3 Determinantes

1. Determinantes de orde 2 e 3 por Sarrus

Pensa e calcula

Dada a proporción $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, calcula o produto de extremos menos o produto de medios.

Solución:

$3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0$

Aplica a teoría

1. Calcula mentalmente os seguintes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque ten unha columna de ceros.

b) $|B| = 0$ porque ten dúas filas iguais, a 1ª e a 3ª.

2. Calcula mentalmente os seguintes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -9 \\ 7 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque ten dúas filas proporcionais; a 2ª é o dobre da 1ª.

b) $|B| = 0$ porque ten unha fila que é combinación linear das outras dúas; a 3ª é a suma da 1ª e da 2ª.

3. Atopa os determinantes que se poidan calcular das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 38$

b) Non se pode calcular porque non é cadrada.

4. Atopa os determinantes das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 50$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -58$

5. Atopa os determinantes das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 255$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

6. Atopa os determinantes das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -265$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 867$

7. Atopa os determinantes das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 125$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 70$

8. Se $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ é a trasposta da matriz E, calcula o determinante da matriz $E^t \cdot E$.

Solución:

$E^t = E = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$

$|E^t \cdot E| = |14| = 14$

2. Propiedades dos determinantes

Pensa e calcula

Dada a matriz $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, atopa o seu determinante e o da súa trasposta. Como son?

Solución:

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$|A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2$

Ambos os determinantes son iguais.

Aplica a teoría

9. Sexan: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 9 \\ -8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -374$ e $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -8 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

Atopa mentalmente |B|. Que propiedade empregaches?

Solución:

|B| = 374

Porque o determinante |B| obtense do |A| cambiando a 2ª e 3ª filas.

10. Atopa o valor dos seguintes determinantes e comproba que son iguais.

A 3ª fila do 2º obtívose substituíndoa pola suma das tres do 1º.

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

|A| = 245 |B| = 245

11. Comproba a identidade $|A| = |A^t|$ sendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -7 \\ 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = -180$ $\qquad$ $|A^t| = -180$

12. Sabendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

Calcula o seguinte determinante e enuncia as propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

No 1º paso descompuxemos o determinante na suma doutros dous que teñen a 2ª e 3ª columna iguais e a suma das dúas primeiras columnas coincide coa 1ª columna inicial.

No 2º paso cambiamos no 1º determinante a 2ª columna coa 3ª e, polo tanto, o determinante cambia de signo e o 2º determinante é cero, porque a 1ª columna é o dobre da 3ª.

13. Se todos os elementos dunha matriz de orde 3×3 se multiplican por (-1), que relación hai entre os determinantes da matriz orixinal e da nova matriz?

Solución:

Se todos os elementos dunha matriz de orde 3×3 se multiplican por (-1), o seu determinante queda multiplicado por $(-1)^3 = -1$.

A propiedade que se empregou di que para multiplicar un determinante por un número multiplícase o número por cada elemento dunha liña. Como se multiplican as tres liñas, elévase ao cubo.

14. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Comproba que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{vmatrix} = -1\,071$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 51 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -21$$

$|A| \cdot |B| = 51 \cdot (-21) = -1\,071$

3. Desenvolvemento dun determinante polos elementos dunha liña

Pensa e calcula

Atopa unha matriz A de orde 3, é dicir, de dimensión 3×3 definida por: $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplica a teoría

15. Dada a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \\ 2 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

Atopa:

a) O menor complementario do elemento a_{21}.

b) O menor complementario do elemento a_{13}.

Solución:

a) $M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = 24$

b) $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 46$

16. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Atopa:

a) O adxunto do elemento a_{12}.

b) O adxunto do elemento a_{31}.

Solución:

a) $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 35$

b) $A_{31} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -63$

17. Calcula o valor dos seguintes determinantes polos adxuntos da liña máis sinxela:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 23 = 161$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 22 = 176$

18. Calcula o valor do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -86$$

19. Calcula o valor do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ \\ 7 \cdot 1^a + 4^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 12 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 37 & 0 & 48 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 37 & 48 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 17 & 32 & 0 \\ 44 & 60 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} 17 & 32 \\ 44 & 60 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-388) = 1\,164$$

4. Matriz inversa

Pensa e calcula

Multiplica as seguintes matrices A · B e B · A. Que matriz se obtén?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

En ambos os casos obtense a matriz unidade de orde 2.

Aplica a teoría

20. Comproba que as seguintes matrices son inversas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

21. Atopa a inversa das seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -5$

$A_{12} = -1 \qquad A_{22} = 3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -3$

$A_{12} = -4 \qquad A_{22} = 7$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

22. Atopa a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

23. Atopa a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|B| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 4 & 6 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Dadas as seguintes matrices, determina se son invertibles e, en caso afirmativo, calcula a matriz inversa e o determinante desta inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

Para que unha matriz sexa invertible ten que ser cadrada e o seu determinante distinto de cero.

a) A matriz A é cadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Polo tanto, A é invertible.

$A_{11} = 4$ $A_{21} = -2$

$A_{12} = -3$ $A_{22} = 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

O determinante da inversa é o inverso do determinante.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

b) A matriz B non é cadrada. Polo tanto, non é invertible.

25. Considera a matriz A que depende dun parámetro **a**:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Para que valores de **a** ten A inversa? Xustifica a resposta.

b) Para a = 0 atopa a inversa de A.

Solución:

a) Como A é unha matriz cadrada, para que teña inversa, o seu determinante ten que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

A matriz A ten inversa para $a \neq 1$.

b) Para a = 0 tense:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Ecuacións con matrices

Pensa e calcula

Resolve a ecuación matricial: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplica a teoría

26. Determina a matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

27. Atopa todas as matrices X tales que XA = AX, se A é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sexa $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4a + 2c & 4b + 2d \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b & 2b \\ c + 4d & 2d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a = a + 4b \\ b = 2b \\ 4a + 2c = c + 4d \\ 4b + 2d = 2d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = 0 \\ c = 4d - 4a \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d - 4a & d \end{pmatrix}$$

28. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Existe algunha matriz Y, cadrada de orde 2, tal que $AY = B^t$? (B^t é a matriz trasposta de B). Xustifica a resposta.

Solución:

Sexa: $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$B^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AY = B^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a - c & b - d \\ 2c - 2a & 2d - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a = -2 \\ b = 3 \\ a - c = 2 \\ b - d = -1 \\ 2c - 2a = 0 \\ 2d - 2b = 1 \end{array}\right\}$$

Das catro primeiras ecuacións obtense:

$$\left.\begin{array}{r} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -4 \\ d = 4 \end{array}\right\}$$

Que non verifican as outras dúas ecuacións; polo tanto, non existe ningunha matriz Y, cadrada de orde 2, que verifique a ecuación pedida.

29. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Resolve a ecuación matricial $XA - B = 2I$, sendo I a matriz identidade de orde tres.

Solución:

$XA - B = 2I$

$XA = B + 2I$

$X = (B + 2I)A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

30. Sexan as matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula a matriz X tal que $AX = B$.

Solución:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Rango dunha matriz

Pensa e calcula

Dos seguintes vectores, cales son proporcionais?: $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$ e $\vec{w}(-2, 6, -4)$

Solución:

Son proporcionais: $\vec{u}(1, -3, 2)$ e $\vec{w}(-2, 6, -4)$ $\Rightarrow \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{2}{-4}$

Aplica a teoría

31. Atopa mentalmente o rango das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $R(A) = 2$

Porque as filas non son proporcionais.

b) $R(A) = 1$

Porque as filas son proporcionais.

32. Atopa mentalmente o rango das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $R(A) = 1$

Porque as filas son proporcionais.

b) $R(A) = 2$

Porque as columnas non son proporcionais.

33. Atopa o rango das seguintes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 241 \neq 0$

$R(A) = 3$

Porque o determinante é distinto de cero.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$R(A) = 2$

Porque o determinante é cero e as tres filas non son proporcionais.

34. Atopa o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 7 & 6 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a + 2^a \\ 3 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = 2$$

35. Atopa o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(B) = R\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 20 \end{pmatrix} = 3$$

36. Calcula o rango da matriz A segundo os diferentes valores do parámetro real **a**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 5 \cdot 2^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 12 & a+4 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3 \cdot 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 2a+8 & -3a-12 \end{pmatrix}$$

Se $a = -4 \Rightarrow R(A) = 2$

Se $a \neq -4 \Rightarrow R(A) = 3$

Preguntas tipo test

Contesta no tu caderno:

1 Indica que igualdade é falsa:

- [ ] $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$
- [x] $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$
- [ ] $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$
- [ ] $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

2 A matriz inversa dunha matriz regular A é igual a:

- [ ] O produto do inverso do determinante de A pola matriz adxunta de A.
- [ ] A adxunta da súa matriz trasposta.
- [x] O produto do inverso do determinante de A pola trasposta da matriz adxunta de A.
- [ ] A trasposta da matriz adxunta.

3 A matriz adxunta é:

- [ ] A matriz cuxo elemento $\mathbf{a_{ij}}$ é o menor complementario do elemento $\mathbf{a_{ij}}$ da matriz A.
- [ ] A matriz inversa de A.
- [ ] A matriz que se obtén de eliminar a fila **i** e a columna **j** da matriz A.
- [x] A matriz cuxo elemento $\mathbf{a_{ij}}$ é o adxunto do elemento $\mathbf{a_{ij}}$ da matriz A.

4 Se $|A| = 3$ e $|B| = -3$, $|AB|$ é igual a:

- [ ] 0
- [x] −9
- [ ] 9
- [ ] −1

5 As matrices X cadradas 2×2 que satisfan a igualdade $XA = AX$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, son da forma:

- [ ] $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- [x] $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

6 A matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ é:

- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- [x] $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

7 A matriz A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$ é:

- [ ] $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 3/13 \\ 5/13 \end{pmatrix}$
- [x] $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 102 \\ 131 \end{pmatrix}$

8 Despexa a matriz **X** na ecuación:

$$2X - AX = C - BX$$

- [ ] $X = (2 - A + B)^{-1}C$
- [x] $X = (2I - A + B)^{-1}C$
- [ ] $X = (2 - A + B)C$
- [ ] $X = C(2I - A + B)^{-1}$

9 Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, a solución da ecuación $XA^2 + 5A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$ é:

- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- [x] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

10 Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, a matriz **X** solución da ecuación $AXB = I$ é:

- [x] $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- [ ] $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Determinantes de orde 2 e 3 por Sarrus

37. Calcula mentalmente o seguinte determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$$

Solución:

|A| = 0 porque ten as filas opostas.

38. Calcula mentalmente o seguinte determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución:

|A| = 0 porque ten unha columna de ceros.

39. Calcula mentalmente o seguinte determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -15 \end{vmatrix}$$

Solución:

|A| = 0 porque ten dúas filas proporcionais; a 2ª é o quíntuplo da 1ª cambiada de signo.

40. Calcula mentalmente o seguinte determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución:

|A| = 0 porque ten unha columna que é combinación das outras dúas; a 3ª é a suma da 1ª e a 2ª.

41. Atopa os determinantes que se poidan calcular das seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

Non se pode calcular porque non é cadrada.

42. Atopa o determinantes que se poida calcular da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35$$

43. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$$

44. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

45. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

46. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 103$$

47. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -200$$

48. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -87$$

2. Propiedades dos determinantes

49. Sexa: $|A| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 8 \\ -7 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 219$ e $|B| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Atopa mentalmente |B|. Que propiedade utilizaches?

Solución:

$|B| = -219$

Porque o determinante |B| se obtén do |A| cambiando a 1ª e 3ª columnas.

50. Atopa o valor dos seguintes determinantes e comproba que son iguais. A 3ª fila do 2º obtívose substituíndoa pola suma do dobre da 2ª máis a 3ª.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 9$

$|B| = 9$

51. Comproba a identidade $|A| = |A^t|$ sendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 238$

$|A^t| = 238$

52. Sabendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

Calcula o seguinte determinante e enuncia as propiedades que empregues:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

No primeiro paso sacamos factor común o 3 na 1ª fila, e no segundo paso sacamos factor común o 5 na 3ª columna.

53. Se todos os elementos dunha matriz de orde 3×3 se multiplican por (-2), que relación hai entre os determinantes da matriz orixinal e da nova matriz?

Solución:

Se todos os elementos dunha matriz de orde 3×3 se multiplican por (-2), o seu determinante queda multiplicado por $(-2)^3 = -8$.

A propiedade que se empregou di que para multiplicar un determinante por un número, multiplícase o número por cada elemento dunha liña. Como se multiplican as tres liñas, elévase ao cubo.

3. Desenvolvemento dun determinante polos elementos dunha liña

54. Dada a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Atopa:

a) O menor complementario do elemento a_{12}.

b) O menor complementario do elemento a_{31}.

Solución:

a) $M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 57$ b) $M_{31} = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24$

55. Dada a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 7 & -8 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Atopa:

a) O adxunto do elemento a_{22}.

b) O adxunto do elemento a_{23}.

Solución:

a) $A_{22} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -11$ b) $A_{23} = -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3$

56. Calcula o valor do seguinte determinante polos adxuntos da liña máis sinxela:

$$\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$$

4. Matriz inversa

57. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comproba que B é a inversa de A.

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

58. Atopa a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$A_{11} = 4$ $\quad A_{21} = 2$

$A_{12} = 5$ $\quad A_{22} = 3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

59. Atopa a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$A_{11} = -3$ $\quad A_{21} = 7$

$A_{12} = -2$ $\quad A_{22} = 5$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

60. Sexa a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina se é invertible e, en caso afirmativo, calcula a matriz inversa.

Solución:

Para que unha matriz sexa invertible ten que ser cadrada e o seu determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

61. Sexa a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Determina se é invertible e, en caso afirmativo, calcula a matriz inversa.

Solución:

Para que unha matriz sexa invertible ten que ser cadrada e o seu determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Polo tanto, a matriz A non ten inversa.

62. Sexa a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determina se é invertible e, en caso afirmativo, calcula a matriz inversa.

Solución:

Para que unha matriz sexa invertible ten que ser cadrada e o seu determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Polo tanto, a matriz A non ten inversa.

63. Considera a matriz A que depende dun parámetro **k**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Para que valores de **k** ten A inversa? Xustifica a resposta.

b) Para $k = -5$, atopa a inversa de A.

Solución:

a) Como A é unha matriz cadrada, para que teña inversa o seu determinante ten que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = k + 8$$

$$k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$$

A matriz B ten inversa para $k \neq 8$.

b) Para $k = -5$ temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -7/3 & 5/3 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Ecuacións con matrices

64. Sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Razoa se posúe solución a ecuación matricial $A \cdot X = B$ e, en caso afirmativo, resólvea.

Solución:

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

65. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Atopa unha matriz X que verifique:

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

66. Determina a matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 27 & -11 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Rango dunha matriz

67. Atopa mentalmente o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 1$

Porque as dúas filas son proporcionais.

68. Atopa mentalmente o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 2$

Porque as dúas filas non son proporcionais.

69. Atopa mentalmente o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 1$

Porque as dúas columnas son proporcionais.

70. Atopa mentalmente o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$R(A) = 2$

Porque as dúas filas non son proporcionais.

71. Atopa o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$R(A) = 2$

Porque o determinante é cero e non todas as filas son proporcionais.

72. Atopa o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -477$$

$R(B) = 3$

Porque o determinante é distinto de cero.

Para ampliar

73. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

74. Atopa o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 42$$

75. Sendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ a trasposta da matriz E, calcula o determinante da matriz $E \cdot E^t$.

Solución:

$$E \cdot E^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|E \cdot E^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Porque ten as tres filas proporcionais, a 2ª é o dobre da 1ª, e a 3ª é o triplo da 1ª.

76. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Comproba que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{vmatrix} = -118$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 59$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -2$$

$|A| \cdot |B| = 59 \cdot (-2) = -118$

77. Calcula o valor do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & -10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 7 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 170 = 340$$

78. Das matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina cales teñen inversa e, nos casos nos que exista, calcula a matriz inversa e o determinante desta inversa.

Solución:

Para que unha matriz sexa invertible, ten que ser cadrada e o seu determinante distinto de cero.

a) A matriz A é cadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Polo tanto, a matriz A non é invertible.

b) A matriz B é cadrada.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad B_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O determinante da inversa é o inverso do determinante.

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = 1$$

79. Determina os valores de **x** e **y** que fan certa a seguinte igualdade:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 2x + 3 \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\}$$

$$x = -\frac{5}{4},\ y = -\frac{7}{4}$$

80. Atopa o rango da seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 2^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} = 2$$

Problemas

81. Sexa M unha matriz real cadrada de orde n que verifica a identidade $M^2 - 2M = 3I$, onde I denota a matriz identidade de orde **n**. Estuda se existe a matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1}en termos de M e I.

Solución:

$M^2 - 2M = 3I$

$\frac{1}{3}(M^2 - 2M) = I$

$M\left(\frac{1}{3}(M - 2I)\right) = I$

$M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$

Existirá M^{-1} cando o determinante de $|M - 2I|$ sexa distinto de cero, $|M - 2I| \neq 0$.

82. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula: $|ABC|$

Solución:

$$ABC = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |ABC| = -9$$

83. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cúmprese a igualdade rang(A · B) = rang (A) · rang (B)? Xustifica a resposta.

Solución:

rang(A) = 2, rang(B) = 2

rang(A) · rang(B) = 2 · 2 = 4

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 10 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

rang(A · B) = 2

Porque a 3ª fila é: –2 · 2ª. Polo tanto, non se verifica a igualdade.

Tamén se observa que:

rang(A) · rang(B) = 4

e que a matriz A · B ten de dimensión 3 × 3; logo nunca pode ter rango 4.

84. Sábese que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$$

a) Calcula o valor de:

$$\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix}$$

b) Enuncia unha das propiedades dos determinantes que usases no apartado anterior.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a - b & 6a \\ 3c - d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a - b & 2b \\ 3c - d & 2d \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a \\ d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{vmatrix} =$

$= 0 - 6\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 3 \cdot 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 0 =$

$= 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$

b) Empregáronse as propiedades:

- Un determinante pódese descompor na suma doutros dous de forma que teña todas as liñas iguais menos unha, cuxa suma sexa a do primeiro. Aplicouse 3 veces.
- Para multiplicar un determinante por un número multiplícase o número por cada elemento dunha liña. Polo tanto, nunha liña pódense sacar os factores comúns.
- Se na matriz se cambian dúas liñas paralelas, o seu determinante cambia de signo.
- Se unha matriz ten dúas liñas paralelas proporcionais, o seu determinante é cero.

85. Sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Razoa se posúe solución a ecuación matricial $A \cdot X = B$ e, en caso afirmativo, resólvea.

Solución:

Ten solución se a matriz A ten inversa, é dicir, se $|A| \neq 0$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, logo ten inversa e a ecuación matricial ten solución.

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

86. Resolve a ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$A^2 \cdot X = 2B$

$X = (A^2)^{-1}2B$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$X = (A^2)^{-1}2B$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

87. Considera as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula unha matriz X tal que: $A^2 + AX = I$

Solución:

$A^2 + AX = I$

$AX = I - A^2$

$X = A^{-1}(I - A^2)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

88. Sábese que a seguinte matriz M ten de rango 1:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

Poden determinarse **a**, **b**, **c** e **d**? Xustifica a resposta e, en caso afirmativo, atópaos.

Solución:

Se a matriz ten rango 1, a 2ª fila é proporcional á 1ª. Polo tanto:

$$a = \frac{6}{5} \text{ e } b = \frac{7}{5}$$

Se a matriz ten rango 1, tamén a 3ª fila é proporcional á 1ª. Polo tanto:

$$c = \frac{12}{5} \text{ e } d = \frac{14}{5}$$

Para profundar

89. Considérase a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula os valores de **x** para os que non existe a inversa de A.

b) Para $x = 3$, calcula, se é posible, A^{-1}.

Solución:

a) Non existe a inversa para os valores de **x** que fagan o seu determinante cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x$$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0,\ x = 1$

b) Para x = 3 temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

90. Considera a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina para que valores do parámetro λ a matriz A non ten inversa.

b) Calcula, se é posible, a matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

Solución:

a) A matriz A non ten inversa cando o seu determinante sexa cero, $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$$

$1 - \lambda^2 = 0$

$\lambda = 1,\ \lambda = -1$

b) Para $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

91. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula: $(A^tA^{-1})^2A$

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 21/4 & -5/4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2A = \begin{pmatrix} 21/2 & -5/4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

92. Sexa M unha matriz real cadrada de orde **n** que verifica a identidade $M^2 - 2M = 3I$, onde I denota a matriz identidade de orde **n**. Atopa todas as matrices da forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifiquen a identidade do enunciado.

Solución:

Sexa: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 2M = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix}$$

$$3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $M^2 - 2M = 3I$, temos que:

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + b^2 - 2a = 3 \\ 2ab - 2b = 0 \\ a^2 + b^2 - 2a = 3 \\ 2ab - 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2 + b^2 - 2a = 3 \\ ab - b = 0 \end{array}\right\}$$

$$ab - b = 0 \Rightarrow b(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Se $a = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

$a = 1,\ b = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1,\ b = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Se $b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$
$a = -1, a = 3$

$a = -1,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$a = 3,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Paso a paso

93. Atopa o determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

94. Atopa a matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

95. Atopa o rango da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 7 & -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

Formula os seguintes problemas e resólveos coa axuda de Wiris ou DERIVE:

96. Resolve a ecuación matricial:

$$\mathbf{AX + 2B = C}$$

sabendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

97. Atopa todas as matrices X que permutan con A, é dicir, tales que XA = AX, sendo A a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

98. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

99. Dadas as seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Comproba que:

a) $|A| = |A^t|$ b) $|B| = |B^t|$ c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

Problema 99

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

a)

$|A| \rightarrow 10$

$|A^T| \rightarrow 10$

b)

$|B| \rightarrow 82$

$|B^T| \rightarrow 82$

c)

$|A \cdot B| \rightarrow 820$

$|A| \cdot |B| \rightarrow 820$

Formula os seguintes problemas e resólveos coa axuda de Wiris ou DERIVE:

100. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Atopa unha matriz **P** que verifique: **PB = AP**

Solución:

Problema 100

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$P \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$

$A \cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} a+2 \cdot c & b+2 \cdot d \\ c & d \end{pmatrix}$

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} a = a + 2c \\ -b = b + 2d \\ c = c \\ -d = d \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{a=a, b=0, c=0, d=0\}\}$

A matriz é $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

101. Considéranse as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Discute, en función dos valores que poida tomar **k**, se a matriz:

a) AB ten inversa.

b) BA ten inversa.

Solución:

Problema 101

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a)

$|A \cdot B| \rightarrow 0$

$A \cdot B$ non ten inversa nunca, independente do valor de k.

a)

$|B \cdot A| \rightarrow k^2+2 \cdot k+3$

$\text{resolver}(k^2+2 \cdot k+3 = 0) \rightarrow \{\square\}$

$B \cdot A$ ten inversa sempre, independente do valor de k.

102. Atopa o rango da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

segundo os valores de **a**.

Solución:

Problema 102

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|A(a)| \rightarrow a^3-3 \cdot a+2$

$\text{resolver}(a^3 - 3 \cdot a + 2 = 0) \rightarrow \{\{a=-2\}, \{a=1\}\}$

Se $a \neq -2$, $a \neq 1$, Rango (A) = 3

Para $a = -2$

$A(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(-2)) \rightarrow 2$

Para $a = 1$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(1)) \rightarrow 1$

103. Atopa o valor de **a** que fai que a seguinte matriz non teña inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 103

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\text{resolver}(|A| = 0) \rightarrow \{\{a=10\}\}$

Para a = 10 non ten inversa

104. Calcula a matriz X tal que:

$$XA + B = C$$

Sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 104

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(C - B) \cdot A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$