dúas factorías son: 100 € por hora para a factoría 1 e 80 € por hora para a factoría 2. Cantas horas debe funcionar cada factoría para minimizar os custos da empresa e satisfacer o pedido?

Solución:

Problema 55

a) Táboa cos datos do problema :

	Factoría 1	Factoría 2	Restricións	
Tempo (h)	x	y	$x \geq 0;\ y \geq 0$	
Ben A	10x	20y	$10x + 20y \geq 300$	
Ben B	25x	25y	$25x + 25y \geq 500$	
Custo	100x	80y	$f(x, y) = 100x + 80y$	Minimizar

b) Rexión factible :

taboleiro({centro = punto(18, 18), anchura = 40, altura = 40})

debuxar(10x + 20y = 300, {cor = maxenta}) → taboleiro1

debuxar(25x + 25y = 500, {cor = cian}) → taboleiro1

resolver$\begin{Bmatrix} 10x + 20y = 300 \\ 25x + 25y = 500 \end{Bmatrix}$ → {{x=10,y=10}}

debuxar(polígono(punto(10, 10), punto(30, 0), punto(40,0), punto(40, 40), punto(0, 40), punto(0, 20)), {cor=vermello, encher=certo, cor_recheo=amarelo})

debuxar(punto(10, 10), {cor = azul, tamaño_punto = 5})

debuxar(punto(30, 0), {cor = azul, tamaño_punto = 5})

debuxar(punto(0, 20), {cor = azul, tamaño_punto = 5})

c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

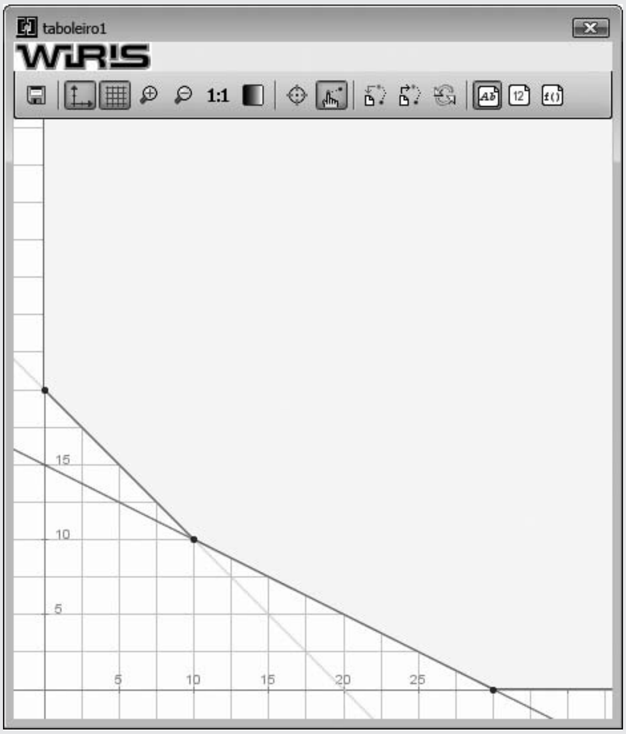
f(x, y) = 100x + 80y → $(x,y) \mapsto 100 \cdot x + 80 \cdot y$

f(10, 10) → 1800

f(30, 0) → 3000

f(0, 20) → 1600

d) A solución óptima é (0, 20), é dicir, x = 0 h factoría 1 e y = 20 h factoría 2.



56. Un comerciante desexa comprar dous tipos de lavadora, A e B. As de tipo A custan 450 €, e as de tipo B, 750 €. Dispón de 10 500 € e de sitio para 20 lavadoras, e, polo menos, debe mercar unha de cada tipo.

Cantas lavadoras terá que mercar de cada tipo para obter beneficios máximos coa súa venda posterior, sabendo que en cada lavadora gaña o 20% do prezo de compra?

Nota: lémbrase que o número de lavadoras de cada tipo ten que ser enteiro.

Solución:

Problema 56

Ganancias por cada lavadora do tipo A : $450 \cdot 0,2 = 90$ €

Ganancias por cada lavadora do tipo B : $750 \cdot 0,2 = 150$ €

a) Táboa cos datos do problema :

	Tipo A	Tipo B	Restricións	
Nº de lavadoras	x	y	$x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 20$	
Condición 1	x		$x \geq 1$	
Condición 2		y	$y \geq 1$	
Dispón	450x	750y	$450x + 750y \leq 10500$	
Beneficios	90x	150y	$f(x, y) = 90x + 150y$	Maximizar

b) Rexión factible :

taboleiro({centro = punto(12, 12), anchura = 25, altura = 25}) → taboleiro1

debuxar(x + y = 20, {cor = azul}) → taboleiro1

debuxar(450x+ 750y = 10500, {cor = verde}) → taboleiro1

debuxar(x = 1, {cor = maxenta}) → taboleiro1

debuxar(y = 1, {cor = maxenta}) → taboleiro1

resolver$\begin{Bmatrix} x + y = 20 \\ 450x + 750y = 10500 \end{Bmatrix}$ → {{x=15,y=5}}

resolver$\begin{Bmatrix} x + y = 20 \\ y = 1 \end{Bmatrix}$ → {{x=19,y=1}}

resolver$\begin{Bmatrix} 450x + 750y = 10500 \\ x = 1 \end{Bmatrix}$ → $\left\{\left\{x=1, y=\frac{67}{5}\right\}\right\}$

debuxar(polígono(punto(1, 1),punto(19, 1),punto(15, 5),punto(1, 67/5)), {cor=vermello, encher=certo, cor_recheo=amarelo})
→ taboleiro1

debuxar(punto(1, 1), {cor=azul,tamaño_punto=5}) → taboleiro1

debuxar(punto(19, 1), {cor=azul,tamaño_punto=5}) → taboleiro1

debuxar(punto(15, 5), {cor=azul,tamaño_punto=5}) → taboleiro1

debuxar(punto(1, 67/5), {cor=azul,tamaño_punto=5}) → taboleiro1

c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

f(x, y) = 15x + 25y → $(x,y) \mapsto 15 \cdot x + 25 \cdot y$

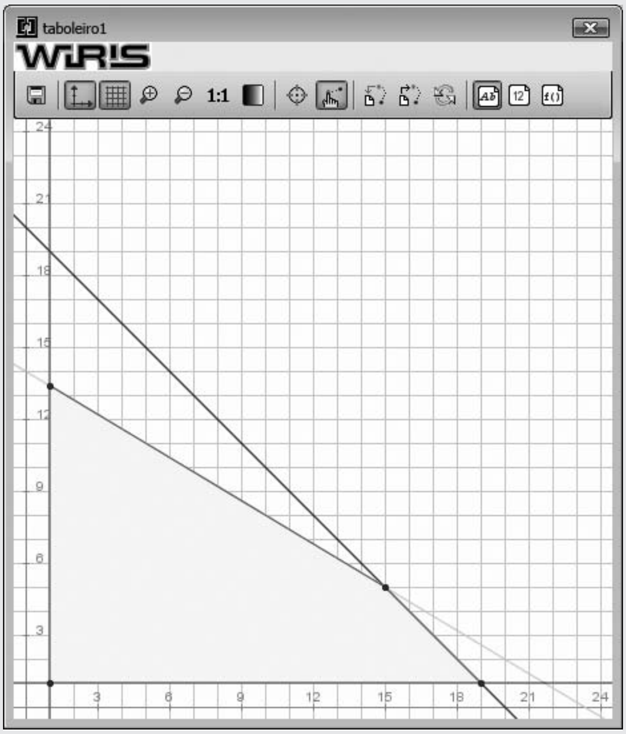
f(1, 1) → 40

f(19, 1) → 310

f(15, 5) → 350

f(1, 67/5) → 350

d) A solución óptima son os vértices C(15, 5) e D(1, 67/5), polo tanto tamén o son todos os puntos do segmento C e D.
Pero as solucións teñen que ser números enteiros, polo tanto as únicas solucións son C(15,5), E(10, 8) e F(5,11).



57. Certa sala de espectáculos ten unha capacidade máxima de 1 500 persoas entre adultos e nenos, aínda que o número de nenos asistentes non pode superar os 600. O prezo da entrada dun adulto a unha sesión é de 8 €, mentres que a entrada dun neno custa un 40% menos. Por outra parte, o número de adultos non pode superar o dobre do número de nenos.

Cumprindo as condicións anteriores, calcula cal é a cantidade máxima que se pode recadar pola venda de entradas. Calcula tamén cantas das entradas serán de nenos?

Solución:

Problema 57

E_nenos = (1 − 0.4) · 8 → 4.8

a) Táboa cos datos do problema :

	Adultos	Nenos	Restricións	
Persoas	x	y	x ≥ 0; 0 ≤ y ≤ 600	
Total	x	y	x + y ≤ 1500	
Condición	x	y	x ≤ 2y	
Recadación	8x	4,8y	f(x, y) = 8x + 4,8y	Maximizar

b) Rexión factible :

taboleiro({centro = punto(750, 750), anchura = 1600, altura = 1600}) → taboleiro1

debuxar(y = 600, {cor = azul}) → taboleiro1

debuxar(x + y = 1500, {cor = verde}) → taboleiro1

debuxar(x = 2y, {cor = maxenta}) → taboleiro1

resolver$\begin{Bmatrix} y = 600 \\ x + y = 1500 \end{Bmatrix}$ → {{x=900, y=600}}

resolver$\begin{Bmatrix} x + y = 1500 \\ x = 2y \end{Bmatrix}$ → {{x=1000, y=500}}

debuxar(polígono(punto(0, 0), punto(1000, 500), punto(900, 600), punto(0, 600)), {cor=vermello, encher=certo, cor_recheo=amarelo})

debuxar(punto(0, 0), {cor=azul, tamaño_punto=5}) → taboleiro1

debuxar(punto(1000, 500), {cor=azul, tamaño_punto=5}) → taboleiro1

debuxar(punto(900, 600), {cor=azul, tamaño_punto=5}) → taboleiro1

debuxar(punto(0, 600), {cor=azul, tamaño_punto=5}) → taboleiro1

c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

f(x, y) = 8x + 4.8y → (x,y)↦8.·x+4.8·y

f(0, 0) → 0.

f(1000, 500) → 10400.

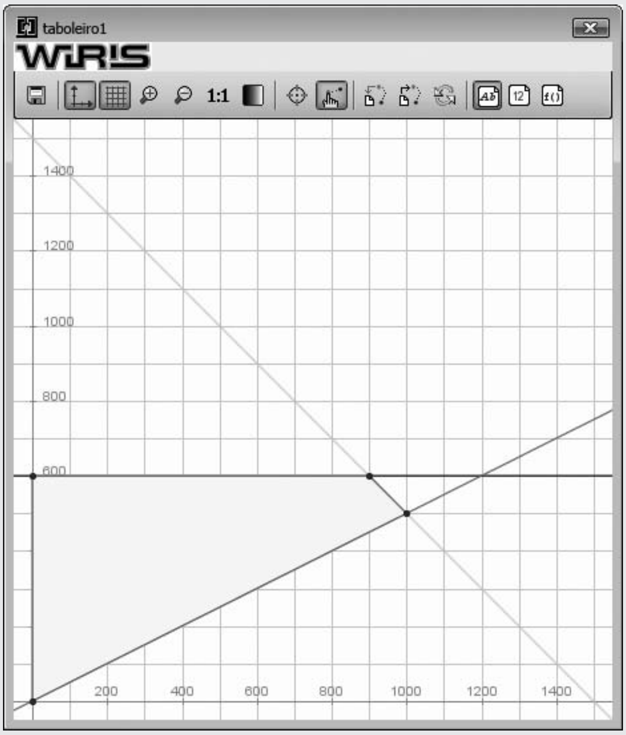
f(900, 600) → 10080.

f(0, 600) → 2880.

d) A solución óptima é D(0, 600), é dicir, x = 1000 entradas de adulto e y = 500 entradas de neno.

f(x, y) = 8x + 4.8y ➞ (x,y)↦8.·x+4.8·y
f(0, 0) ➞ 0.
f(1000, 500) ➞ 10400.
f(900, 600) ➞ 10080.
f(0, 600) ➞ 2880.

d) A solución óptima é (1000, 500), é dicir, x = 1000 entradas de adulto e y = 500 entradas de neno.



Problemas propostos

1. Estanse preparando doses con dous tipos de complementos para os astronautas da nave *Enterprise*. Cada gramo do complemento A contén 2 unidades de riboflavina, 3 de ferro e 2 de carbohidratos. Cada gramo do complemento B contén 2 unidades de riboflavina, 1 de ferro e 4 de carbohidratos. Cantos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente unha dose con 12 unidades de riboflavina, 16 de ferro e 14 de carbohidratos?

Solución:

a) Incógnitas, datos e preguntas:

Nº de gramos de complemento A: x

Nº de gramos de complemento B: y

b) Mans á obra:

$$\left.\begin{aligned}2x + 2y &= 12\\ 3x + y &= 16\\ 2x + 4y &= 14\end{aligned}\right\}\begin{matrix}1^a:2\\ \\ 3^a:2\end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x + y &= 6\\ 3x + y &= 16\\ x + 2y &= 7\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\\ 3\cdot 1^a - 2^a\\ 3^a - 1^a\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}x + y &= 6\\ 2y &= 2\\ y &= 1\end{aligned}\right\}\begin{matrix}\\ y = 1\\ y = 1\end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x + 1 &= 6\\ y &= 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}x &= 5\\ y &= 1\end{aligned}\right.$$

A solución do sistema é: x = 5, y = 1

c) Solución:

Necesítanse:

5 gramos do complemento A.

1 gramo do complemento B.

2. Nun domicilio pagáronse 3 facturas (auga, luz e teléfono) por un total de 140 €. De auga pagouse a terceira parte que de luz e a factura do teléfono foi o 45% do total.

a) Formula o correspondente sistema de ecuacións.

b) Canto se pagou en cada factura?

Solución:

Incógnitas, datos e preguntas:

Importe da factura da auga: x

Importe da factura da luz: y

Importe da factura do teléfono: z

Mans á obra:

$$\left.\begin{aligned}x + y + z &= 140\\ 3x \quad &= y\\ z &= 0{,}45\cdot 140\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x + y + z &= 140\\ 3x - y \quad &= 0\\ z &= 63\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}x + y &= 77\\ 3x - y &= 0\end{aligned}\right\}\ 1^a + 2^a \Rightarrow \left.\begin{aligned}x + y &= 77\\ 4x &= 77\end{aligned}\right\}\begin{aligned}y &= 57{,}75\\ x &= 19{,}25\end{aligned}$$

A solución do sistema é: x = 19,25; y = 57,75; z = 63

Solución:

As facturas foron:

Factura da auga: 19,25 €

Factura da luz: 57,75 €

Factura do teléfono: 63 €

3. Considera a ecuación matricial:

$$X + X\cdot A + B^t = 2C$$

onde as matrices A, B e C son:

$$A = \begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}-3 & 5\\ 4 & -5\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

e onde B^t denota a matriz trasposta de B.

a) Despexa a matriz X na ecuación matricial. De que orde é?

b) Calcula a matriz $2C - B^t$ e a inversa da matriz I + A, sendo I a matriz identidade de orde 3.

c) Resolve a ecuación matricial obtendo a matriz X.

Solución:

a) $X + X\cdot A + B^t = 2C$

$X(I + A) = 2C - B^t$

$X = (2C - Bt)\,(I + A)^{-1}$

X é unha matriz de orde 2 × 3.

b) $2C - B^t = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3 & 4 & 4\\ 5 & -5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$

$$I + A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$|I + A| = -1$

$$(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

c) $X = (2C - B^t)(I + A)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

4. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ -2\end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix}-x\\ 2\\ z\end{pmatrix}$$

a) Determina a matriz inversa de A.

b) Atopa os valores de x, y e z para os que: A · X = Y

Solución:

a) Matriz inversa.

$$|A| = 1,\ A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

b) Valores de x, y, z.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - 2 \\ y \\ -x + 3y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x - 2y - 2 \\ y \\ -x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

Pásase ao sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 2 = -x \\ y = 2 \\ -x + 3y = z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 2y = 2 \\ y = 2 \\ -x + 3y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^a : 2 \\ y = 2 \Rightarrow \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ y = 2 \\ -x + 3y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \Rightarrow \\ z = 3 \end{array}$$

Solución: **x = 3, y = 2, z = 3**

5. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$$

a) Consideramos **x** e **y** dúas variables e **a**, un parámetro. Obtén o sistema de dúas ecuacións e dúas incógnitas que resulta de formular: AB – C = D

b) Estuda o sistema para os distintos valores de **a**.

c) Atopa unha solución para a = 2.

Solución:

a) Sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + y \\ 1y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - C = \begin{pmatrix} ax + y \\ 1y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ -ay + y \end{pmatrix}$$

Se A · B – C = D, temos: $\begin{pmatrix} ax \\ -ay + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$

Obtense o sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax = 6 - ay \\ -ay + y = 1 - a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax + ay = 6 \\ (1 - a)y = 1 - a \end{array}\right\}$$

b) Clasificación:

$$C = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 - a \end{vmatrix} =$$

$= a(1 - a), a(1 - a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

Se $a \neq 0, a \neq 1$, R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas, o sistema é compatible determinado:

Para a = 0, estúdanse os rangos da matriz dos coeficientes C e da ampliada A.

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Temos R(C) = 1 < R(A) = 2; o sistema é incompatible.

Para a = 1, estúdanse os rangos da matriz dos coeficientes C e da ampliada A.

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas; o sistema é compatible indeterminado.

c) Para a = 2:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 6 \\ -y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

Solución: **x = 2, y = 1**

6. Estuda para que valores de **m** o sistema, con incógnitas representadas por **x** e **y**, dado por:

$$\left\{\begin{array}{r} mx - m - 2 = 0 \\ mx + (m - 1)y - 2m - 1 = 0 \end{array}\right.$$

ten solución e cando é única. Atopa dúas solucións para m = 1.

Solución:

Clasificación:

$$C = \begin{pmatrix} m & 0 \\ m & m - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m - 1 \end{vmatrix} = m^2 - m,$$

$m(m - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$

Se $m \neq 0, m \neq 1$, R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas, o sistema é compatible determinado:

Para m = 0, estúdanse os rangos da matriz dos coeficientes C e da ampliada A.

$$R(A) = R\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \end{array} = R\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Temos R(C) = 1 < R(A) = 2; o sistema é incompatible.

Para m = 1, estúdanse os rangos da matriz dos coeficientes C e da ampliada A.

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Temos R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas; o sistema é compatible indeterminado.

Para m = 1, a solución é x = 3, y calquera.

Dúas solucións para m = 1 son:

x = 3, y = 0

x = 3, y = 1

7. Considera o sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + ay + 3z = -1 \end{array}\right\}$$

a) Discute as súas posibles solucións segundo os valores do parámetro **a**.

b) Resolve o sistema para a = 0.

Solución:

a) Discusión: $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = a^2 - 1; a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -1$

Para $a \neq 1, a \neq -1 \Rightarrow R(C) = R(A) =$ nº de incógnitas = 3; sistema compatible determinado.

Para $a = 1$, estúdanse os rangos da matriz dos coeficientes C e da ampliada A.

$$R(A) = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3$; o sistema é incompatible.

Para $a = -1$:

$$R(A) = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2^a - 5 \cdot 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Temos, $R(C) = 2 < R(A) = 3$; o sistema é incompatible.

b) Para $a = 0$ temos o sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + 3z = -1 \end{array}\right\}\begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a - 2^a \end{array} = \left.\begin{array}{r} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ z = -2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{array}$$

A solución única é: $\mathbf{x = 5, y = 6, z = -2}$

8. Un agricultor desexa plantar 750 cerdeiras, 700 pereiras e 650 maceiras. No viveiro Agro ofrecen un lote de 15 cerdeiras, 30 pereiras e 10 maceiras por 700 €, e no viveiro Ceres o lote de 15 cerdeiras, 10 pereiras e 20 maceiras custa 650 €.

a) Formula e resolve un programa linear para indagar o número de lotes que deberá mercar en cada viveiro para que poida plantar as árbores que desexa e para que o custo total de adquisición sexa mínimo.

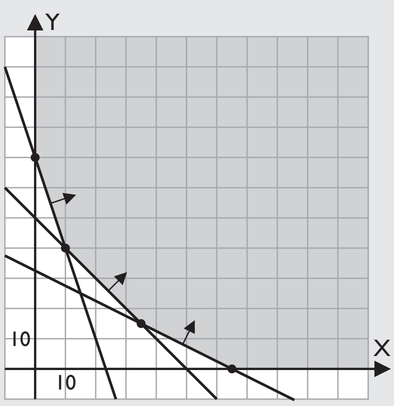
b) Emprega o agricultor todas as árbores que adquiriu? En caso negativo, di cantas non plantou e de que tipo son.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	V. Agro	V. Ceres	Restricións	
Nº de lotes	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Cerdeiras	15x	15y	$15x + 15y \geq 750$	
Pereiras	30x	10y	$30x + 10y \geq 700$	
Maceiras	10x	20y	$10x + 20y \geq 650$	
Custo	700x	650y	$f(x, y) = 700x + 650y$	**Mínimo**

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(35, 15) \Rightarrow f(35, 15) = 700 \cdot 35 + 650 \cdot 15 = 34\,250$ €

$B(65, 0) \Rightarrow f(65, 0) = 700 \cdot 65 + 650 \cdot 0 = 45\,500$ €

$C(0, 70) \Rightarrow f(0, 70) = 700 \cdot 0 + 650 \cdot 70 = 45\,500$ €

$D(10, 40) \Rightarrow f(10, 40) = 700 \cdot 10 + 650 \cdot 40 = 33\,000$ € **Mínimo**

d) A solución óptima é D(10, 40), é dicir, **x = 10 lotes do viveiro Agro** e **y = 40 lotes do viveiro Ceres.**

Cerdeiras = $10 \cdot 15 + 40 \cdot 15 = 750$

Pereiras = $10 \cdot 30 + 40 \cdot 10 = 700$

Maceiras = $10 \cdot 10 + 40 \cdot 20 = 900$

Sóbranlle 250 maceiras.

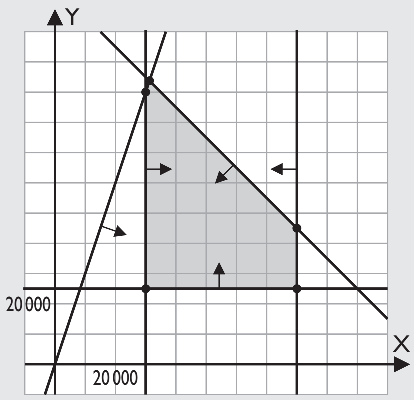
9. Deséxase investir unha cantidade de diñeiro menor ou igual ca 125 000 €, distribuído entre accións do tipo A e do tipo B. As accións do tipo A garanten unha ganancia do 10% anual, e é obrigatorio investir nelas un mínimo de 30 000 € e un máximo de 81 000 €. As accións do tipo B garanten unha ganancia do 5% anual, e é obrigatorio investir nelas un mínimo de 25 000 €. A cantidade investida en accións do tipo B non pode superar o triplo da cantidade investida en accións do tipo A. Cal debe ser a distribución do investimento para maximizar a ganancia anual? Determina esta ganancia máxima.

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Accións A	Accións B	Restricións	
Diñeiro	x	y	$30\,000 \le x \le 81\,000;\ y \ge 25\,000$	
Suma	x	y	$x + y \le 125\,000$	
Relación	x	y	$y \le 3x$	
Beneficio	$0{,}1x$	$0{,}05y$	$f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}05y$	**Máximo**

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(30\,000, 25\,000) \Rightarrow f(30\,000, 25\,000) = 0{,}1 \cdot 30\,000 + 0{,}05 \cdot 25\,000 = 4\,250$ €

$B(81\,000, 25\,000) \Rightarrow f(81\,000, 25\,000) = 0{,}1 \cdot 81\,000 + 0{,}05 \cdot 25\,000 = 9\,350$ €

$C(81\,000, 44\,000) \Rightarrow f(81\,000, 44\,000) = 0{,}1 \cdot 81\,000 + 0{,}05 \cdot 44\,000 = 10\,300$ € Máximo

$D(31\,250, 93\,750) \Rightarrow f(31\,250, 93\,750) = 0{,}1 \cdot 31\,250 + 0{,}05 \cdot 93\,750 = 7\,812{,}5$ €

$E(30\,000, 90\,000) \Rightarrow f(30\,000, 90\,000) = 0{,}1 \cdot 30\,000 + 0{,}05 \cdot 90\,000 = 7\,500$ €

d) A solución óptima é C(81 000, 44 000), é dicir, **x = 81 000 € en accións do tipo A** e **y = 44 000 en accións do tipo B.**

A ganancia máxima é de 10 300 €.

10. Un nutricionista informa a un individuo de que, en calquera tratamento que siga, non debe inxerir diariamente máis de 240 mg de ferro nin máis de 200 mg de vitamina B. Para isto están dispoñibles píldoras de dúas marcas, P e Q. Cada píldora da marca P contén 40 mg de ferro e 10 mg de vitamina B, e custa 6 céntimos de euro; cada píldora da marca Q contén 10 mg de ferro e 20 mg de vitamina B, e custa 8 céntimos de euro.

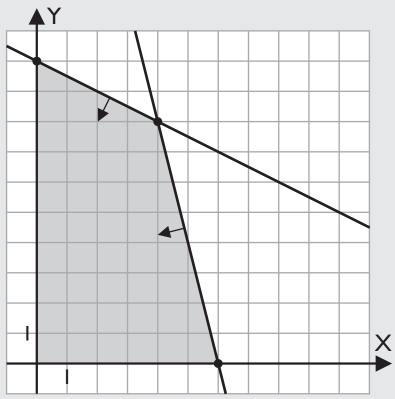
Entre os distintos tratamentos, cal sería o de máximo custo diario?

Solución:

a) Táboa cos datos do problema.

	Pílula P	**Pílula Q**	**Restricións**	
Nº de pílulas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Ferro	40x	10y	$40x + 10y \leq 240$	
Vitamina B	10x	20y	$10x + 20y \leq 200$	
Custo	6x	8y	$f(x, y) = 6x + 8y$	**Máximo**

b) Rexión factible.



c) Valores da función obxectivo nos vértices da rexión factible.

$A(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$ €

$B(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 6 \cdot 6 + 8 \cdot 0 = 36$ €

$C(4, 8) \Rightarrow f(4, 8) = 6 \cdot 4 + 8 \cdot 8 = 88$ € **Máximo**

$D(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 6 \cdot 0 + 8 \cdot 10 = 80$ €

d) A solución óptima é C(4, 8), é dicir, **x = 4 pílulas do tipo P** e **y = 8 pílulas do tipo Q.**