4 Sistemas lineares con parámetros

1. Teorema de Rouché

Pensa e calcula

Dado o seguinte sistema en forma matricial, escribe as súas ecuacións:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right\}$$

Aplica a teoría

1. Escribe os seguintes sistemas en forma matricial:

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + 5z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Escribe en forma ordinaria o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

3. Discute os seguintes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x - 5y = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Calcúlase o determinante da matriz dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Como o determinante de C é distinto de cero, o R(C) = 3 e temos:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

b) Calcúlase o determinante da matriz dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como o determinante de C é igual a cero, atópase o rango de A e C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 4 \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{7 \cdot 3^a - 2^a} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

4. Discute os seguintes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x + y \quad &= 1 \\ -x \quad + z &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Calcúlase o determinante da matriz dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como o determinante de C é igual a cero, atópase o rango de A e C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Calcúlase o determinante da matriz dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Como o determinante de C é distinto de cero, o $R(C) = 3$ e temos:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

2. Regra de Cramer e forma matricial

Pensa e calcula

Dado o seguinte sistema, resólveo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplica a teoría

5. Resolve por Cramer:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y \quad &= 5 \\ x \quad + 3z &= 16 \\ 5y - z &= 10 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y - 2z &= 6 \\ 2x + 3y - 7z &= 16 \\ 5x + 2y + z &= 16 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Determinante dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

A solución é:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-145}{-29} = 5$$

b) Determinante dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

A solución é:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6. Resolve por Cramer en función do parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a \\ x + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Determinante dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

A solución é:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2-2a}{-2} = a - 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2a-2}{-2} = 1 - a$$

7. Resolve por Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 4y + 5z + 5t = 0 \\ 2x + 3z - t = 10 \\ x + y - 5z = -10 \\ 3y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Determinante dos coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -290$$

A solución é:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 3 & -1 \\ -10 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-290}{-290} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{290}{-290} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-580}{-290} = 2$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{580}{-290} = -2$$

8. Resolve matricialmente o sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -11 & 13 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = 2, y = -1, z = 1$

9. Resolve matricialmente o sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{107}\begin{pmatrix} -4 & 9 & 50 \\ 15 & -7 & -27 \\ 7 & 11 & -34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = -3, y = 2, z = 1$

10. Resolve matricialmente o sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ x - 4y = -5 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A solución é: $x = -1, y = 1, z = -2$

3. Discusión de sistemas con parámetros

Pensa e calcula

Discute, segundo os valores de **k**, o seguinte sistema: $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 0 = k - 6 \end{array}\right\}$$

Para todo valor $k \neq 6$ o sistema é incompatible.

Para $k = 6$ o sistema redúcese a $x + y = 3 \Rightarrow$ compatible indeterminado.

Aplica a teoría

11. Discute, segundo os valores do parámetro **a**, os seguintes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} (a+1)x + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$

$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1$

Para todo valor de $a \neq -2$ e $a \neq 1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

• Para $a = -2$ temos:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2^a : 3 \\ 3^a : 3 \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

• Para $a = 1$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Temos que R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

b) Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^3 + 3a$

$a^3 + 3a = 0 \Rightarrow a^2(a + 3) = 0 \Rightarrow a = -3, a = 0$

Para todo valor de $a \neq -3$ e $a \neq 0$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

• Para $a = -3$ temos:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2^a : 3 \\ = 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

• Para $a = 0$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Temos que R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

12. Discute, segundo os valores do parámetro **k**, os seguintes sistemas:

a) $\left.\begin{matrix} kx + y + \ \ z = 4 \\ x + y + \ \ z = k \\ x - y + kz = 2 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} x + y + \ \ z = 0 \\ kx \qquad + 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \end{matrix}\right\}$

Solución:

a) Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 1$

Para todo valor de $k \neq -1$ e $k \neq 1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

• Para $k = -1$ temos:

$$R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Temos que R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

• Para $k = 1$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 3^a : 2 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Temos que R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

b) Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6$

$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = -3, k = 2$

Para todo valor de $k \neq -3$ e $k \neq 2$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

• Para $k = -3$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ = 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Temos que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

• Para $k = 2$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 2^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

13. Discute, segundo os valores do parámetro **a**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{matrix} 3x + 10y = -4 \\ ax + \quad y = \ \ 1 \\ x + \ \ 3y = -1 \end{matrix}\right\}$$

Solución:

Como hai máis ecuacións ca incógnitas, calcúlase o determinante da matriz ampliada:

Calcúlase: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$

$2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ verifícase que:

R(C) < R(A) = 3 e, xa que logo, o sistema é incompatible.

• Para $a = 1$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 7 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ = 2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos que R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

14. Discute, segundo os valores do parámetro **m**, os seguintes sistemas:

a) $\left.\begin{matrix} x + \qquad y \qquad\quad = 1 \\ mx \qquad\quad + \ \ z = 0 \\ x + (1 + m)y + mz = m + 1 \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} (2m + 2)x + \quad my + \quad 2z = 2m - 2 \\ 2x + (2 - m)y \qquad\quad = \quad 0 \\ (m + 1)x \qquad\quad + (m + 1)z = \ \ m - 1 \end{matrix}\right\}$

Solución:

a) Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix} = -m^2 - m$

$m^2 + m = m(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 0$

Para todo valor de $m \neq -1$ e $m \neq 0$ verifícase que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de $|C|$.

- Para $m = -1$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 2^a + 3^a \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible indeterminado.

- Para $m = 0$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ = 1^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible indeterminado.

b) Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} =$

$= -2m(m+1)(m-1)$

$m(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = -1, m = 1$

Para todo valor de $m \neq 0$, $m \neq -1$ e $m \neq 1$ verifícase que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de $|C|$.

- Para $m = 0$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} = 2 \cdot 3^a \\ 2^a : 2 \\ \\ \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

- Para $m = -1$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Temos que $R(C) = 2 < R(A) = 3$ e, polo tanto, o sistema é incompatible.

- Para $m = 1$ temos:

$$R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 2 \end{array} = R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ = 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Temos que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible indeterminado.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Un sistema linear heteroxéneo é compatible determinado se (C, matriz dos coeficientes, e A, matriz ampliada cos termos independentes):

- [ ] R(C) < R(A)
- [x] R(C) = R(A) = Nº de incógnitas
- [ ] R(C) > R(A)
- [ ] $R(C) \neq R(A)$

2 Se temos o sistema linear matricial CX = B tal que existe C^{-1}, a solución é:

- [ ] X = BC
- [ ] $X = BC^{-1}$
- [ ] X = CB
- [x] $X = C^{-1}B$

3 Un sistema linear homoxéneo:

- [x] Sempre é compatible.
- [ ] Sempre é incompatible.
- [ ] Unhas veces é compatible e outras incompatible.
- [ ] Ningunha das anteriores é certa.

4 Un sistema linear de tres ecuacións con dúas incógnitas:

- [x] Se R(C) = R(A) = 2, é compatible.
- [ ] Se R(A) = 3, é compatible.
- [ ] Se R(C) = 3, é compatible.
- [ ] Se R(C) = R(A) = 3, é compatible.

5 Un sistema linear de tres ecuacións con tres incógnitas:

- [ ] Se R(C) = R(A) = 2, é compatible determinado.
- [ ] Se $R(C) \neq R(A)$, é compatible determinado.
- [x] Se R(C) = R(A) = 3, é compatible determinado.
- [ ] Se R(C) < R(A), é compatible determinado.

6 Considérase o sistema linear de ecuacións, dependentes do parámetro real **a**:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

Discute o sistema para os distintos valores de **a**:

- [x] $a \neq -7/4$, S. C. D., se $a = -7/4$, S. I.
- [ ] $a = -7/4$, S. C. D., se $a \neq -7/4$, S. I.
- [ ] $a \neq 2$, S. C. D., se $a = 2$, S. I.
- [ ] $a = 2$, S. C. D., se $a \neq 2$, S. I.

7 Resolve o sistema do exercicio 6 para a = 4.

- [ ] x = 2, y = 3, z = 4
- [ ] x = −2, y = 3, z = −4
- [x] x = y = z = 1
- [ ] x = −1, y = −2, z = −3

8 Discute, en función do parámetro **a**, a solución do seguinte sistema de ecuacións lineares.

$$\begin{cases} x + 4y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + az = -a \end{cases}$$

- [ ] $a \neq -1$, S. C. D., se $a = -1$, S. I.
- [x] $a \neq 1$, S. C. D., se $a = 1$, S. C. I.
- [ ] $a = 1$, S. C. D., se $a \neq 1$ S. C. I.
- [ ] $a = 2$, S. C. D., se $a \neq 2$ S. I.

9 Resolve o sistema do exercicio 8 cando sexa compatible determinado.

- [ ] x = y = z = 5
- [ ] x = 15, y = 6, z = 1
- [ ] x = −1/2, y = 2/3, z = −4/5
- [x] x = 15/13, y = 6/13, z = −1

10 Resolve o sistema do exercicio 8 cando sexa compatible indeterminado.

- [ ] x = y − 2, z = −y + 2
- [x] x = 9y − 3, z = −13y + 5
- [ ] x = 3y − 1, z = −3y + 1
- [ ] x = −9y + 3, z = 13y − 5

Exercicios e problemas

1. Teorema de Rouché

15. Discute o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = -2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, atópase o rango de C e de A por Gauss e obtense:

R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

16. Discute o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 4y + 5z = 9 \\ x - 2y = 1 \\ 5x + 3y + 5z = 5 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = -10$, o R(C) = R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

17. Discute o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 4z = 0 \\ 4x - y + 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, atópase o rango de C e de A por Gauss e obtense:

R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

18. Discute o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, atópase o rango de C e de A por Gauss e obtense: R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas e polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

19. Discute o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, atópase o rango de C e de A por Gauss e obtense: R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

20. Discute o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, atópase o rango de C e de A por Gauss e obtense:

R(C) = 2 = R(A) < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

21. Discute e resolve, se é posible, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 4y - z + 2t = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 5x - 2y - 4z - t = -12 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hai máis incógnitas ca ecuacións, pásase **t** ao 2º membro e resólvese por Gauss, polo que se obtén a solución:

$$x = \frac{3t-2}{13}, y = \frac{9-7t}{13}, z = \frac{4t+32}{13}$$

A solución en ecuacións parámetricas é:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3\lambda-2}{13} \\ y = \dfrac{9-7\lambda}{13} \\ z = \dfrac{4\lambda+32}{13} \\ t = \lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Regra de Cramer e forma matricial

22. Resolve por Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = -36$, o sistema é de Cramer.

A solución é: $x = 2, y = -1, z = 1$

23. Resolve por Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 5$, o sistema é de Cramer.

A solución é: $x = -\dfrac{1}{5}, y = 0, z = \dfrac{2}{5}$

24. Resolve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - 4y \quad &= 5 \\ 7x - y - 3z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 46$, o sistema é de Cramer.

A solución é: $x = \frac{27}{23}, y = -\frac{17}{46}, z = \frac{9}{46}$

25. Resolve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = -2$, o sistema é de Cramer.

A solución é: $x = 4, y = -2, z = 0$

26. Resolve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = -5$. Calculando a matriz inversa dos coeficientes temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A solución é: $x = -1, y = 0, z = 2$

27. Resolve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = 2$. Calculando a matriz inversa dos coeficientes temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A solución é: $x = 0, y = -2, z = 2$

3. Discusión de sistemas con parámetros

28. Discute, segundo o valor do parámetro **m**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} mx + \quad my &= 6 \\ x + (m-1)y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, m = 0$

Para todo valor de $m \neq 2$ e $m \neq 0$ verifícase que:

$R(C) = R(A) = 2$ = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de $|C|$.

- Para $m = 2$ temos:
  $R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.
- Para $m = 0$ temos:
  $R(C) = 1 < R(A) = 2$ e, polo tanto, o sistema é incompatible.

29. Discute, segundo o valor do parámetro **m**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} (m+1)x + y + z &= 3 \\ x + 2y + mz &= 4 \\ x + my + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - m^2 + 6m$$

$m^3 + m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -3, m = 2$

Para todo valor de $m \neq 0, m \neq -3$ e $m \neq 2$ verifícase que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de $|C|$.

- Para $m = 0$ temos:
  $R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.
- Para $m = -3$ temos:
  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ e, polo tanto, o sistema é incompatible.
- Para $m = 2$ temos:
  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ e, polo tanto, o sistema é incompatible.

30. Discute, segundo o valor do parámetro **a**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 2x - y + az &= 9 \\ x - y - 6z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calcúlase: $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 2a + 16$

$2a + 16 = 0 \Rightarrow a = -8$

Para todo valor de $a \neq -8$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = −8 temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

31. Discute, segundo o valor do parámetro **a**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 5x - y + az &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a + 24$

$3a - 24 = 0 \Rightarrow a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$

Para todo valor de $a \neq 8$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C| = 0.

- Para a = 8 temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

32. Discute, segundo o valor do parámetro **k**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 6 \\ x + y &= k \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hai unha ecuación máis que incógnitas, estúdase o determinante da matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -11k + 22$$

$11k - 22 = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

Para todo valor de $k \neq 2$ verifícase que:

R(C) < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

Estúdanse os valores que son raíces de |A|.

- Para k = 2 temos:

  R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

33. Discute, segundo o valor do parámetro **k**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x + 2y - z &= 3 \\ kx + 3y - 2z &= 0 \\ -x - 4z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hai unha ecuación máis que incógnitas, estúdase o determinante da matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ k & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = k + 20$$

$k + 20 = 0 \Rightarrow k = -20$

Para todo valor de $k \neq -20$ verifícase que:

R(C) < R(A) = 3 e, por conseguinte, o sistema é incompatible.

Estúdanse os valores que son raíces de |A|.

- Para k = −20 temos:

  R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

34. Considérase o seguinte sistema linear de ecuacións, dependente do parámetro **m**:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 5 \\ -x + (m + 2)z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute o sistema para os distintos valores de **m**.

b) Resolve o sistema para m = 3.

Solución:

a) |C| = m − 1

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para m = 1 temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

b) Para m = 3 a solución do sistema é:

$$x = -3, y = 8, z = 0$$

Para ampliar

35. Considérase o seguinte sistema linear de ecuacións, dependente do parámetro real **a**:

$$\left.\begin{aligned} x - y \quad &= 2 \\ ax + y + 2z &= 0 \\ x - y + az &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute o sistema segundo os diferentes valores do parámetro **a**.

b) Resolve o sistema para a = −1.

c) Resolve o sistema para a = 2.

Solución:

a) $|C| = a^2 + a = a(a + 1)$

$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ e $a \neq 0$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = −1 temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

- Para a = 0 temos:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

b) Para a = −1 a solución do sistema é:

$$x = 2 + y, z = 1$$

A solución en ecuacións paramétricas é:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para a = 2 a solución é:

$$x = 1, y = -1, z = -1/2$$

36. Sexa o seguinte sistema de ecuacións lineares:

$$\left.\begin{aligned} ax + y - z &= 0 \\ 2x + ay \quad &= 2 \\ -x \quad + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute o sistema segundo os valores do parámetro **a**.

b) Resolve o sistema cando este teña máis dunha solución.

Solución:

a) $|C| = a^2 - a - 2$

$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -1$ e $a \neq 2$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = −1 temos:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

- Para a = 2 temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

b) Para a = 2 a solución do sistema é:

$$x = z - 1, y = 2 - z$$

A solución, en ecuacións paramétricas, é:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda - 1 \\ y &= 2 - \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

37. Sendo **a** un número real calquera, defínese o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - az &= 1 \\ -y + z &= 0 \\ ax \quad + z &= a \end{aligned}\right\}$$

a) Discute o sistema en función do valor de **a**.

b) Atopa todas as súas solucións para a = 1.

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 2a - 1$

$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = 1 temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

b) Para a = 1 a solución do sistema é:

$$x = 1 - z, y = z$$

A solución, en ecuacións paramétricas, é:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

38. Considérase o seguinte sistema linear de ecuacións, dependente do parámetro real λ:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 5z &= 0 \\ 2x - \lambda y \quad &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Discute o sistema segundo os diferentes valores do parámetro λ e resólveo.

Solución:

a) $|C| = 4\lambda - 12$

$4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

Para todo valor de $\lambda \neq 3$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para $\lambda = 3$ temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 3$ a solución do sistema é:

$$x = -3z\ ,\ y = -2z$$

A solución, en ecuacións paramétricas, é:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{array}\right\} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda \neq 3$ a solución do sistema é a solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

39. Considérase o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 1 \\ x - y = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute a compatibilidade do sistema en función do parámetro **m**.

b) Atopa, cando existan, as súas solucións.

Solución:

a) |C| = 0 para calquera valor de m.

Estúdase o sistema por Gauss e obtense que é incompatible.

b) Non hai solucións.

40. Considérase o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute o sistema en función do parámetro **a**.

b) Resólveo para a = 2.

Solución:

a) $|C| = 2a^2 - 8$

$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -2$ e $a \neq 2$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = −2 temos: R(C) = 2 < R(A) = 3 e, xa que logo, o sistema é incompatible.
- Para a = 2 temos: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

b) Para a = 2 a solución do sistema é:

$$x = 3 - y, z = -1$$

A solución, en ecuacións paramétricas, é:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Problemas

41. Considérase o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a-4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{array}\right\}$$

a) Discute o sistema en función do parámetro real **a**.

b) Resólveo para a = 4.

Solución:

a) $|C| = -2a + 4$

$2a - 4 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Para todo valor de $a \neq 2$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = 2 temos: R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

b) Para a = 4 a solución do sistema é:

$$x = -5, y = -2, z = 9$$

42. Sexa o sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + \ \ y \qquad = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute o sistema en función do parámetro real **a**.

b) Resolve o sistema nos casos en que resulte compatible determinado.

Solución:

a) $|C| = a + 1$

$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para $a = -1$ temos: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

b) Para $a \neq -1$ a solución do sistema é:

$$x = 1, y = 0, z = 2$$

43. Considérase o sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + my \qquad = 0 \\ x \qquad + mz = m \\ x + \ \ y + \ 3z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute o sistema segundo os valores de **m**.

b) Resolve o sistema para m = 6.

Solución:

a) $|C| = m^2 - 5m$

$m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m-5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 5$

Para todo valor de $m \neq 0$ e $m \neq 5$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para m = 0 temos: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.
- Para m = 5 temos: R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo é incompatible.

b) Para m = 6 a solución do sistema é:

$$x = -12, y = 4, z = 3$$

44. Sexa o sistema homoxéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad + \qquad\quad z = 0 \\ x + my + \qquad 2mz = 0 \\ 2x + my + (2m+3)z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Calcula o valor de **m** para o que o sistema teña solucións distintas da trivial.

b) Atopa as solucións.

Solución:

a) $|C| = 2m$

$2m = 0 \Rightarrow m = 0$

Para todo valor de $m \neq 0$, a solución é a trivial.

b) Para m = 0 temos:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

A solución é: x = 0, z = 0

A solución, en ecuacións paramétricas, é:

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

45. Dado o sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Estuda a súa compatibilidade.

b) Engádelle ao sistema unha ecuación de tal forma que o sistema resultante teña solución única. Xustifica a resposta e atopa esta solución.

c) Engádelle ao sistema unha ecuación de tal forma que o sistema resultante sexa incompatible. Xustifica a resposta.

Solución:

a) R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

O sistema ten como solución:

$$x = 1, y = -1, z = 0$$

c) Engádese unha ecuación contraditoria coas outras dúas; por exemplo, sumando e cambiando o termo independente:

$$3x + 2z = 0$$

46. Considérase o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y \qquad\qquad = \ a \\ x \quad + \qquad a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

a) Discute o sistema segundo os valores do parámetro real **a**.

b) Resolve o sistema para a = 3.

Solución:

a) $|C| = a^2 - a$

$a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

Para todo valor de $a \neq 0$ e $a \neq 1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = 0 temos:
  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.
- Para a = 1 temos:
  R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

b) Para a = 3 a solución do sistema é:

$$x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$$

Para profundar

47. Considérase o seguinte sistema de ecuacións nas incógnitas x, y, z e t:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2ky - t = 0 \end{array}\right\}$$

a) Atopa os valores de **k** para os que o rango da matriz dos coeficientes do sistema é 2.

b) Resolve o sistema anterior para k = 0.

Solución:

a) Estudando a matriz dos coeficientes por Gauss obtense que se k = 3/2 o R(C) = 2.

b) Para k = 0, a solución é:

$$x = t/2, y = 0, z = -t/2$$

A solución en ecuacións paramétricas é:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda}{2} \\ y = 0 \\ x = -\dfrac{\lambda}{2} \\ t = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

48. Considérase o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{array}\right\}$$

a) Atopa todos os valores do parámetro λ para os que o sistema correspondente ten infinitas solucións.

b) Resolve o sistema para os valores de λ obtidos no apartado anterior.

c) Discute o sistema para os restantes valores de λ.

Solución:

a) $|C| = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$

$2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -7, \lambda = 1$

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para $\lambda = -7$ temos: R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.
- Para $\lambda = 1$ temos: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ a solución do sistema é:

$$x = 1 + 2z, y = 1 - z$$

A solución, en ecuacións paramétricas, é:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para todo valor de $\lambda \neq -7$ e $\lambda \neq 1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible determinado.

49. Discute o sistema, segundo o valor do parámetro **m**, e resolve nos casos de compatibilidade:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + mz = 6 \\ -2x - 10y - 2z = m - 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) $|C| = 14m - 14$

$14m - 14 = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para m = 1 temos:
  R(C) = 2 < R(A) = 3 e, polo tanto, o sistema é incompatible.

b) Para $m \neq 1$ a solución do sistema é:

$$x = \frac{3m^2 + 27m - 28}{14(m-1)},\ y = \frac{-m(2m-3)}{14(m-1)},\ z = \frac{-m}{2(m-1)}$$

50. Dado o seguinte sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{array}\right\}$$

a) Discute o sistema segundo o valor do parámetro **a**.

b) Resolve o sistema en todos os casos de compatibilidade.

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 3a - 2$

$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq 1$ e $a \neq 2$ verifícase que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas e, xa que logo, o sistema é compatible determinado.

Estúdanse os valores que son raíces de |C|.

- Para a = 1 temos:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado.

- Para a = 2 temos:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 e, xa que logo, o sistema é incompatible.

b) Para a = 1 a solución é:

$x = 1 - z, y = 0$

A solución, en ecuacións paramétricas, é:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $a \neq 1$ e $a \neq 2$, a solución é:

$$x = \frac{a-1}{a-2},\ y = \frac{a-1}{a-2},\ z = -\frac{1}{a-2}$$

Paso a paso

51. Discute o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

52. Resolver matricialmente o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y \phantom{{}-z} &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

53. Discute, segundo os valores de **k**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} (1-k)x + y + z &= 0 \\ x + (1-k)y + z &= k \\ x + y + (1-k)z &= k^2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

54. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

55. Resolve o sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -8 \\ x + 3y - 2z &= 5 \\ 2x + y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Exercicio 55

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=-3, y=4, z=2\}\}$$

Solución : x = −3, y = 4, z = 2

56. Considera o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

a) Resólveo para o valor de **a** que o faga compatible indeterminado.

b) Resolve o sistema que se obtén para a = 2.

Solución:

Exercicio 56

a) Resólveo para o valor de a que o faga compatible determinado.

$$C(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$|C(a)| \rightarrow -a^2+1$$

$$\text{resolver}(-a^2+1=0) \rightarrow \{\{a=-1\},\{a=1\}\}$$

$$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(-1)) \rightarrow 2$$

$$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(-1)) \rightarrow 2$$

Para a = −1, R(C) = R(A) = 2 < 3 = número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

$$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(1)) \rightarrow 2$$

$$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(1)) \rightarrow 3$$

Para a = 1, R(C) = 2 ≠ R(A) = 3

Sistema incompatible.

É compatible indeterminado para a = − 1

Resolvémolo para a = −1

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\left[x=-\frac{3}{2}, y=-z+\frac{5}{2}, z=z\right]\right\}$$

b) Resolve o sistema que se obtén para a = 2

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} 2x+y+z=4 \\ x-2y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=0, y=1, z=3\}\}$$

Solución, x = 0, y = 1, z = 3

57. Discute, segundo os valores do parámetro **k**, o seguinte sistema:

$$\left.\begin{aligned} kx + \quad\;\; y &= 1 \\ x + (k+1)y &= 1 \\ x + \quad\; ky &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Exercicio 57

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

$|A(k)| \rightarrow k-1$

resolver$(k-1=0) \rightarrow \{\{k=1\}\}$

Para $k \neq 1$, $R(C) < R(A) = 3$, sistema incompatible.

Para $k = 1$

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 2$

Se $k = 1$, $R(C) = R(A) = 2 =$ nº de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

58. Clasifica o sistema seguinte segundo os valores do parámetro **k**.

$$\left.\begin{aligned} kx + y - 2z &= 0 \\ -x - y + kz &= 1 \\ x + y + \;\; z &= k \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Problema 58

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

$|C(k)| \rightarrow -k^2+1$

resolver$(-k^2+1=0) \rightarrow \{\{k=-1\},\{k=1\}\}$

Para $k \neq -1$, $k \neq 1$, $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas.

Sistema heteroxéneo compatible determinado.

$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(-1)) \rightarrow 2$

$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

rango$(A(-1)) \rightarrow 2$

$R(C) = R(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \rightarrow 3$

$R(C) \neq R(A)$, sistema incompatible.

59. Dado o sistema homoxéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + ky - z &= 0 \\ kx - \;\; y + z &= 0 \\ (k+1)x + \;\; y \quad\;\; &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Indaga para que valores de **k** teñen solucións distintas de x = y = z = 0. Resólveo en tales casos.

Solución:

Problema 59

$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow k^2-k-2$

resolver$(k^2-k-2=0) \rightarrow \{\{k=-1\},\{k=2\}\}$

Ten solucións distintas de x = y = z para $k \neq -1$, $k \neq 2$

Para $k = -1$

resolver$\begin{bmatrix} x-y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ y=0 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=z, y=0, z=z\}\}$

Solución $x = z$, $y = 0$

Para $k = 2$

resolver$\begin{bmatrix} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y=0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\left[x=-\frac{1}{5}\cdot z, y=\frac{3}{5}\cdot z, z=z\right]\right]$

Solución $x = -z/5$, $y = 3z/5$

60. Dado o sistema de ecuacións lineares:

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 2 \\ ax - \ y &= a + 1 \end{aligned}\right\}$$

Determina para que valor ou valores de **a** o sistema ten unha solución na que y = 2.

Solución:

Problema 60

Resolvemos o sistema cando y = 2

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x-2a=2 \\ a\cdot x-2=a+1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\{a=1, x=4\}, \left\{a=-\frac{3}{2}, x=-1\right\}\right\}$

Ten a solución y = 2 cando a = 1 ou a = −3/2

61. Formula e resolve o sistema de ecuacións dado por:

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 61

$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9\cdot x+2\cdot y+3 \\ 3\cdot x-y \end{pmatrix}$

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} 9x+2y+3=5 \\ 3x-y=4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{2}{3}, y=-2\right\}\right\}$

A solución é: x = 2/3, y = – 2

62. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula dous números reais **x** e **y** tales que se verifique:

$$A + xA + yI = 0$$

sendo **I** a matriz unidade de orde 2 e **O** a matriz nula de orde 2.

Solución:

Problema 62

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A + x\cdot A + y\cdot I \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot x+y+2 & x+1 \\ 2\cdot x+2 & 3\cdot x+y+3 \end{pmatrix}$

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} 2x+y+2=0 \\ x+1=0 \\ 2x+2=0 \\ 3x+y+3=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=-1, y=0\}\}$

A solución é: x = –1, y = 0

63. Considérase o sistema:

$$\left\{\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 3x - 5y + z &= 4 \\ x - y + (a-2)z &= 2 \end{aligned}\right.$$

a) Discutir o sistema para os distintos valores de **a**.

b) Atopa todas as solucións para a = 3.

Solución:

Problema 63

$C(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$

$|C(a)| \rightarrow a-1$

$\text{resolver}(|C(a)| = 0) \rightarrow \{\{a=1\}\}$

Para a ≠ 1, sistema compatible determinado.

Para a = 1

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(C(1)) \rightarrow 2$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$

Sistema compatible indeterminado.

b) Para a = 3

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x-2y+z=1 \\ 3x-5y+z=4 \\ x-y+z=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=3, y=1, z=0\}\}$