2 Matrices

1. Tipos de matrices

Pensa e calcula

Escribe en forma de táboa o seguinte enunciado: «Unha familia gasta en xaneiro 400 € en comida e 150 € en vestir; en febreiro, 500 € en comida e 100 € en vestir; e en marzo, 300 € en comida e 200 € en vestir».

Solución:

	Xaneiro	Febreiro	Marzo
Comida	400	500	300
Vestir	150	100	200

Aplica a teoría

1. Escribe unha matriz fila de dimensión 1×4.

Solución:

$$A = (1, -5, 0, 7)$$

2. Escribe unha matriz columna de dimensión 2×1.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

3. Escribe unha matriz cadrada de orde 3, e marca a diagonal principal.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 6 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Completa a seguinte matriz para que sexa simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \ldots & 4 & -5 \\ \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Atopa o valor de a, b, c, d, e e f para que a seguinte matriz sexa antisimétrica ou hemisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & d & e \\ 0 & -7 & f \end{pmatrix}$$

Solución:

$a = d = f = 0$,

$b = -5$, $c = 0$, $e = 7$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Escribe unha matriz nula de dimensión 2×3.

Solución:

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Escribe unha matriz diagonal de orde 2.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

8. Escribe unha matriz escalar de orde 3 na que o elemento $a_{22} = -6$.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

9. Escribe unha matriz unidade de orde 3.

Solución:

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Escribe unha matriz triangular superior de orde 2 e a súa trasposta. Como é a trasposta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

A^t é unha matriz triangular inferior.

11. Escribe unha matriz triangular inferior de orde 3 e a súa trasposta. Como é a trasposta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A^t é unha matriz triangular superior.

12. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 4x - 7y - z = 9 \end{cases}$$

a) Escribe a matriz C dos coeficientes das incógnitas. De que dimensión é?

b) Escribe unha matriz columna X coas incógnitas. De que dimensión é?

c) Escribe unha matriz columna B cos termos independentes. De que dimensión é?

Solución:

a) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ é de dimensión 2×3.

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ é de dimensión 3×1.

c) $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ é de dimensión 2×1.

2. Operacións con matrices

Pensa e calcula

Atopa mentalmente o produto escalar dos seguintes vectores: a) $(3, 4)\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; b) $(2, -3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $15 + 24 = 39$

b) $6 - 6 = 0$

Aplica a teoría

13. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) A + B b) A – B c) 5A d) 2A – 3B

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

c) $5A = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$

d) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

14. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcula, dos seguintes produtos, os que sexan posibles, e dos que non sexan posibles, razoa por que non se poden multiplicar:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}$

Pódense multiplicar porque o número de columnas da 1ª coincide co número de filas da 2ª.

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}6 & -7\\ 26 & 8\end{pmatrix}$$

b) $B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}$

Pódense multiplicar porque o número de columnas da 1ª coincide co número de filas da 2ª.

$$B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}-7 & -13 & 12\\ 9 & 1 & -4\\ -25 & -15 & 20\end{pmatrix}$$

15. Dadas as matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}$

Calcula $A\cdot B$ e $B\cdot A$. Do resultado obtido, que propiedade moi elemental se probou que non se verifica?

Solución:

$A\cdot B=\begin{pmatrix}12 & -5\\ -4 & 47\end{pmatrix}$ $B\cdot A=\begin{pmatrix}40 & 8\\ 27 & 19\end{pmatrix}$

Non se verifica a propiedade conmutativa do produto.

16. Dada a matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Calcula: A^2 e A^3

Solución:

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 9\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}1 & -26\\ 0 & 27\end{pmatrix}$

3. Aplicacións das matrices á resolución de problemas

Pensa e calcula

Unha empresa de electrodomésticos ten tres fábricas: unha en Madrid, outra en Málaga e outra en Vigo. A produción semanal vén dada pola seguinte matriz:

$$A=\begin{array}{r}\\ \text{Frigoríficos}\\ \text{Lavadoras}\\ \text{Lavalouzas}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{Madrid} & \text{Málaga} & \text{Vigo}\end{array}\\ \begin{pmatrix}150 & 140 & 130\\ 175 & 155 & 125\\ 160 & 140 & 100\end{pmatrix}\end{array}$$

a) Interpreta o elemento a_{12} da matriz **A**.

b) Interpreta o elemento a_{21} da matriz **A**.

c) Interpreta o elemento a_{33} da matriz **A**.

Solución:

a) O elemento a_{12}, que é 140, indica o número de frigoríficos que se fabrican en Málaga.

b) O elemento a_{21}, que é 175, indica o número de lavadoras que se fabrican en Madrid.

c) O elemento a_{33}, que é 100, indica o número de lavalouzas que se fabrican en Vigo.

Aplica a teoría

17. Os consumos anuais de auga mineral, pan e leite de tres familias veñen expresados na matriz A. A evolución dos prezos destes produtos do ano 2000 ao 2003 vén reflectida na matriz B, expresada en céntimos de euro.

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{pan} & \text{auga} & \text{leite} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{pan} \\ \text{auga} \\ \text{leite} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2000 & 2001 & 2002 & 2003 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Atopa, se é posible, $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e indica que información proporciona o produto matricial.

b) Que información nos dá o elemento c_{34} da matriz produto?

Solución:

a)
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 106\,150 & 111\,300 & 113\,250 & 122\,750 \\ 108\,580 & 113\,940 & 115\,800 & 125\,450 \\ 73\,000 & 76\,200 & 78\,000 & 84\,500 \end{pmatrix}$$

Cada valor do produto proporciona os gastos de cada familia en pan, auga e leite en cada un dos anos 2000, 2001, 2002 e 2003.

O produto $B_{3 \times 4} \cdot A_{3 \times 3}$ non se pode realizar porque o número de columnas de B non coincide co de filas de A.

b) O elemento c_{34} da matriz produto é o consumo da familia 3, F_3, durante o ano 2003, que son 845 €, xa que todos os valores están en céntimos de euro.

18. Un construtor pode adquirir ladrillos, tellas, madeira e cemento de tres provedores: P, Q e R. Os prezos de cada provedor por paquete de materiais veñen dados en miles de euros pola matriz:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & T & M & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

O construtor ten que comezar tres obras. Necesita:

a) Primeira obra: 24 paquetes de ladrillo, 5 de tellas, 12 de madeira e 18 de cemento.

b) Segunda obra: 20 paquetes de ladrillo, 7 de tellas, 15 de madeira e 20 de cemento.

c) Terceira obra: 20 paquetes de ladrillo, 4 de tellas, 15 de madeira e 15 de cemento.

O construtor quere adquirir todos os materiais de cada obra ao mesmo provedor. Que provedor é o máis económico para cada obra?

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 8 \\ 7 & 14 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 20 & 20 \\ 5 & 7 & 4 \\ 12 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 437 & 461 & 392 \\ 432 & 469 & 393 \\ 436 & 468 & 391 \end{pmatrix}$$

Debe elixir:

Para a primeira obra, o provedor Q.

Para a segunda obra, o provedor P.

Para a terceira obra, o provedor R.

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Nunha matriz hemisimétrica ou antisimétrica, os elementos da diagonal principall:

- ☐ Son todos uns.
- ☐ Poden ser calquera.
- ☐ Son uns cero e outros un.
- ☒ Son todos cero.

2 Para poder multiplicar dúas matrices:

- ☐ A primeira deberá ter tantas filas como columnas a segunda.
- ☒ A primeira deberá ter tantas columnas como filas a segunda.
- ☐ Teñen que ser cadradas.
- ☐ Dúas matrices pódense multiplicar sempre.

3 Sexan A e B matrices tales que se poida multiplicar $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

- ☒ Unhas veces $A \cdot B = B \cdot A$ e outras $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- ☐ Sempre $A \cdot B = B \cdot A$.
- ☐ Sempre $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- ☐ Non é certa ningunha das anteriores.

4 Sexan A, B e C matrices tal que $A \cdot B = A \cdot C$.

- ☐ Sempre $B = C$.
- ☒ Unhas veces $B = C$, e outras, $B \neq C$.
- ☐ Nunca $B = C$.
- ☐ Non é certa ningunha das anteriores.

5 Sexan A e B as matrices seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcula: $A \cdot B$

- ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6 Calcula o produto:

$$(1 \quad 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☒ (17)
- ☐ (11)

7 Calcula o produto:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \quad 3)$$

- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$
- ☐ (17)
- ☐ (11)

8 Calcula o produto $A \cdot B$, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}$$

- ☐ $\begin{pmatrix} x & -y \\ x & m \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} x - y \\ x - my \end{pmatrix}$
- ☐ $(x^2 - my + 1)$
- ☐ $(x - xy \quad x - my)$

9 Calcula o produto $D \cdot E$, sendo:

$$D = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}, \ E = (1 \quad 4)$$

- ☐ $\begin{pmatrix} 3x \\ 16x \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 3x & 12x \\ 4x & 16x \end{pmatrix}$
- ☐ $(3x \quad 16x)$
- ☐ $(19x)$

10 Calcula o produto $E \cdot D$, sendo:

$$D = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}, \ E = (1 \quad 4)$$

- ☐ $\begin{pmatrix} 3x & 12x \\ 4x & 16x \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 3x \\ 16x \end{pmatrix}$
- ☐ $(3x \quad 16x)$
- ☒ $(19x)$

Tipos de matrices

19. Escribe unha matriz fila de dimensión 1×3.

Solución:

$$A = (2 \quad -8 \quad -9)$$

20. Escribe unha columna de dimensión 3×1.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

21. Escribe unha matriz cadrada de orde 2 e marca a diagonal principal.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

22. Atopa o valor de **a**, **b** e **c** para que a seguinte matriz sexa simétrica:

$$\begin{pmatrix} 3 & a & b \\ -2 & -7 & c \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$a = -2, b = 0, c = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

23. Completa a seguinte matriz para que sexa antisimétrica ou hemisimétrica:

$$\begin{pmatrix} \dots & 5 & -1 \\ \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

24. Escribe unha matriz nula de dimensión 3×2.

Solución:

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

25. Escribe unha matriz diagonal de orde 3.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

26. Escribe unha matriz escalar de orde 2 na que o elemento $a_{11} = 5$.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

27. Escribe unha matriz unidade de orde 4.

Solución:

$$I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

28. Escribe unha matriz triangular superior de orde 3 e a súa trasposta. Como é a trasposta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

A^t é unha matriz triangular inferior.

29. Escribe unha matriz triangular inferior de orde 2 e a súa trasposta. Como é a trasposta?

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

A^t é unha matriz triangular superior.

30. Dado o sistema linear:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 7y + 6z &= 8 \\ z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

a) Escribe a matriz C dos coeficientes das incógnitas. De que dimensión é?, de que tipo é?

b) Escribe unha matriz columna X coas incógnitas. De que dimensión é?

c) Escribe unha matriz columna B cos termos independentes. De que dimensión é?

Solución:

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é de dimensión 3×3.

É unha matriz triangular superior.

b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ é de dimensión 3×1.

c) $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ é de dimensión 3×1.

Operacións con matrices

31. Dadas as seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) A + B b) A – B c) – 3A d) – 5A + 2B

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A - B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

c) $-3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & -3 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$ d) $-5A + 2B = \begin{pmatrix} -22 & 15 \\ -2 & 3 \\ 9 & -31 \end{pmatrix}$

32. Sexa a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Atopa a matriz oposta –A e comproba que –A + A é a matriz nula de dimensión 2 × 2.

Solución:

$-A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$-A + A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

33. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula, dos seguintes produtos, os que sexan posibles, e respecto aos que non sexan posibles, razoa por que non se poden multiplicar:

a) A · B b) B · A

Solución:

a) $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3}$

Pódense multiplicar porque o número de columnas da 1ª coincide co número de filas da 2ª.

$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -9 & 6 & -7 \\ -30 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) $B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2}$

Pódense multiplicar porque o número de columnas da 1ª coincide co número de filas da 2ª.

$B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}$

34. Dadas as seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula A · C e B · C. Do resultado obtido, que propiedade moi elemental se probou que non se verifica?

Solución:

$A \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$ $B \cdot C = \begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$

O produto de matrices non é simplificable:

Se A · C = B · C non se deduce que A = B.

35. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula: A^2

Solución:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3. Aplicacións das matrices á resolución de problemas

36. Nun centro escolar, o 80% dos estudantes de 4º de ESO pasa a bacharelato, o 70% dos estudantes de 1º de bacharelato pasa a 2º, o 65% dos estudantes de 2º aproba o curso. Repite curso o 20% dos estudantes de 1º e o 30% dos estudantes de 2º. Neste centro non se admiten estudantes novos para bacharelato e todos os que aproban o curso pasan ao curso seguinte.

a) Escribe a matriz de dimensión 3 × 3 que amosa a evolución entre cursos.

b) Nun certo curso había 150 estudantes en 4º de ESO, 110 estudantes en 1º de bacharelato e 100 estudantes en 2º de bacharelato. Cal será a distribución de estudantes no curso seguinte?

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}65 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}65 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ 107 \\ 65 \end{pmatrix}$

37. Un industrial produce dous tipos de parafusos: planos (P) e de estrela (E). De cada tipo fai tres modelos: A, B e C. A seguinte matriz dá a produción semanal de parafusos:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2\,000 & 2\,500 & 3\,000 \\ 2\,500 & 3\,500 & 4\,000 \end{pmatrix} \end{array}$$

A porcentaxe de parafusos defectuosos do tipo A é dun 5%, do tipo B é dun 4% e do tipo C é dun 2%.

Calcula o número de parafusos planos e de estrela que non sexan defectuosos.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2\,000 & 2\,500 & 3\,000 \\ 2\,500 & 3\,500 & 4\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 \\ 0{,}96 \\ 0{,}98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,240 \\ 9\,655 \end{pmatrix}$$

Parafusos planos non defectuosos: 7 240

Parafusos de estrela non defectuosos: 9 655

Para ampliar

38. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calcula, dos seguintes produtos, os que sexan posibles, e respecto dos que non sexan posibles, razoa por que non se poden multiplicar:

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

Solución:

a) $A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1}$

Pódense multiplicar porque o número de columnas da 1ª coincide co número de filas da 2ª.

$$A_{1 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = (-30)$$

b) $B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3}$

Pódense multiplicar porque o número de columnas da 1ª coincide co número de filas da 2ª.

$$B_{3 \times 1} \cdot A_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -20 \\ -2 & -3 & 5 \\ 14 & 21 & -35 \end{pmatrix}$$

39. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Comproba que: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -23 & 1 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

40. Sexa A unha matriz de 3 filas e 4 columnas (isto é, de dimensión 3×4) e C unha matriz 2×3. Cantas filas e columnas ten B sabendo que existe a matriz $A \cdot B \cdot C$?, que dimensión ten $A \cdot B \cdot C$?

Solución:

$A_{3 \times 4} \cdot B_{n \times p} \cdot C_{2 \times 3}$

B deberá ter tantas filas como columnas teña A, e o mesmo número de columnas que filas teña C; polo tanto, $n = 4$ filas e $p = 2$ columnas.

O resultado $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} \cdot C_{2 \times 3}$ ten tantas filas como A e tantas columnas como C; logo é de dimensión 3×3.

41. Sexa D unha matriz tal que ao multiplicala pola súa trasposta dá unha matriz de dimensión 1×1 e o produto da trasposta de D por D é 3×3. Cantas filas e columnas ten D?

Solución:

$D_{n \times p} \cdot D^t_{p \times n} = M_{n \times n}$

Como o resultado é de dimensión: 1×1, $n = 1$

$D^t_{p \times n} \cdot D_{n \times p} = N_{p \times p}$

Como o resultado é de dimensión: 3×3, $p = 3$

D ten unha fila e tres columnas.

42. Unha empresa produce tres tipos de artigos, A, B e C. Os prezos de custo por unidade son 30 €, 46 € e 75 €, respectivamente. Os correspondentes prezos de venda dunha unidade de cada artigo son 50 €, 80 € e 150 €, respectivamente. O número de unidades vendidas anualmente é de 2 000, 1 500 e 800, respectivamente.

Atopa:

a) A matriz fila de custos por unidade.

b) A matriz fila de vendas por unidade.

c) A matriz fila de beneficios por unidade.

d) A matriz columna de unidades vendidas.

e) O beneficio obtido.

Solución:

a) $C = (30 \quad 46 \quad 75)$

b) $V = (50 \quad 80 \quad 150)$

c) $B = V - C = (20 \quad 34 \quad 75)$

d) $U = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,500 \\ 800 \end{pmatrix}$

e) $(20 \quad 34 \quad 75) \cdot \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,500 \\ 800 \end{pmatrix} = (151\,000)$

O beneficio obtido é de 151 000 €.

43. Unha fábrica produce tres tipos de produtos, A, B e C, que distribúe a catro clientes. No mes de xaneiro o primeiro cliente comprou 9 unidades do produto A, 5 de B e 2 de C; o segundo cliente, 3 unidades de A, 8 de B e ningunha de C; o terceiro cliente non comprou nada e o cuarto cliente comprou 6 de A, 7 de B e 1 de C.

No mes de febreiro, o primeiro cliente e o segundo duplicaron o número de unidades que compraran en xaneiro; o terceiro cliente comprou 4 unidades de cada artigo, e o cuarto cliente non fixo ningún pedido.

a) Constrúe a matriz correspondente ás vendas de xaneiro.

b) Constrúe a matriz correspondente ás vendas de febreiro.

c) Atopa a matriz correspondente ás vendas de xaneiro e febreiro.

d) Se os prezos dos artigos son 100 €, 80 € e 90 €, respectivamente, calcula o que factura a fábrica polos seus pedidos nos meses de xaneiro e febreiro.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 27 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,440 \\ 2\,820 \\ 1\,080 \\ 1\,250 \end{pmatrix}$

Problemas

44. Sexa a matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula a matriz: $(A - 2I)^2$

Solución:

$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

45. Considera a matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula A^tA e AA^t, onde A^t denota a matriz trasposta de A.

Solución:

$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

46. Sexan as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comproba que: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (t indica trasposta)

Solución:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

47. Dada a matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E sexa I a matriz identidade de orde 3 e O a matriz nula de orde 3, comproba que:

$$A^2 - A - 2I = O$$

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^2 - A - 2I = 0$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

48. Nun centro impártense os cursos 1°, 2° e 3° de certas ensinanzas. Os profesores teñen asignado semanalmente un número de horas de clase, titorías e gardas que deben cubrir de acordo coa seguinte matriz:

$$M = \begin{array}{c} \\ 1° \\ 2° \\ 3° \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{clase} & \text{gardas} & \text{titorías} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

O centro paga cada hora de clase a 12 €, cada hora de garda a 3 € e cada hora de titoría a 6 €, segundo o vector:

$$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

O centro dispón de 5 profesoras e profesores para primeiro curso, 4 para segundo e 6 para terceiro, representados polo vector:

$$P = (5 \quad 4 \quad 6)$$

Calcula cada un dos seguintes produtos de matrices e interpreta os resultados.

a) PM b) MC c) PMC

Solución:

a) $PM = (5 \quad 4 \quad 6)\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (304 \quad 55 \quad 47)$

Son o número de horas totais de clase, gardas e titorías.

b) $MC = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 279 \end{pmatrix}$

É o que lle custa ao colexio o ensino de cada un dos cursos.

c) $PMC = (5 \quad 4 \quad 6)\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\,095$

É o que lle custa en total o ensino ao colexio.

49. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula: $A^2 - 4A + 4I_3$

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

50. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula $3AA^t - 2I$, sendo I a matriz unidade de orde 2.

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t = 3\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3AA^t - 2I = \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

51. Unha fábrica produce dous modelos de acumuladores de calor, G e P, en tres terminacións: normal, luxo e especial. Do modelo G, produce 500 unidades normais, 300 unidades de luxo e 200 especiais. Do modelo P, produce 400 unidades normais, 200 unidades de luxo e 100 especiais. A terminación normal necesita 20 horas de fabricación de pezas e 1,5 horas de montaxe. A terminación de luxo necesita 25 horas de fabricación e 2 horas de montaxe, e a terminación especial necesita 30 horas de fabricación e 2,5 horas de montaxe.

a) Representa en dúas matrices a información dada.

b) Escribe unha matriz que exprese as horas de fabricación e de montaxe empregadas para cada un dos modelos.

c) Se cada hora de fabricación se paga a 15 € e cada hora de montaxe a 18 €, escribe unha matriz que exprese o custo total dos acumuladores G e P.

Solución:

a)
$$\begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Normal} & \text{Luxo} & \text{Especial} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Normal} \\ \text{Luxo} \\ \text{Especial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Fabricación} & \text{Montaxe} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 1{,}5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 400 & 200 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 1{,}5 \\ 25 & 2 \\ 30 & 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 23\,500 & 1\,850 \\ 16\,000 & 1\,250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 385\,800 \\ 262\,500 \end{pmatrix}$$

52. Unha fábrica de mobles fai mesas (M), cadeiras (C), e armarios (A), e cada un deles en tres modelos: económico (E), normal (N) e luxo (L). Cada mes produce de mesas, 50 E, 40 N e 30 L; de cadeiras, 200 E, 150 N e 100 L; e de armarios, 40 E, 30 N e 20 L.

a) Representa esta información nunha matriz.

b) Calcula a matriz que dá a produción dun ano.

Solución:

a)
$$\begin{array}{c} \\ \text{Mesas} \\ \text{Cadeiras} \\ \text{Armarios} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & N & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$12\begin{pmatrix} 50 & 40 & 30 \\ 200 & 150 & 100 \\ 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 480 & 360 \\ 2\,400 & 1\,800 & 1\,200 \\ 480 & 360 & 240 \end{pmatrix}$$

Para profundar

53. Sexa a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula a matriz B tal que $A + B = AA^T$.

Solución:

$A + B = AA^T$

$B = AA^T - A$

$B = A(A^T - I)$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

54. Considera a matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Se I é a matriz identidade 3×3 e O é a matriz nula 3×3, proba que $A^3 + I = O$.

b) Calcula: A^{10}

Solución:

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

b) Se $A^3 + I_{3 \times 3} = O \Rightarrow A^3 = -I_{3 \times 3} \Rightarrow A^6 = I_{3 \times 3}$

A é cíclica de período 6.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \cline{2-2} \mathbf{4} & 1 \end{array}$$

$$A^{10} = A^4 = A^3 \cdot A = -I_{3 \times 3} \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

55. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Atopa o valor de **a** para que se cumpra a igualdade:

$$A^2 + 2A + I = O$$

se I é a matriz identidade de orde 3 e O a matriz nula de orde 3.

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2a + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Paso a paso

56. Dadas as seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Atopa:

$$A + B;\ A - B;\ 2A - 3B;\ A \cdot B^t$$

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

57. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula: A^2, A^3, A^{257}

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

58. Sexa a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Proba que:

$$A^2 - 2A + I = 0$$

onde **I** é a matriz identidade e **O** é unha matriz con todos os elementos iguais a cero.

b) Calcula: A^3

Solución:
Resolto no libro do alumnado.

59. **Internet**. Abre: **www.xerais.es** e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Practica

60. Calcula A · B, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Exercicio 87

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 6 & 9 \\ 35 & 12 & 19 \\ 57 & 18 & 29 \\ 79 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

61. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcula A · B, B · A e comproba que o produto de matrices non é conmutativo.

Solución:

Exercicio 88

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$; polo tanto, o produto de matrices non é conmutativo.

62. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Comproba que $A \cdot B = A \cdot C$ e, non obstante: $B \neq C$

Solución:

Exercicio 89

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$A \cdot C \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = A \cdot C$ e, non obstante, $B \neq C$

63. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

Comproba que $A \cdot B = O_{2 \times 2}$ e, non obstante: $A \neq O_{2 \times 2}$ e $B \neq O_{2 \times 2}$

Solución:

Exercicio 90

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

$A \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \neq O_{2x2}$ e $B \neq O_{2x2}$

64. Calcula A^2, A^3 e A^4, sendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Exercicio 64

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

65. Dadas as seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A + B$ b) $A - B$

c) $2A - 3B$ d) $A^t \cdot B$

Solución:

Exercicio 92

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A - B \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

$2A - 3B \rightarrow \begin{pmatrix} 23 & -30 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$

$A^T \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} -23 & 8 \\ 1 & -24 \end{pmatrix}$

66. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula: A^2, A^3 e A^4

Solución:

Exercicio 66

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

67. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

$$A^2 - 4A + 4I$$

Solución:

Exercicio 94

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

68. Dada a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula: A^2 e A^3

Solución:

Exercicio 68

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$