Volúmenes de cuerpos geométricos

TEORÍA

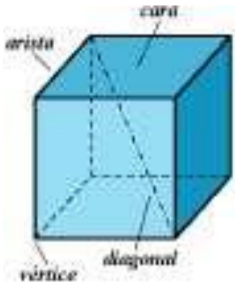
Cuerpos geométricos

En nuestro entorno observamos continuamente objetos de diversas formas: pelotas, botes, cajas, pirámides, etc. Todos estos objetos son cuerpos geométricos. A lo largo de todos los tiempos se han utilizado estos cuerpos en el arte y en la arquitectura.

Cuerpos geométricos son porciones de espacio limitadas por superficies planas o curva

Poliedros

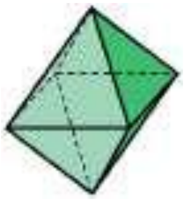
Un poliedro es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.



Los principales elementos de un poliedro son:

- Caras o polígonos que lo limitan.
- Aristas o lados de las caras.
- Vértices o puntos de corte de las aristas.
- Diagonales o segmentos que unen dos vértices de distintas caras.

Dentro de ellos, haremos la siguiente distinción: diremos que un poliedro es convexo si todas sus caras se pueden apoyar en un plano; cuando no ocurre así, se dice que el poliedro es cóncavo.



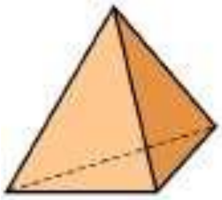
Poliedro convexo

Poliedro cóncavo

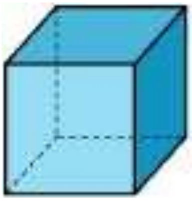
Poliedros regulares

Los poliedros regulares son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras.

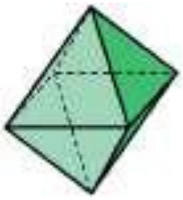
Sólo existen cinco poliedros regulares. A continuación te mostramos cada uno de ellos con su definición:



Tetraedro
4 caras
triángulos equiláteros



Hexaedro o cubo
6 caras
cuadrados



Octaedro
8 caras
triángulos equiláteros

Dodecaedro
12 caras
pentágonos

Icosaedro
20 caras
triángulos equiláteros

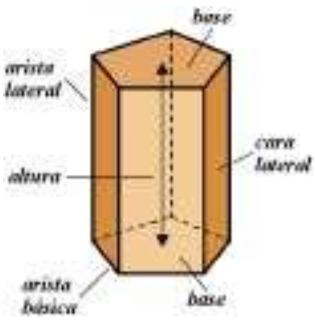
Prismas y pirámides

Los primas son poliedros cuyas bases, paralelas entre sí, son dos polígonos iguales y sus caras laterales son paralelogramos.

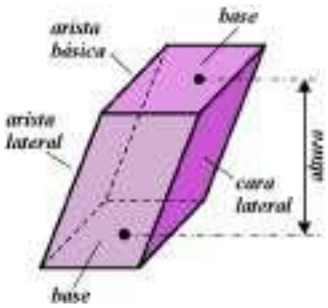
Un elemento característico de los primas es la altura o segmento perpendicular a sus bases.

Podemos clasificar los prismas de la siguiente manera:

- Por los polígonos de sus bases pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.
- Rectos y oblicuos, según que las aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a las bases.
- Regulares o irregulares. Son regulares aquellos prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares; y son irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.
- Paralelepípedos son prismas cuyas bases son paralelogramos, luego sus seis caras son paralelogramos. Los paralelepípedos rectos se denominan ortoedros, y son el ortoedro (o paralelepípedo rectángulo) y el cubo (ohexaedro).

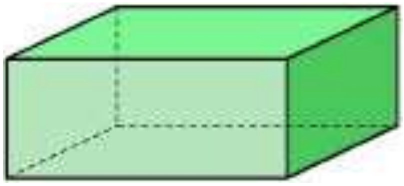


Prisma pentagonal recto (regular)
Base: pentágono regular

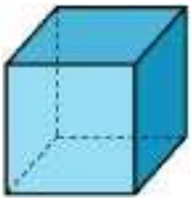


Prisma cuadrangular oblicuo (irregular)
Base: cuadrado

Paralelepípedos:



Ortoedro o paralelepípedo rectángulo
Todas sus caras son rectángulos



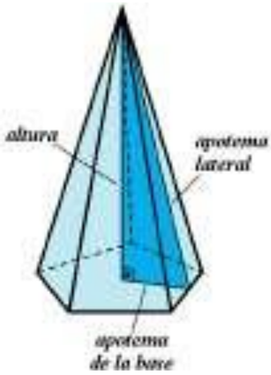
Cubo o hexaedro
Todas sus caras son cuadrados

Las pirámides son poliedros que tienen por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que con-curren en un vértice.

Los elementos más característicos de la pirámide, además de los generales de los poliedros, son:

- Altura, h, o distancia del vértice al plano que contiene la base.
- Apotema lateral, ah es la altura de sus caras laterales.
- Apotema de la base, ab, es la apotema de la base.

Estos tres elementos forman un triángulo rectángulo que nos resultará útil en los cálculos de áreas y volúmenes.

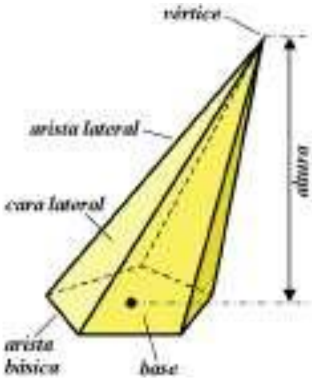


Pirámide pentagonal recta (regular)

Podemos clasificar las pirámides de la siguiente manera:

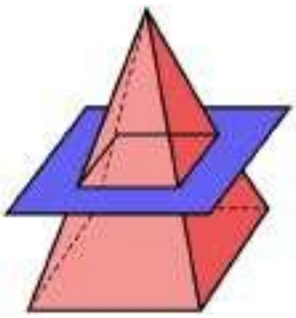
Por los polígonos de sus bases pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

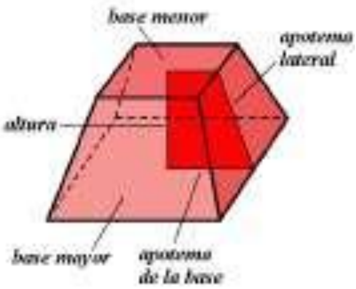
- Rectas y oblicuas. Las pirámides rectas son aquellas que tienen por caras laterales triángulos isósceles. Si alguna cara lateral es un triángulo escaleno, la pirámide es oblicua.
- Regulares o irregulares. Son regulares aquellas pirámides rectas que tieen por base un polígono regular; y son irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.



Pirámide pentagonal oblicua (irregular)

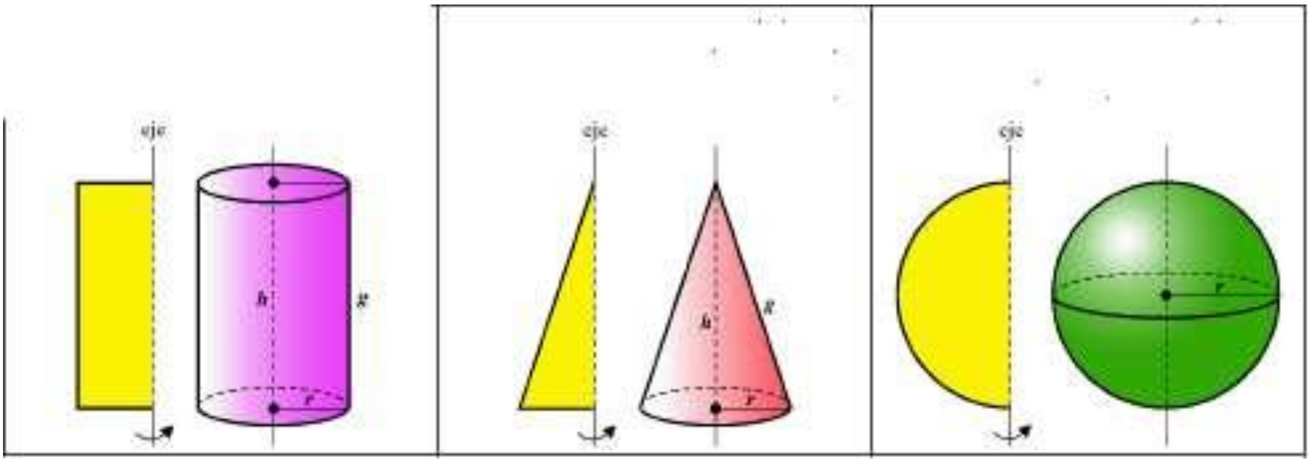
El tronco de pirámide es la parte de pirámide comprendida entre la base y la sección producida por un plano paralelo a la base. La altura del tronco es la distancia entre las bases y la apotema es la altura de una cara lateral (trapecio





Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera

Los cuerpos redondos de revolución se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje. Los tres cuerpos de revolución más sencillos son el cilindro, el cono y la esfera.

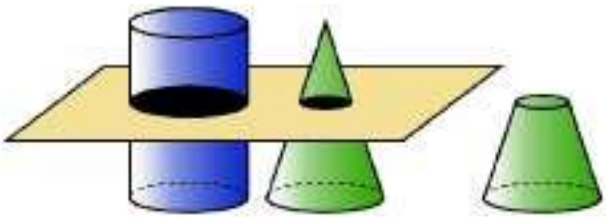


Detallamos a continuación los elementos más importantes de estos cuerpos.

Cilindro	*Cono*	*Esfera*
• *Altura (h)* es el segmento que une el centro de las dos bases. Es perpendicular a ambas bases. • *Radio (r)* es el radio de cada uno de los círculos que forman sus bases. • *Generatriz (g)* es el segmento que genera el cilindro. Su medida coincide con la de la altura.	• *Altura (h)* es el segmento que une el vértice y el centro de la base. Es perpendicular a la base. • *Radio (r)* es el radio del círculo que forma su base. • *Generatriz (g)* es el segmento que genera el cono.	• *Radio (r)* es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la superficie que limita la esfera. • *Diámetro (d)* es el segmento que une dos puntos de la superficie es-férica pasando por el centro.

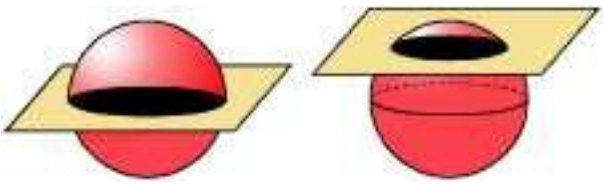
Secciones de los cuerpos redondos

Cuando se corta un cilindro o un cono por un plano paralelo a la base, la sección que se obtiene en cada caso es un círculo. En el caso del cilindro, el círculo que se obtiene es igual que el de la base. Al cortar un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un cono menor y un tronco de cono que es la parte de cono comprendida entre la base y la sección producida por el plano.



Secciones circular es *Tronco de cono*

Al cortar una esfera por un plano se obtiene siempre un círculo. Si el plano pasa por el centro de la esfera se obtiene un círculo máximo (cuyo radio es el radio de la esfera). Si el plano no pasa por el centro se obtiene un círculo menor.

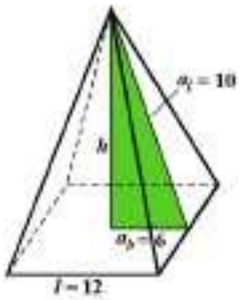


Círculo máximo *Círculo menor*

Relaciones métricas en pirámides, conos y esferas

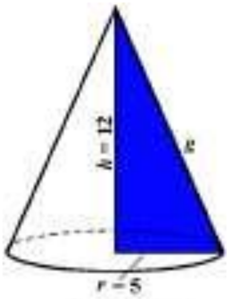
El teorema de Pitágoras permite relacionar la altura (h) de la pirámide con la apotema lateral (al) y con la apotema de la base (ab). También relacionamos por este teorema los elementos de los conos: altura (h), radio (r) y generatriz (g).

En las siguientes figuras se calcula un lado de un triángulo rectángulo en pirámides, conos, troncos de cono y en esferas, cuando se conocen los otros dos lados del triángulo (unidades en centímetros).



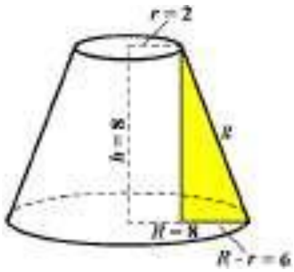
$$a_l^2 = h^2 + a_b^2$$
$$h = \sqrt{a_l^2 - a_b^2}$$
$$h = \sqrt{100 - 36} = 8$$

Cálculo de *g*



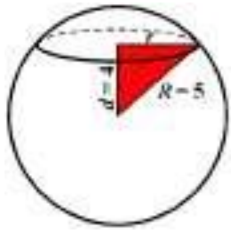
$$g^2 = r^2 + h^2$$
$$g = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$g = \sqrt{25 + 144} = 13$$

Cálculo de *g*



$$g^2=(R-r)^2+h^2$$

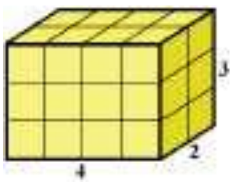
Cálculo de *r*



$$R^2 = d^2 + r^2$$
$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$
$$r = \sqrt{25 - 16} = 3$$

Volumen de prismas y cilindros

Volumen del ortoedro

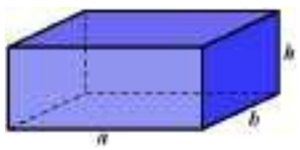


El volumen de un cuerpo expresa el número de veces que contiene al cubo unidad. Así decimos que el volumen del ortoedro del margen es:

V = 4 • 2 • 3 = 24 u3 (unidades cúbicas)

Ya conocemos, por cursos anteriores, que el volumen del ortoedro se obtiene multiplicando sus tres dimensiones:

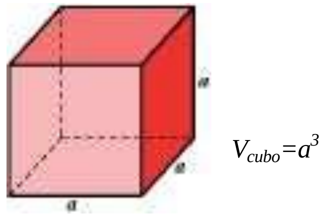
Volumen del ortoedro = ancho • largo • alto Como el ancho por el largo es el área de la base (AB), resulta: Volumen del ortoedro = área de la base • altura = AB * h



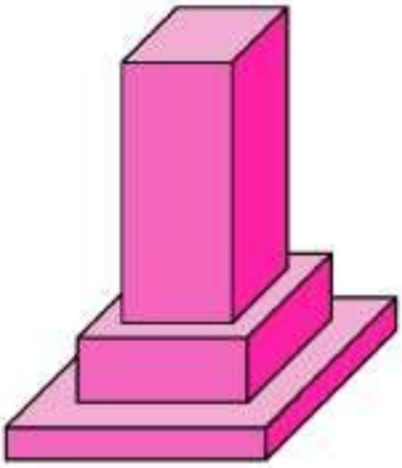
*V = a * b * h*

En el caso particular del cubo, sus tres dimensiones son iguales, con lo que:

Volumen del cubo = a * a * a = a3



Ejemplo: Calcula el volumen de piedra que encierra el monolito de la figura cuyas piezas tienen bases cuadradas de 40, 30 y 20 dm de lado, respectivamente, y sus alturas son 5, 10 y 50 dm.



El monolito está formado por tres ortoedros. Su volumen será la suma de los volúmenes de éstos.

Hallemos el volumen de cada uno de ellos:

Volumen (1) = 402 • 5 = 8.000 dm3

Volumen (2) = 302 • 10 = 9.000 dm3

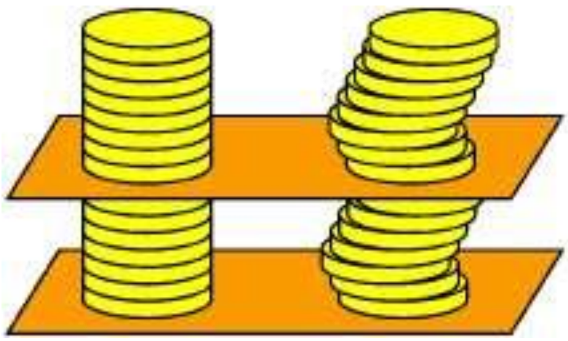
Volumen (3) = 202 • 50 = 20.000 dm3

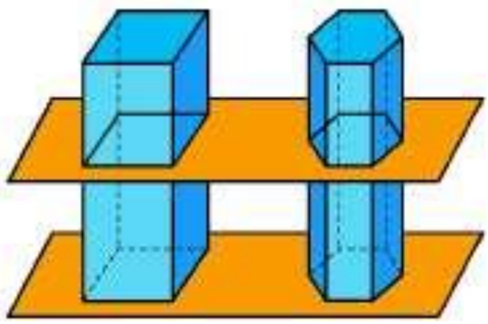
El volumen de piedra es, por tanto, 37.000 dm3, es decir, 37 m

Principio de Cavalieri

En la siguiente figura se observan dos montones de fichas que tienen la misma área de la base (el área de una ficha) y la misma altura, pero tienen forma diferente. En la figura de la derecha hay dos prismas que tienen la misma área de la base y la misma altura.

En los dos casos (fichas y prismas), las secciones que resultan al cortar por planos paralelos a la base son iguales y, por tanto, tienen igual área.





Las tres condiciones que cumplen los dos montones de fichas y los dos prismas (tener la base de la misma área, tener la misma altura y tener la misma área las secciones producidas por planos paralelos a la base) permiten afirmar que los dos montones de fichas y los dos prismas tienen el mismo volumen.

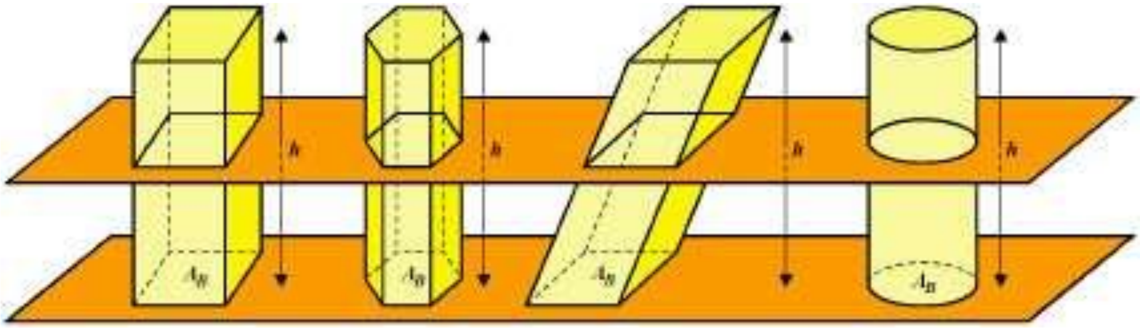
Principio de Cavalieri

Si dos o más cuerpos de igual área de la base y la misma altura se cortan por planos paralelos a la base, y las secciones producidas por cada plano en esos cuerpos tienen la misma área, entonces esos cuerpos tienen el mismo volumen.

Volumen de prismas y cilindros

Vamos a calcular el volumen del prisma y el del cilindro a partir del volumen del ortoedro que ya conocemos. Para ello, consideremos un ortoedro en el que el área de la base es AB y la altura es h, luego su volumen es V=AB * h.

Supongamos ahora que los dos prismas de la figura y el cilindro tienen la misma área de la base (AB) y la misma altura (h) que el ortoedro.



Como los prismas y el cilindro tienen las bases de igual área y tienen la misma altura, las secciones producidas por un plano paralelo a las bases a la misma altura tienen igual área. Por el principio de Cavalieri resulta que los prismas y el cilindro tienen el mismo volumen que el ortoedro.

Como el volumen del ortoedro es igual al área de la base (AB) por la altura (h) se tiene:

Vprisma = área de la base • altura = AB * h

Vcilindro = área de la base • altura = AB * h

Para el cilindro de radio r y altura h, se tiene en particular:

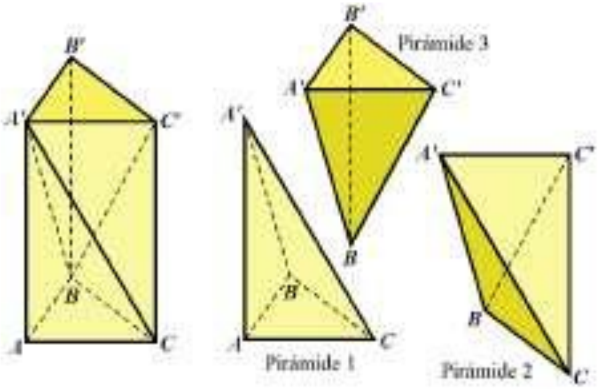
Vcilindro = AB * h = πr^2 h

El volumen de un prisma o de un cilindro es igual al área de la base por la altura

Volumen de pirámides, conos y esfera

Volumen de pirámides

En la siguiente figura se observa la descomposición de un prisma triangular en tres pirámides triangulares.



Comprobemos que las pirámides 1, 2 y 3 que resultan de la descomposición tienen el mismo volumen:

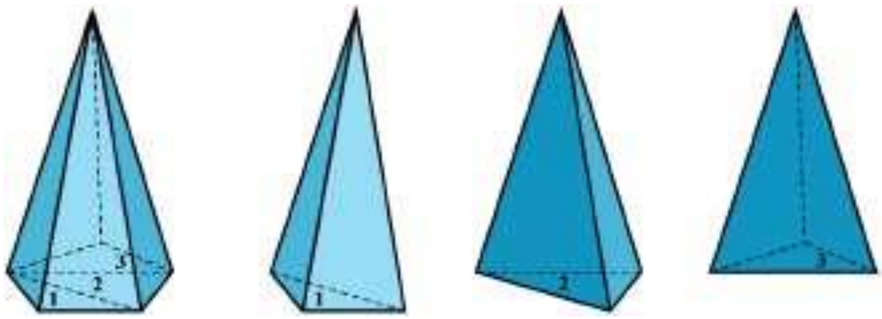
Las pirámides 1 y 3 tienen el mismo volumen pues sus respectivas bases ABC y A'B'C’ son iguales (bases del prisma) y sus respectivas alturas coinciden con la altura del prisma.

Las pirámides 3 y 2 también tienen el mismo volumen ya que sus respectivas bases BC 'B' y BC 'C son iguales y lo mismo sus alturas correspondientes al vértice A '.

Por tanto, el volumen de cada una de estas pirámides es el mismo y es la tercera parte del volumen del prisma. En consecuencia, el volumen de una pirámide triangular es igual es igual a un tercio del volumen del prisma de la misma base y altura.

$$\boxed{V_{\textit{pirámide triangular}} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h}$$

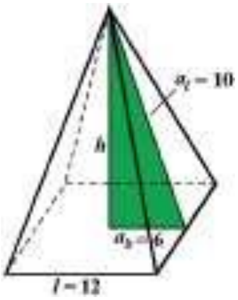
No obstante, cualquier pirámide se puede descomponer en pirámides triangulares. En la siguiente figura puedes observar como se ha descompuesto una pirámide pentagonal en tres pirámides triangulares.



Por tanto, el volumen de esta pirámide es:

$$V = V_{\text{pirámide 1}} + V_{\text{pirámide 2}} + V_{\text{pirámide 3}} = \frac{1}{3} \cdot A_{B_1} \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_{B_2} \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_{B_3} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (A_{B_1} + A_{B_2} + A_{B_3}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

Ejemplo:Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular de 12 cm de arista básica y cuya apotema lateral mide 10 cm.



Claramente, la apotema de la base mide 6 cm.

altura de la pirámide:

$$a_l^2 = h^2 + a_b^2 \Rightarrow h^2 = a_l^2 - a_b^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

Luego $h = \sqrt{64} = 8\,\text{cm}$, con lo que $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 = 384\,\text{cm}^3$

Volumen de conos

El volumen de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura. En particular, para el

cono de radio r y altura h, se tiene

$$\boxed{V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

Ejercicio1: Halla el volumen de un cono sabiendo que la longitud de la circunferencia de su base es 31'416 cm y su generatriz mide 10 cm.

Volumen de la esfera

El volumen de la esfera es:

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3}$$

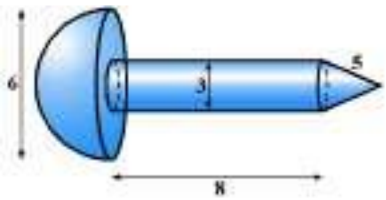
Ejercicio 1: Calcula el volumen de un cilindro de radio 6 cm y altura 6 cm, de un cono de radio 6 cm y altura 6 cm,

Ejercicio 2: Averigua el volumen y la superficie de las siguientes esferas:

Una esfera en la que un plano que la corta, pasando por su centro, produce una sección de 1.256 cm2 de área.

Una esfera en la que un plano que la corta, a una distancia de 9 cm de su centro, produce una sección que tiene
314 cm2 de área.

Ejercicio3: Halla el volumen del siguiente cuerpo, cuyas medidas están dadas en centímetros.



PROBAS DE ANOS ANTERIORES

EXERCICIO 1

Se nun cubo duplicamos a lonxitude da aresta, daquela:
A. O volume do cubo tamén se duplica.
B. O volume do cubo multiplícase por 4.
C. O volume do cubo multiplícase por 8.

EXERCICIO 2

Se nun cono duplicamos a altura e o raio da base, daquela:
A. O volume do cono multiplícase por 2
B. O volume do cono multiplícase por 4
C. O volume do cono multiplícase por 8

EXERCICIO 3

Cal é a fórmula que permite calcular o volume dun cono de altura "h" e raio "r"?

A $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

B $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

C $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

EXERCICIO 4

Se temos un cono e duplicamos o raio da base, daquela:
A. O volume do novo cono é o dobre que o do anterior.
B. O volume do novo cono é o cuádruplo que o do anterior.
C. O volume do novo cono é o mesmo que o do anterior.

EXERCICIO 5

Unha piscina ten 25 m de longo e 10 m de anchura. Cal será a súa profundidade se se necesita medio millón de litros de auga para a encher?
A. 2 m
B. 2 cm
C. 2000 m

EXERCICIO 6

Das tres dimensións dun tetrabrik coñécense o longo e a largura: 10 cm e 5 cm, respectivamente. Cal será a súa altura se a capacidade do envase é de dous litros?
A. 20 cm.
B. 2 cm.
C. 40 cm.

EXERCICIO 7

Un depósito de forma cilíndrica ten unha capacidade de 150 litros. Se a área da base é 75 dm2, cal é a súa altura?
A. 2 dm
B. 2 m
C. 5 cm

EXERCICIO 8

Deduza a lonxitude da xeratriz dun cono en que o diámetro da base mide 6 cm e a altura 4 cm.
A. 2cm
B. 6 cm
C. 5 cm

EXERCICIO 9

Calcule a cantidade de líquido que contén un recipiente con forma de prisma cuadrangular se as arestas da base miden 1 m e o líquido alcanza unha altura de 15 mm.

A. 0,15 litros.
B. 1,5 litros.
C. 15 litros.

EXERCICIO 10

Calcule o volume dunha caixa na que todas as arestas duplican en lonxitude ás arestas doutra que ten un volume de 2,3 cm^3.

A. 4,6 cm^3
B. 10,3 cm^3
C. 18,4 cm^3

EXERCICIO 11

A base dun prisma triangular é un triángulo rectángulo no que a hipotenusa mide 15 cm e un dos catetos 12 cm. Se a altura do prisma é 20 cm, calcule o volume do prisma.

A. 2.160 cm^3
B. 1.080 cm^3
C. 3.600 cm^3